Dag Hrubý

Co se mně nedávno přihodilo ve 2.B

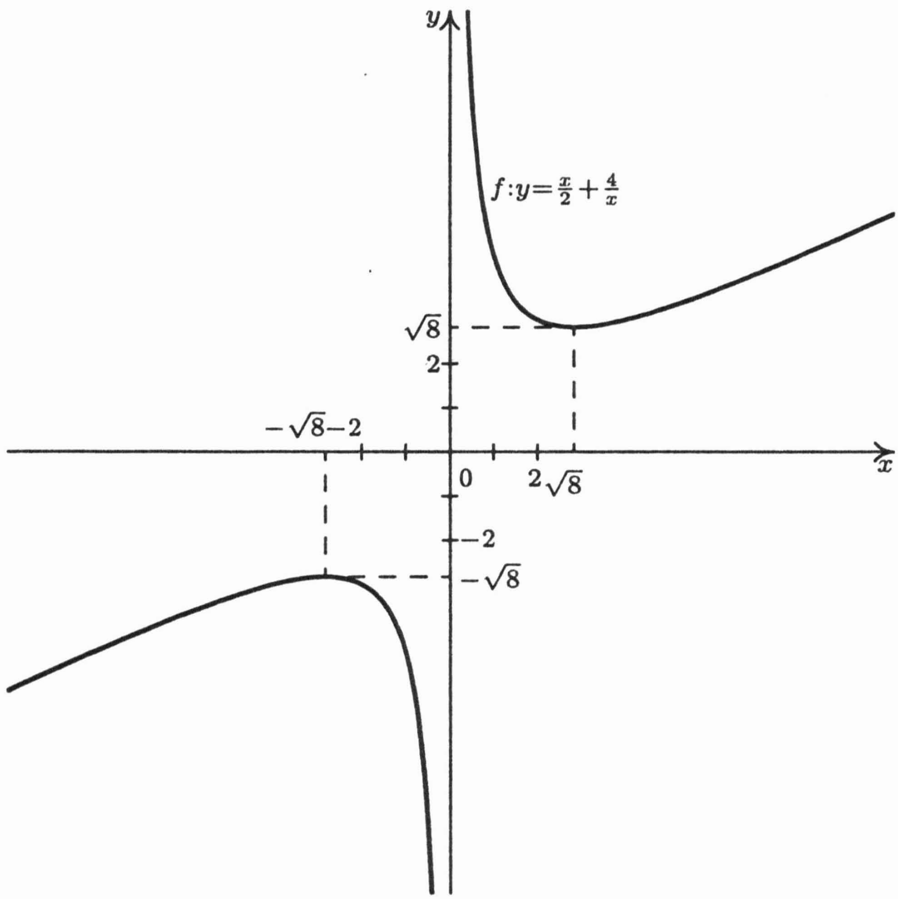
Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 2, 124–127

