Jarmila Elbelová
Využití skalárního součinu v geometrických úlohách

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 3, 146–159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150651

VYUŽITÍ SKALÁRNÍHO SOUČINU V GEOMETRICKÝCH ÚLOHÁCH

JARMILA ELBELOVÁ

Výuka vektorové algebry se na většině současných gymnázií opírá o učebnici [3]. Podle ní proto nejprve vyložíme pojetí skalárního součinu vektorů. V hlavní části článku pak na osmi planimetrických úlohách ukážeme, jak lze skalární součin využít k rychlému a efektivnímu řešení úloh, které na první pohled nemají s vektory nic společného a k jejichž řešení bychom obvykle vybrali jiný aparát (kosinovou větu, trigonometrii, metodu souřadnic apod.). Přesvědčíme se, že mnohdy opomíjené vektorové výpočty mohou poskytnout u některých problémů jednoduchou a přehlednou cestu k jejich řešení.

V učebnici [3] je skalární součin dvou vektorů zaveden nejprve analyticky pomocí jejich kartézských souřadnic a teprve poté je odvozen jeho běžný geometrický význam. *Velikost* vektoru $\vec{u}$, značená $|\vec{u}|$, je chápána jako velikost kterékoliv orientované úsečky, která tento vektor určuje. Pro každý vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v rovině tedy platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,,$$

podobně pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v prostoru

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,.$$

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ v rovině je v [3] definován jako číslo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2\,,$$

součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v prostoru pak jako číslo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\,.$$

Z takových definic skalárního součinu a velikosti vektoru ihned plyne rovnost

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = |\vec{u}|^2 .$$

Rutinními výpočty přes souřadnice v rovině či prostoru se rovněž ověří další důležité vlastnosti skalárního součinu:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle ,$$

$$\langle c\vec{u}, \vec{v} \rangle = c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \text{ pro každé } c \in \mathbb{R} ,$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle ,$$

které budeme při řešení úloh neustále využívat. Z nich mimo jiné plyne, že pro každé dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí

$$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle .$$

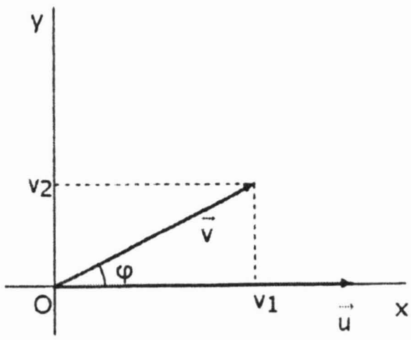
Odtud dostáváme důležité vyjádření skalárního součinu pomocí délek tří vektorů

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 \right) . \tag{1}$$

Protože velikosti vektorů jsou nezávislé na volbě kartézské soustavy souřadnic, plyne z vyjádření (1), že také skalární součin dvou vektorů je na zmíněné volbě nezávislý.

Ukažme ještě, jak je poté v učebnici [3] odvozen geometrický význam skalárního součinu. Zvolme umístění dvou libovolných vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ tak, aby měly stejný počáteční bod O. Vyberme pak kartézskou soustavu souřadnic Oxy tak, aby vektor $\vec{u}$ ležel na kladné poloose x a koncový bod vektoru $\vec{v}$ v polorovině, která obsahuje kladnou poloosu y (viz obr. 1).
V takto zvolené soustavě souřadnic mají vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ souřadnice $\vec{u} = (|\vec{u}|, 0)$, $\vec{u} = (|\vec{v}| \cos\varphi, |\vec{v}| \sin\varphi)$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Odtud podle výše uvedené definice skalárního součinu plyne vzorec

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\varphi , \tag{2}$$



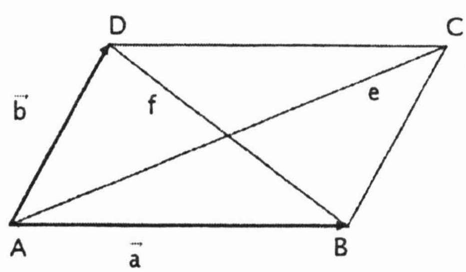
obr.1

který lze vyslovit jako známé geometrické pravidlo: *Skalární součin dvou vektorů dostaneme, když součin jejich velikostí vynásobíme kosinem úhlu, který tyto vektory svírají.*

Příklad 1
Dokažte pomocí vektorové algebry tzv. rovnoběžníkovou rovnost

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) ,$$

kde a, b jsou délky sousedních stran rovnoběžníku a e, f jsou délky jeho úhlopříček.



obr.2

Řešení:
Označíme-li vektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ a $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (viz obr. 2), pak platí

$$e^2 + f^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle =$$

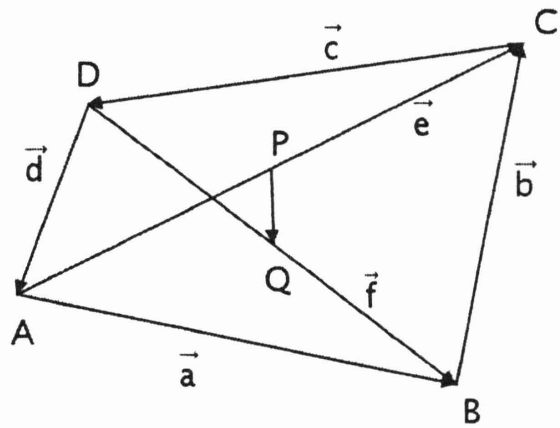
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle =$$

$$= 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right) = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

Příklad 2
Nechť P, Q jsou středy úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že platí tzv. Eulerova rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4|PQ|^2,$$

kde a, b, c, d jsou délky stran čtyřúhelníku a e, f jsou délky jeho úhlopříček.



obr.3

Řešení:
Jsou-li body P, Q středy úseček AC, BD, platí

$$P = \frac{1}{2}(A + C) \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2}(B + D).$$

Dále označíme s výraz rovný rozdílu stran dokazované rovnosti

$$s = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 - 4|PQ|^2.$$

Podobně jako při řešení Příkladu 1 můžeme psát:

$$e^2 = |\vec{e}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\,,$$

$$f^2 = |\vec{e}|^2 = |\vec{d} + \vec{a}|^2 = a^2 + d^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle\,,$$

$$|PQ|^2 = |\frac{1}{2}(B + D - A - C)|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a} + \vec{c}|^2 = \frac{a^2 + c^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{4}\,.$$

Tato tři vyjádření nyní využijeme k určení dříve definovaného rozdílu s:

$$s = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - a^2 - d^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle - a^2 - c^2 -$$

$$-2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = -2a^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = -2\langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \rangle =$$

$$= -2\langle \vec{a}, \vec{o} \rangle = 0\,.$$

Tím je Eulerova rovnost dokázána.[1]

Příklad 3

Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí rovnost

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2\,.$$

Řešení:

Na zadanou rovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy. Vektory určené stranami a úhlopříčkami čtyřúhelníku označme jako obvykle (viz obr. 3).

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0$$

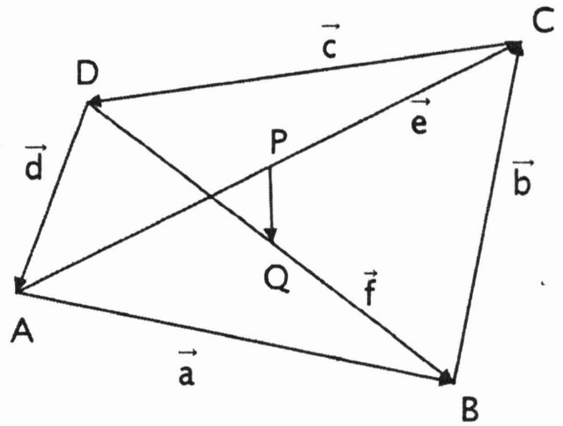
[1] Všimněte si, že v případě rovnoběžníku $ABCD$, kdy $P = Q$, $a = c$ a $b = d$, přejde Eulerova rovnost v rovnoběžníkovou rovnost z příkladu 1.

$$|\vec{e}-\vec{b}|^2+|-\vec{e}-\vec{d}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2=0$$
$$|\vec{e}|^2+|\vec{b}|^2-2\langle\vec{e},\vec{b}\rangle+|\vec{e}|^2+|\vec{d}|^2+2\langle\vec{e},\vec{d}\rangle-|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2=0$$
$$\langle\vec{e},\vec{e}-\vec{b}+\vec{d}\rangle=0$$
$$\langle\vec{e},-\vec{c}-\vec{b}\rangle=0$$
$$\langle\vec{e},\vec{f}\rangle=0$$

Skalární součin $\langle\vec{e},\vec{f}\rangle$ se rovná nule, právě když jsou vektory $\vec{e}$ a $\vec{f}$, a tedy úhlopříčky AC a BD, navzájem kolmé.

Příklad 4

Ve čtyřstěnu $ABCD$ jsou dvě dvojice protilehlých hran kolmé. Dokažte, že i třetí dvojice protilehlých hran je kolmá.



obr.3

Řešení:

Nechť ve čtyřstěnu $ABCD$ platí $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$, z čehož pro skalární součiny plyne

$$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=0\,,\qquad\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=0\,.$$

Ukážeme, že skalární součin vektorů $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{AD}$ zbývajících dvou protilehlých hran je taky roven nule (sledujte sčítání a odečítání vektorů podle obr. 4):

$$\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\rangle=\langle-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle-\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=$$

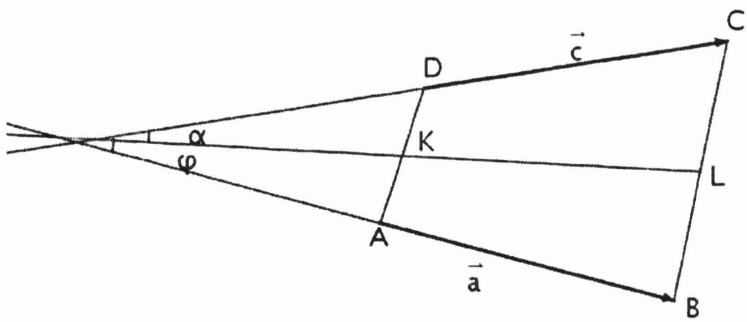
$$= \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle -$$

$$- \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 5

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB a CD jsou shodné. Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, jež prochází středy K, L stran AD a BC.



obr.5

Řešení:

Označme vektory $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ a $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Podle zadání je $|\vec{a}| = |\vec{c}|$ a pro body K a L platí

$$K = \frac{1}{2}(A + D) \qquad L = \frac{1}{2}(B + C) .$$

Odtud

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(B + C - A - D) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) .$$

Označme φ úhel, který svírá přímka AB s přímkou KL, a úhel, který svírá přímka CD s přímkou KL, označme α (obr. 5). Pro kosiny těchto úhlů podle vzorce (2) dostáváme:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{KL} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} = \frac{1}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{c} \rangle = \frac{|\vec{a}|}{2|\overrightarrow{KL}|} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{2|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} ,$$

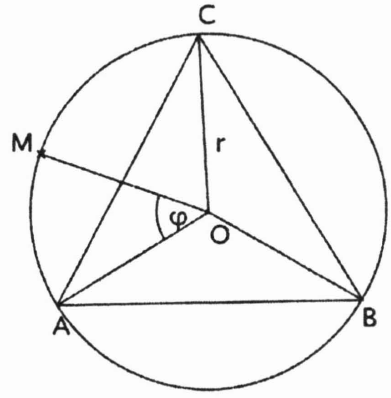
$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{c}, \overrightarrow{KL} \rangle}{|\vec{c}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} = \frac{1}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle \vec{c}, \vec{a} + \vec{c} \rangle = \frac{|\vec{a}|}{2|\overrightarrow{KL}|} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{2|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{KL}|} .$$

Vidíme, že $\cos\varphi = \cos\alpha$; protože se jedná o odchylky přímek, které jsou v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, platí $\varphi = \alpha$.

Příklad 6
Dokažte, že pro libovolný bod M kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC má součet

$$|MA|^4 + |MB|^4 + |MC|^4$$

tutéž hodnotu.



obr.6

Řešení:
Označíme r poloměr kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC a O její střed (obr. 6). Nejprve vyjádříme pomocí skalárního součinu druhou mocninu velikosti vektoru $\overrightarrow{MA}$:

$$|\overrightarrow{MA}|^2 = |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{MO}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA} \rangle =$$

$$= 2r^2 + 2\langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA} \rangle .$$

Analogicky pro vektory $\overrightarrow{MB}$ a $\overrightarrow{MC}$ platí

$$|\overrightarrow{MB}|^2 = 2r^2 + 2\langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB} \rangle ,$$

$$|\overrightarrow{MC}|^2 = 2r^2 + 2\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle .$$

Nyní si označíme symbolem s součet

$$s = |MA|^4 + |MB|^4 + |MC|^4 .$$

S využitím předchozího dostáváme

$$s = 4r^4 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}\rangle^2 + 8r^2\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}\rangle + 4r^4 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}\rangle^2 +$$

$$+ 8r^2\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}\rangle + 4r^4 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle^2 + 8r^2\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle =$$

$$= 12r^4 + 8r^2\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\rangle +$$

$$+ 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}\rangle^2 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}\rangle^2 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle^2 .$$

Protože rovnostranný trojúhelník ABC je vepsán do kružnice se středem O, platí

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{o},$$

a tedy

$$s = 12r^4 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}\rangle^2 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}\rangle^2 + 4\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle^2 .$$

S ohledem na symetrii předpokládejme, že bod M leží jako na obrázku 6 na kratším oblouku AC, a označme $|\sphericalangle AOM| = \varphi$. Protože úhly mezi jednotlivými vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ jsou rovny $\frac{2\pi}{3}$, platí rovnosti $|\sphericalangle BOM| = \varphi + \frac{2\pi}{3}$ a $|\sphericalangle COM| = \varphi + \frac{4\pi}{3}$. Po jejich dosazení do vztahu (2) pro skalární součin dvou vektorů obdržíme

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}\rangle^2 &= (r \cdot r \cos\varphi)^2 = r^4 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \\
\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}\rangle^2 &= \left(r \cdot r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 = r^4 \frac{1 + \cos\left(2\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)}{2}, \\
\langle\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC}\rangle^2 &= \left(r \cdot r \cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)\right)^2 = r^4 \frac{1 + \cos\left(2\varphi + \frac{8\pi}{3}\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$s = 12r^4 + 4r^4 \frac{3 + \cos 2\varphi + \cos\left(2\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} =$$

$$= 12r^4 + 6r^4 + 2r^4 \left(\cos 2\varphi + 2\cos 2\varphi \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 12r^4 + 6r^4 = 18r^4 .$$

Zkoumaný součet je roven $18r^4$, což je hodnota, která nezávisí na volbě bodu M, jak jsme měli dokázat.

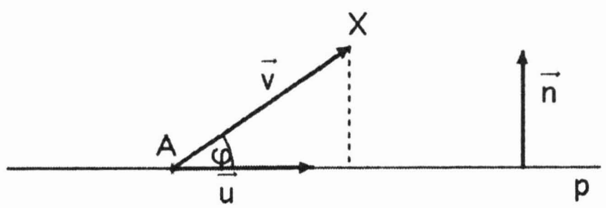
Příklad 7

Je dán konvexní čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy mají stejný součet vzdáleností od čtyř přímek, na kterých leží jeho strany. Dokažte, že tento čtyřúhelník je rovnoběžník.

Řešení:

Úvodem řešení poznamenejme, že pokud je $\vec{u}$ jednotkový vektor, tedy $|\vec{u}| = 1$, pak pro libovolný nenulový vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AX}$ platí

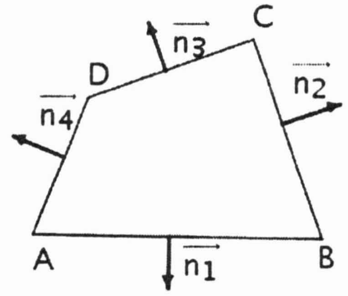
$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos\varphi = |\vec{v}| \cos\varphi ,$$



obr.7

kde φ je úhel, který tyto dva vektory svírají. Z obrázku je patrné, že hodnota skalárního součinu $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ vyjadřuje velikost kolmé projekce vektoru $\vec{v}$ na přímku p určenou vektorem $\vec{u}$ a bodem A. Odtud pak plyne, že vzdálenost bodu X od přímky p je dána absolutní hodnotou skalárního součinu $|\langle \overrightarrow{AX}, \vec{n} \rangle|$, kde $\vec{n}$ je normálový vektor přímky p.

Označme postupně $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$, $\vec{n_4}$ normované normálové vektory ke stranám AB, BC, CD, DA a ρ_A (ρ_B, ρ_C, ρ_D) součet



obr.8

vzdáleností bodu A (B, C, D) od čtyř přímek, na kterých leží strany uvažovaného čtyřúhelníka $ABCD$ (vektory $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$, $\vec{n_4}$ orientujeme vně čtyřúhelníku $ABCD$, jak vidíte na obr. 8). Podle zadání platí

$$\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D \,.$$

Vzdálenost bodu A od přímek AB a AD je rovna nule, vzdálenost od přímky CD je rovna skalárnímu součinu $\langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_3} \rangle$ a vzdálenost od přímky BC je rovna $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} \rangle$. (Vektory stran volíme tak, aby byl skalární součin vždy kladný.) Odtud

$$\rho_A = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} \rangle \,.$$

Analogicky

$$\rho_B = \langle \overrightarrow{BA}, \vec{n_4} \rangle + \langle \overrightarrow{BD}, \vec{n_3} \rangle \,,$$

$$\rho_D = \langle \overrightarrow{DA}, \vec{n_1} \rangle + \langle \overrightarrow{DB}, \vec{n_2} \rangle \,.$$

Protože $\rho_A = \rho_B$, platí

$$0 = \rho_A - \rho_B = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} \rangle - \langle \overrightarrow{BA}, \vec{n_4} \rangle - \langle \overrightarrow{BD}, \vec{n_3} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} + \vec{n_4} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}, \vec{n_3} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} + \vec{n_4} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_3} \rangle +$$

$$+ \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_1} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_1} + \vec{n_2} + \vec{n_3} + \vec{n_4} \rangle \,.$$

(Člen $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_1} \rangle$ jsme mohli přičíst, protože vektor $\vec{n_1}$ je kolmý k vektoru $\overrightarrow{AB}$.) Podobně

$$0 = \rho_A - \rho_D = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n_2} \rangle - \langle \overrightarrow{DA}, \vec{n_1} \rangle - \langle \overrightarrow{DB}, \vec{n_2} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_1} + \vec{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}, \vec{n_2} \rangle = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_1} + \vec{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_2} \rangle +$$

$$+ \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_4} \rangle = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n_1} + \vec{n_2} + \vec{n_3} + \vec{n_4} \rangle .$$

Protože žádný nenulový vektor roviny ABD nemůže být kolmý k oběma vektorům $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, musí platit

$$\vec{n_1} + \vec{n_2} + \vec{n_3} + \vec{n_4} = \vec{o} .$$

Odtud plyne

$$\vec{n_1} + \vec{n_2} = -\vec{n_3} - \vec{n_4} ,$$

$$|\vec{n_1} + \vec{n_2}|^2 = |\vec{n_3} + \vec{n_4}|^2 ,$$

$$|\vec{n_1}|^2 + |\vec{n_2}|^2 + 2\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle = |\vec{n_3}|^2 + |\vec{n_4}|^2 + 2\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle ,$$

$$2\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle = 2\langle \vec{n_3}, \vec{n_4} \rangle .$$

To znamená, že $|\sphericalangle \vec{n_1}, \vec{n_2}| = |\sphericalangle \vec{n_3}, \vec{n_4}|$. Podobně můžeme ze stejné rovnosti odvodit vztah $|\sphericalangle \vec{n_1}, \vec{n_4}| = |\sphericalangle \vec{n_2}, \vec{n_3}|$. Poslední dvě rovnosti znamenají, že pro vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ platí $\beta = \delta$ a $\alpha = \gamma$, takže $ABCD$ je rovnoběžník.

Příklad 8

Pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ je vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem r. Nechť X je libovolný bod, pro který platí $|OX| = d$. Dokažte rovnost

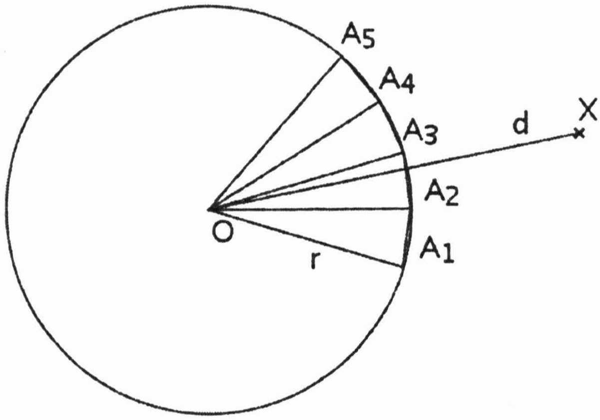
$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = n\left(r^2 + d^2\right) .$$

Řešení:

Nejprve vyjádříme velikosti vektorů $\overrightarrow{A_iX}$ pomocí skalárních součinů takto:

$$|\overrightarrow{A_iX}|^2 = |\overrightarrow{A_iO} + \overrightarrow{OX}|^2 = |\overrightarrow{A_iO}|^2 + |\overrightarrow{OX}|^2 + 2\langle \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX} \rangle =$$

$$= d^2 + r^2 + 2\langle \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX} \rangle .$$



obr.9

Odtud sečtením pro $i = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(d^2 + r^2 + 2\langle \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX} \rangle \right) =$$

$$= n\left(d^2 + r^2\right) + 2\langle \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX} \rangle .$$

Protože $A_1A_2 \ldots A_n$ je pravidelný n-úhelník se středem O, platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iO} = \overrightarrow{o} .$$

Dosazením do předchozí rovnosti dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = n\left(r^2 + d^2\right) ,$$

což jsme měli dokázat.

Literatura

[1] Engel, E., *Problem - Solving Strategies*, Springer Verlag, New York, 1997

[2] Larson, C. L., *Metódy riešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990

[3] Kočandrle, M., Boček, L., *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie*, Prometheus, Praha, 1996

[4] Prasolov, V. V., *Úlohy z planimetrie*, Nauka, Moskva, 1986

Mgr. Jarmila Elbelová
Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo nám. 2a, 602 00, Brno
e-mail: j_elbelova@yahoo.com