Učitel matematiky

Milada Kočandrlová; Václav Jára

Stereografická projekce a astroláb

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 1, 1–13

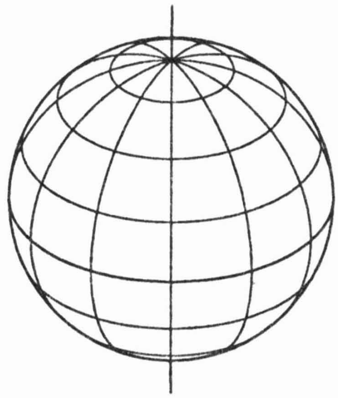
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150495

STEREOGRAFICKÁ PROJEKCE A ASTROLÁB

Milada Kočandrlová, Václav Jára

Rok 2009 vyhlásily OSN a UNESCO mezinárodním rokem astronomie. Při této příležitosti věnujeme tento článek dvěma významným astronomům Hipparchovi a Mercatorovi.

Řecký astronom Hipparchos (180–125 př. n. l.) je považován za jednoho z největších astronomů starověku. Založil moderní astronomii na základě pozorování. Též je považován za zakladatele matematického zeměpisu. K zobrazování zemského povrchu používal stereografickou projekci. Zeměpisce naučil používat zeměpisné souřadnice, zeměpisnou délku a zeměpisnou šířku.

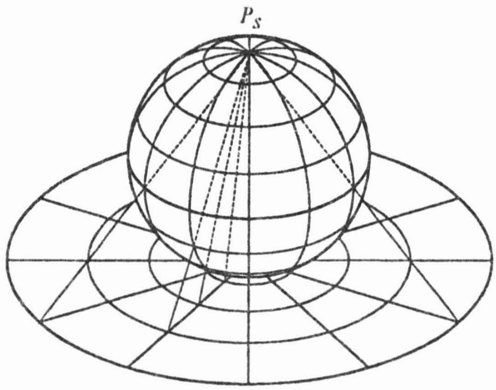


Obr. 1. Geodetická síť

I. Stereografická projekce

Na začátku shrneme známé vlastnosti stereografické projekce, které v následujícím textu budeme potřebovat. Zvolíme-li jeden průměr sféry za její osu rotace, jeho průsečíky se sférou nazýváme póly. Každým bodem sféry, různým od pólů, prochází právě jedna rovnoběžka a právě jeden poledník. Rovnoběžky a poledníky tvoří geodetickou síť na sféře, obr. 1.

Stereografická projekce sféry je středové promítání ze středu, který leží na sféře, na tečnou rovinu v protějším bodě sféry (nebo na rovinu s touto rovinou rovnoběžnou). Je-li střed stereografické projekce pól, nazýváme takovou projekci azimutální (nebo normální), obr. 2.

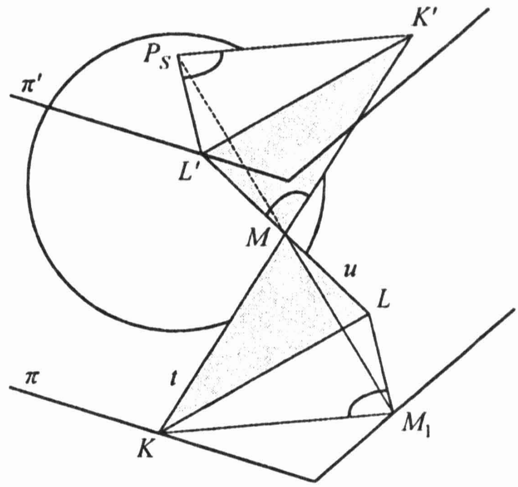


Obr. 2. Stereografická projekce

Potom se rovnoběžky promítají do soustředných kružnic a poledníky do polopřímek s počátečním bodem ve středu obrazů rovnoběžek. Soustředné kružnice a polopřímky s počátečním bodem v jejich středu tvoří kartografickou síť stereografického průmětu sféry – mapy. Této projekce se využívá na mapách polárních oblastí.

II. Vlastnosti stereografické projekce

1. Stereografická projekce je konformní zobrazení. Zachovává velikost úhlu, tj. velikost úhlu vzorů (úhel, pod kterým se protínají křivky na sféře, určuje odchylka jejich tečen ve společném bodě) je rovna velikosti úhlu jejich obrazů.



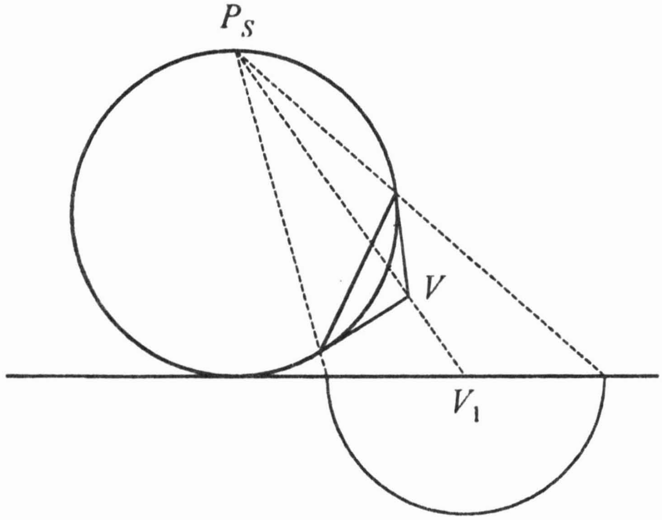
Obr. 3. Konformita projekce

Abychom tuto vlastnost ověřili, zvolíme dvě křivky k, k' na sféře a v jejich společném bodě M sestrojíme tečny t, u, obr. 3. Tečny t, u a body M, P_s určují trojici rovin. Jsou to tečná rovina (M, t, u) sféry a promítací roviny P_s, t a P_s, u, které protínají rovnoběžné roviny, průmětnu π a tečnou rovinu π'sféry v pólu P_s v rovnoběžných přímkách $K'L' \parallel KL$, $P_sL' \parallel M_1L$, $P_sK' \parallel M_1K$. Proto jsou trojúhelníky $P_sK'L'$ a M_1KL podobné. Trojúhelníky $P_sK'L'$ a $MK'L'$ jsou shodné, neboť strany $K'P_s$ a $K'M$ jsou tečny sféry z bodu L', mají proto stejnou délku. Analogicky pro strany $L'P_s$ a $L'M$. Odtud dostáváme shodnost úhlů při vrcholech P_s a M, a tudíž i shodnost úhlu vzorů při vrcholu M a obrazů při vrcholu M_1.

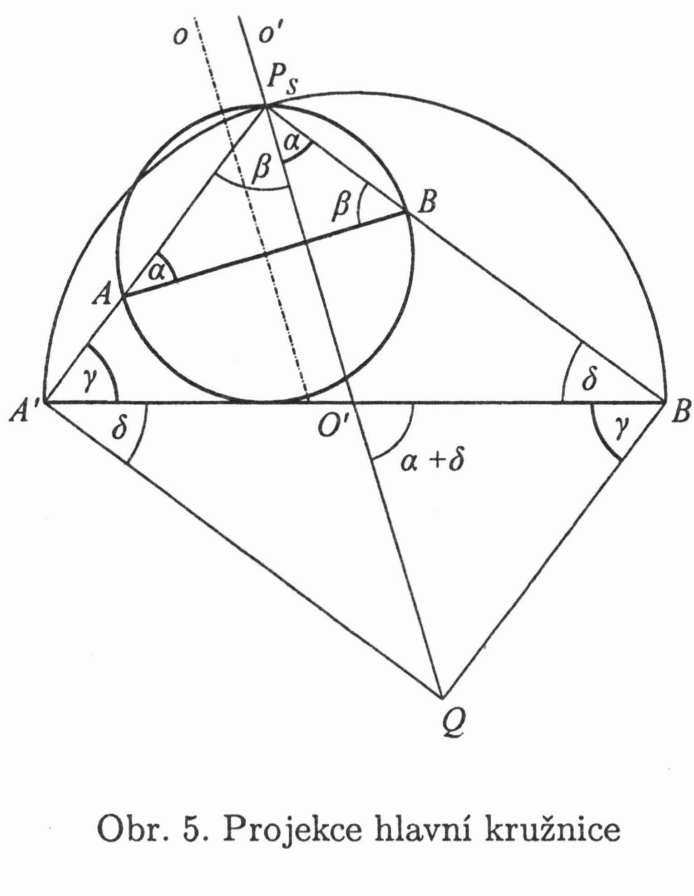
Druhá důležitá vlastnost stereografické projekce je:

2. Stereografický průmět kružnice, která neprochází středem projekce, je kružnice, obr. 4 a 5.

Podél kružnice, která není hlavní kružnicí, se sféry dotýká kuželová plocha, na obr. 4 je osový řez obou ploch (nárys). Površky kužele jsou kolmé na tečny dotykové kružnice (ve společných bodech). Stereografická projekce zachovává velikosti úhlů, proto průměty tečen kružnice jsou kolmé na průměty površek dotykového



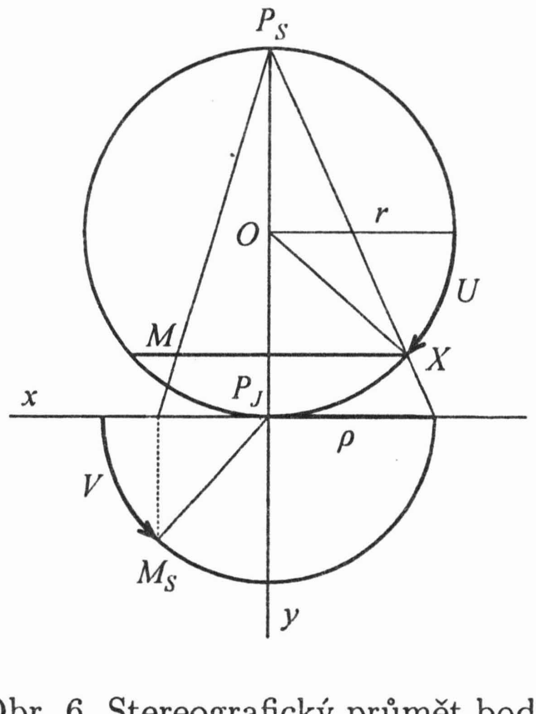
Obr. 4. Projekce kružnic



Obr. 5. Projekce hlavní kružnice

kužele. To je vlastnost kružnice. Stereografickým průmětem zvolené kružnice je tudíž kružnice (na obrázku je její půdorys). Její střed je průmět vrcholu V dotykového kužele.

Podél hlavní kružnice se sféry dotýká válcová plocha s osou o, na obr. 5 je osový řez sféry. Průmět průměru AB hlavní kružnice je úsečka $A'B'$. Průsečík O' přímky o', $P_S \in o'$, $o' \parallel o$, je vnitřním bodem úsečky $A'B'$. Trojúhelník ABP_S je pravoúhlý s výškou o'. Také trojúhelník $A'B'P_S$ je pravoúhlý. Označíme-li $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ po řadě úhly při vrcholech A, B, A', B', je $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi/2$. Trojúhelník $A'B'P_S$ doplníme na obdélník. Z vlastností vrcholových a vedlejších úhlů při vrcholu O' je zřejmé, že úhel $A'B'P_S$ je obvodový úhel a úhel $A'O'P_S$ je středový úhel. Potom je zřejmé, že P_SO' je druhá úhlopříčka obdélníku $A'P_SB'Q$, a že O' je středem průmětu hlavní kužnice a má průměr $A'B'$.



Obr. 6. Stereografický průmět bodu

III. Souřadnice bodů mapy

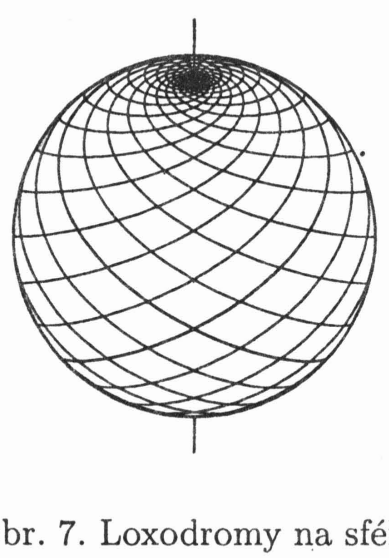
Poloha bodů na referenční sféře, tj. sféře, která nahrazuje Zemi, se určuje pomocí sférické šířky U a sférické délky V, obr. 6. Délka V je odchylkou roviny poledníku od roviny zvoleného nultého poledníku. Sférická šířka U je odchylkou poloměru XO od roviny rovníku r.

Nyní můžeme vypočítat poloměr ρ stereografického průmětu rovnoběžky. Úhel P_jP_sX je obvodový úhel ke středovému úhlu P_jOX, jehož velikost je $\frac{\pi}{2} - U$. Potom

$$\rho = 2R\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right),$$

kde R jsme označili poloměr sféry. Poloměr ρ je polárním poloměrem v soustavě polárních souřadnic mapy, úhlem je sférická délka V. Kartézské souřadnice bodu M_s na mapě jsou

$$x = 2R\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right)\cos V, y = 2R\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right)\sin V. \quad (1)$$



Obr. 7. Loxodromy na sféře

IV. Loxodroma na sféře

Křivka, která protíná poledníky pod konstantním úhlem (azimutem) $\alpha \in (0, \pi/2)$, se nazývá loxodroma. Na sféře je dána rovnicí

$$V = \pm \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right) + c,$$

kde znaménko $\pm$ určuje směr na východ, nebo západ, konstanta c určuje posunutí křivky na jih, nebo sever, obr. 7.

Označíme-li $\frac{1}{a} = \pm \operatorname{tg} \alpha$, $c = 0$ (pro jednu z křivek), je

$$V = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right). \tag{2}$$

Použitím inverzní funkce k logaritmu dostáváme pro průvodič stereografického obrazu bodu loxodromy

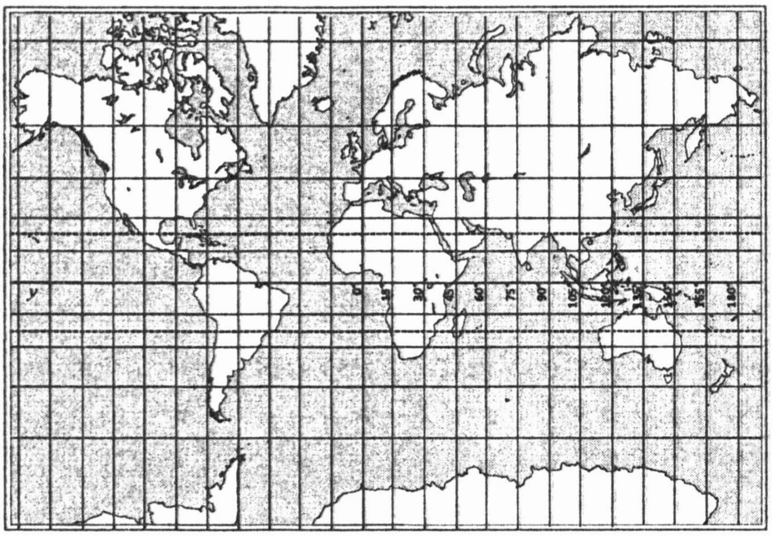
$$\rho = e^{aV} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right), U \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Stereografický průmět loxodromy na sféře je logaritmická spirála $\rho = e^{aV}$. Rovnice (1) jsou parametrickými rovnicemi logaritmické spirály. Známá vlastnost logaritmické spirály je ta, že průvodič jejího bodu má konstantní odchylku od tečny v tomto bodě. Průvodič bodu spirály je stereografickým průmětem poledníku sféry, azimut je odchylka poledníku od tečny loxodromy (stereografická projekce je konformní zobrazení sféry na rovinu).

V. Mercatorovo zobrazení

Jiným konformním zobrazením sféry na rovinu je Mercatorovo zobrazení. Navrhl je v 16. století Holanďan G. Kremmer – Mercator (1512–1594). Zobrazení je dáno rovnicemi

$$x = R \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U}{2}\right), y = RV.$$



Obr. 8. Mercatorovo zobrazení (zdroj [4])

První rovnice je řešením diferenciální rovnice dané zkreslením délek na mapě, viz [1]. Poledníky kartografické sítě jsou rovnoběžné úsečky s osou x. Obrazy rovnoběžkových kružnic jsou rovnoběžné úsečky s osou y, obr. 8. Směrem od osy y se jejich vzdálenost zvětšuje.

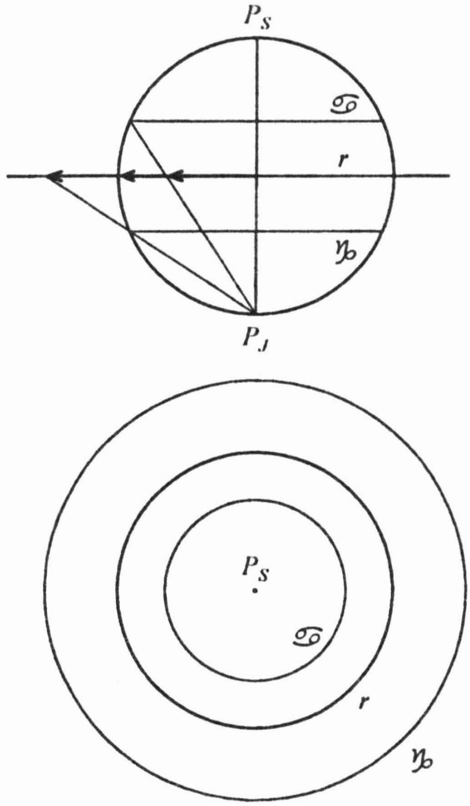
Dosazením rovnice (2) loxodromy do první z těchto rovnic dostaneme rovnice

$$x = RaV, y = RV,$$

které určují přímku $y = x/a$. Loxodroma se na Mercatorově mapě zobrazuje jako úsečka. Pro tuto vlastnost, snadnou navigaci, byly Mercatorovy mapy používány v námořnictví a letectví.

Kromě mapování se Mercator zabýval i konstrukcí astronomických přístrojů. Mimo jiné i konstrukcí astrolábu, přístroje na měření výšky Slunce či hvězd nad obzorem a řešení dalších astronomických úloh. V souvislosti s astrolábem se objevuje i jméno Hipparchose jako jeho pravděpodobného autora.

Základní části astrolábu jsou jednak „záda“, tj. rub astrolábu, na kterém lze přečíst den, měsíc, čas, znamení zvířetníku. V orientaci množství dat pomáhá otočné pravítko. Druhá základní část astrolábu je „kruhová matka“ s pohyblivou pavučinovou sítí ve



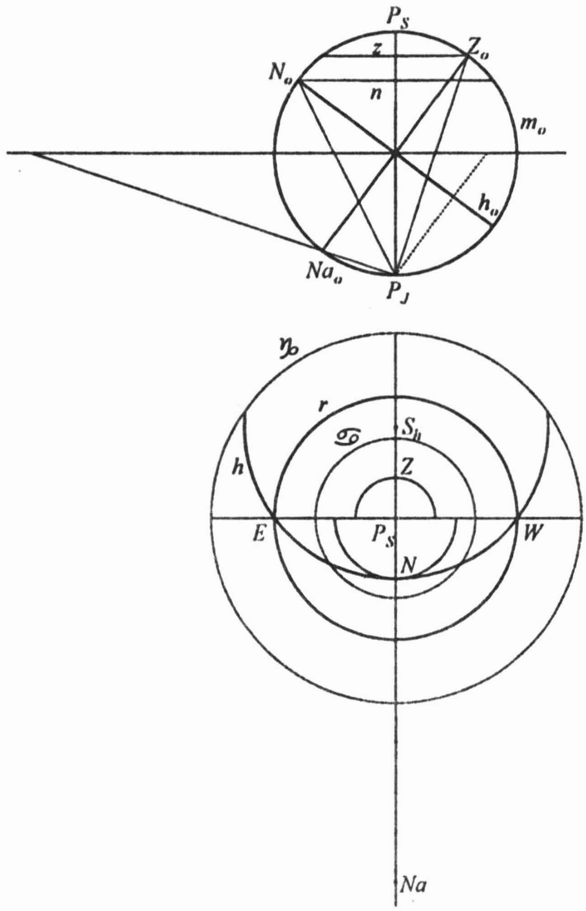
Obr. 9. Rovník a obratníky

tvaru stereografického průmětu ekliptiky se zvířetníkem a vyznačenými stálicemi a otočným pravítkem. Nás bude zajímat právě „kruhová matka“, která je sestrojena stereografickou projekcí.

VI. Astroláb

Stereografickou projekcí sestrojíme obraz nebeské sféry, na kterou jsme z místa pozorovatele promítli zemskou geodetickou síť. Potom střed stereografické projekce zvolíme v jižním pólu a promítat budeme na rovinu rovníku.

V prvním kroku sestrojíme rovník a oba obratníky, obr. 9. Poloha pozorovatele hvězdné sféry na Zemi je dána sférickými souřadnicemi, šířkou a délkou. Konstrukci popíšeme přibližně pro

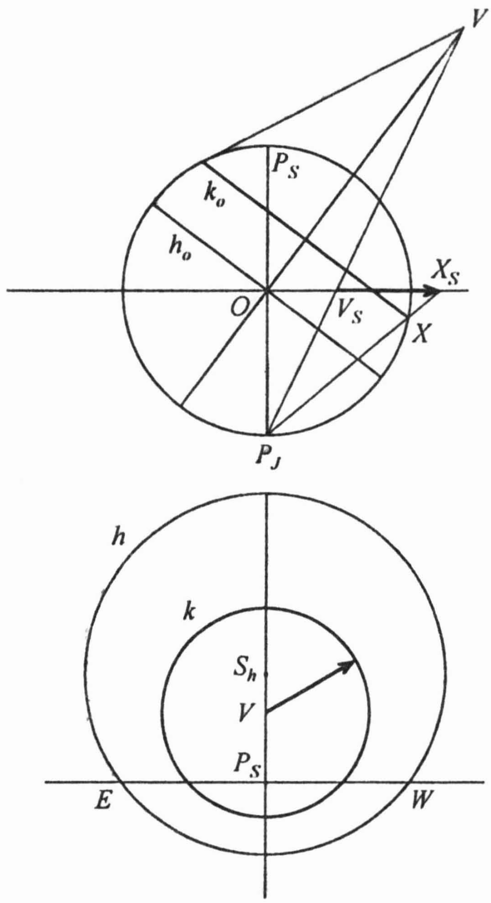


Obr. 10. Geodetická síť k pozorovateli

pozorovatele v Praze. Vzhledem k pozorovateli určíme na nebeské sféře geodetickou síť. Její póly jsou zenit Z a nadir N_a. Příslušný sférický rovník je horizontem (obzorem), obr. 10.

Horizont protíná rovník ve východním bodě E a západním bodě W. Kolmý průměr na EW je obraz polední kružnice, obr. 10. Zobrazíme místní geodetickou síť, síť vzhledem k pozorovateli, a to její část nad horizontem.

Pro obraz horizontu máme tedy dva body E a W. Další bod zjistíme v otočení místního poledníku do m_o, obr. 10. Severní bod N bude ležet na hvězdné rovnoběžce n, podobně zenit Z leží na rovnoběžce z a na polední kružnici.

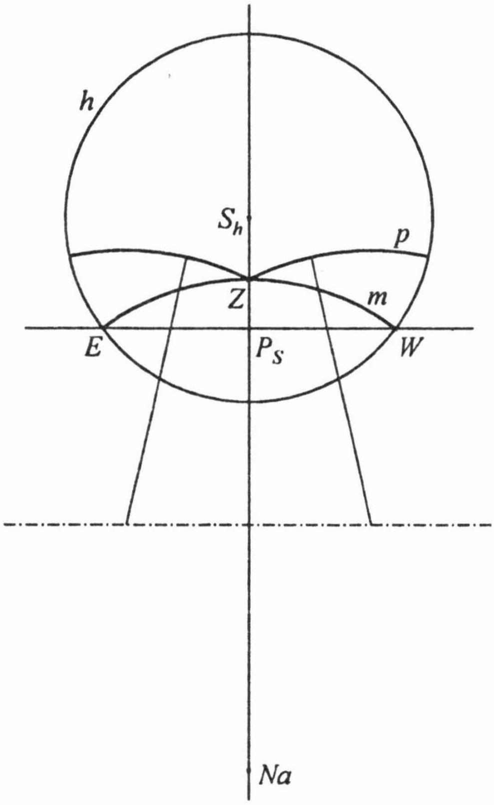


Obr. 11. Rovnoběžky místní sítě

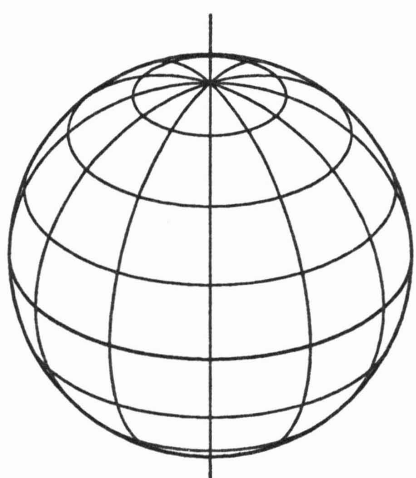
Obrazy rovnoběžek místní sítě jsou zřejmé z obrázku 11, vzdálenost V_s od O je rovna vzdálenosti V od P_s, poloměr je $|V_sX_s|$.

Poledníky procházejí zenitem Z a nadirem N_a a jsou kolmé k obzoru. Kružnicové oblouky, do kterých se poledníky promítají, obr. 12, mají středy na ose úsečky ZN_a, obr. 12.

Na obrázku 13 je výsledná konstrukce „kruhové matky" astrolábu. V její dolní části jsou křivky nerovnoměrných hodin, které nejsou kružnicovými oblouky, a tak nejsou stereografickými průměty kružnic sféry. Nerovnoměrné hodiny, jak už název napovídá, mají rozdílný interval v noci a ve dne a navíc závisí na ročním období a na zeměpisné šířce pozorovatele.



Obr. 12. Poledníky místní sítě



Obr. 13. Konstrukce „kruhové matky“

Dodejme ještě, že obraz ekliptiky pohyblivé pavučinové sítě, je kružnice, která se vně dotýká obrazu obratníku Raka a uvnitř obrazu obratníku Kozoroha.

Konstrukce astrolábu je jedna věc, jeho použití je věc jiná. Křišťan z Prachatic uvádí v [2] padesát sedm příkladů pro užití astrolábu. O astrolábu na Pražském orloji se více dozvíte v článku [3]. Symbol astrolábu je vyobrazen na dvacetikorunové minci první a třetí emise.

Literatura

[1] Mikšovský, M., *Kartografie pro 4. r. studijního oboru geodézie*, Praha, 1987

[2] Křišťan z Prachatic, *Stavba a užití astrolábu*, Academia, 2001

[3] Křížek, M., Šolc, J., Šolcová, A., Pražský orloj a stereografická projekce, *MFI* **17**(2007), str. 129–139

[4] `http://alabamamaps.ua.edu/contemporarymaps/wored /world/world2.pdf`

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Mgr. Václav Jára
ČVUT Fakulta stavební
Katedra matematiky
Thákurova 7
160 00 Praha 6
e-mail: milada.kocandrlova@fs.cvut.cz
e-mail: vaclav.jara@fsv.cvut.cz