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150580

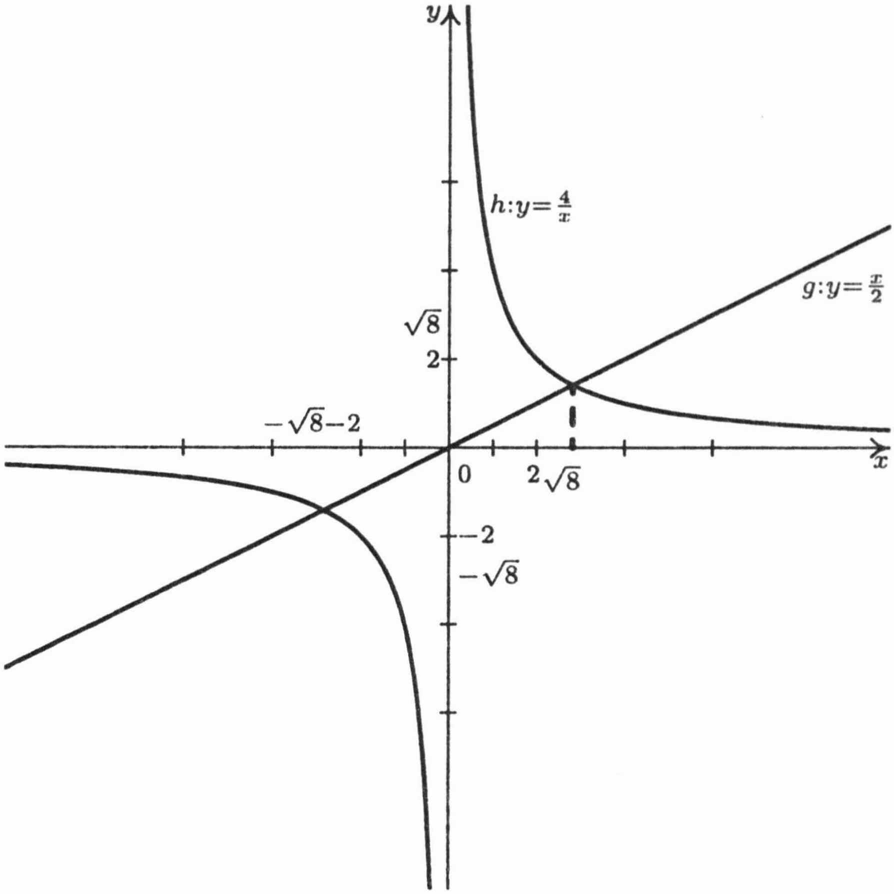
CO SE MNĚ NEDÁVNO PŘIHODILO VE 2. B

DAG HRUBÝ

V letošním roce vyučuji matematiku ve druhém ročníku čtyřletého gymnázia. Když jsme probírali racionální lomené funkce, přišel za mnou student Mlynář s tím, že si doma zkoušel nalézt minimum funkce $f\colon y = \frac{x}{2} + \frac{4}{x}$ (obr. 1) tak, že si nakreslil



Obr. 1



Obr. 2

do jedné soustavy souřadnic grafy funkcí $g\colon y = \dfrac{x}{2}$ a $h\colon y = \dfrac{4}{x}$ (obr. 2).

Řekl mi, že funkce má minimum v bodě $b = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$, a že to tak vyjde vždycky. To znamená, že minimum je vždy v bodě, který je x-ovou souřadnicí průsečíků grafů daných funkcí f, g. Samozřejmě po mně chtěl, abych mu to vysvětlil. Snažil jsem se nejdříve vysvětlit problém na základě obr. 2, ale to se mu moc nezdálo a mně nakonec také ne. Dále jsem mu navrhl, že k potvrzení své hypotézy by musel dokázat následující nerovnost

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \frac{x}{2} + \frac{4}{x} \geq \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{4}{\sqrt{8}},$$

resp. nerovnost

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \colon \frac{x}{2} + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{2}.$$

Tuto nerovnost si můžete snadno dokázat sporem sami. To se mu líbilo více, ale přesto se mě ptal na další možnost. Řekl jsem, že by to šlo ještě řešit pomocí derivace jako extrém funkce, ale že to budeme probírat až ve 4. ročníku. Mlynář však nechtěl čekat, až bude ve 4. ročníku, a chtěl výpočet provést ihned. Souhlasil s tím, že budeme uvažovat funkci

$$f \colon y = \frac{x}{a} + \frac{b}{x}$$

za podmínky $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$. Nejdříve jsem potvrdil, že průsečík grafů funkcí $y = \frac{x}{a}$, $y = \frac{b}{x}$, který získáme řešením rovnice

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x},$$

má v našem případě x-ovou souřadnicí $x = \sqrt{ab}$. Připomenul jsem, že i v tomto případě by bylo možné dokázat nerovnost

$$\forall x, a, b, \in \mathbb{R}^+ \colon \frac{x}{a} + \frac{b}{x} \geq \frac{\sqrt{ab}}{a} + \frac{b}{\sqrt{ab}}.$$

I tuto nerovnost si můžete sami doma dokázat. Funkci jsem nakonec zderivoval a dostal

$$f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{b}{x^2}.$$

Řekl jsem, že bod podezřelý z extrému je kořenem rovnice $f'(x) = 0$, tj. rovnice

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{x^2} = 0,$$

která je ovšem ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x},$$

kterou jsme diskutovali výše a která má kořen $x = \sqrt{a \cdot b}$. Charakter extrému určíme pomocí druhé derivace. Zřejmě je

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}.$$

Vzhledem k $f''\left(\sqrt{a \cdot b}\right) = \dfrac{2b}{ab\sqrt{ab}} > 0$, je v bodě $x = \sqrt{ab}$ lokální minimum.

Mlynář pokyvoval hlavou a zdálo se mi, že je spokojen. Celá diskuze probíhala o přestávce na chodbě na parapetu okna. Potom už nikdo nic neříkal. Najednou zazvonilo a byl konec přestávky. Možná jsem u Mlynáře vzbudil zájem o diferenciální počet. Vím však zcela jistě, že jsem rozvíjel cílovou kompetenci *C – vymezení a řešení problému*, a to v podskupinách: *Ca – vymezení problému*, *Cb – analýza problému*, *Cc – zvolení vhodné metody řešení problému* (v tomto případě spíše nevhodné metody), *Cd – vyřešení problému*, *Ce – diskuze o výsledcích.* Nevím však, zda to bude platit, když to bylo o přestávce u okna.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium, A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz