Ľubomíra Balková

Paul Erdős: Život v citátech

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 4, 227–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150374`

PAUL ERDŐS: ŽIVOT V CITÁTECH

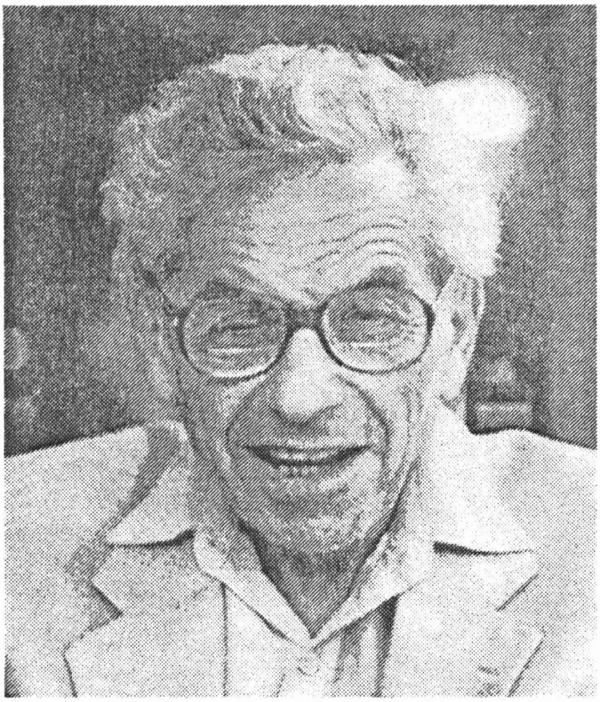
Ľubomíra Balková

Proč jsou čísla nádherná?
To je jako ptát se, proč je nádherná
Beethovenova Devátá symfonie.
Když nevíte proč,
nemůže vám to nikdo vysvětlit.
Já vím, že čísla jsou nádherná.
A jestli nejsou,
tak potom není nádherné už nic.

Paul Erdős

Paul Erdős (26. 3. 1913, Budapešť – 20. 9. 1996, Varšava) je asi nejznámějším matematikem 20. století a jedním z nejslavnějších matematiků vůbec. Také je bez přehánění jednou z nejzajímavějších postav nejen matematického světa.

Kromě vlastních výsledků a elegantních důkazů, kterých má P. Erdős na svém kontě nepočítaně, mu náleží zásluha na změně stylu práce v matematice. Zatímco do poloviny 20. století publikovala většina matematiků samostatně, je dnes přes 50 % článků dítětem spolupráce. P. Erdős je autorem cca 1 500 článků (což je absolutní rekord a na záda mu dýchají pouze Leonhard Euler, Augustin-Louis Cauchy a Arthur Cayley), zejména však tyto články sepsal s více než 500 spoluautory! Není divu, že na jeho počest bylo definováno Erdősovo číslo (viz [5]): P. Erdős sám má číslo 0, ti, kdo napsali článek s P. Erdősem, mají číslo 1, ti, kdo publikovali článek s nějakým spoluautorem P. Erdőse, mají číslo 2 atd. Existuje odhad, že 90 % aktivních matematiků má Erdősovo číslo menší než 8. Erdősovu aktivitu také dokládá pěkná řádka vět a hypotéz, které nesou jeho jméno [4]. A ještě jedno prvenství



mu nelze upřít. Snad o žádném jiném matematikovi nekoluje tolik citátů jako právě o P. Erdősovi.

Citáty Erdősových výroků (budou značeny *kurzívou*) a výroků jeho přátel a kolegů (označíme je „uvozovkami") lze popsat téměř celý jeho život. Budou často ponechány v angličtině, protože právě tak je dokonce i maďarští matematici citují.

1. Zázračné dítě

Již od útlého dětství věděl Paul Erdős[6], že bude matematikem. Jako čtyřletý ovládal záporná čísla. Přátele své matky bavil tím, že z hlavy podle jejich data narození počítal, kolik vteřin jsou na světě. Když mu bylo 10 let, otec mu ukázal Eukleidův důkaz tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho. Paul byl okouzlen. Později jej zase nadchl Cantorův důkaz nespočetnosti reálných čísel. Často pak své dopisy končil formulkou: *Let the spirit of Cantor be with you.* Případně zkrácenou verzí: *C. be with you.* Právě hledání

[6] Maďarská verze jména Pavel je Pál, jelikož ale Paul Erdős strávil většinu života na cestách, je známý pod anglickou verzí svého jména.

elegantních důkazů se stalo smyslem jeho života.

Poprvé okouzlil P. Erdős maďarské matematické kruhy jako osmnáctiletý. Jeho jednoduchý důkaz Bertrandova postulátu, že mezi každým přirozeným číslem a jeho dvojnásobkem leží prvočíslo, zdaleka předčil původní Čebyševův důkaz z roku 1850. Erdősův úspěch se dostal do povědomí anglicky mluvících matematiků ve formě veršíku od Nathana Finea:

"Chebyshev said it, and I say it again
There is always a prime between n and $2n$."

2. Matka

Paula spojovalo s matkou velmi silné pouto. Paulovy dvě sestry totiž zemřely na spálu, když byla matka s malým Paulem v porodnici. Matka se ze ztráty nikdy nevzpamatovala a o Paula se vždy přehnaně bála. Není divu, že byl Paul nesamostatný. Traduje se, že si až do 11 let neuměl zavázat tkaničky a že si poprvé namazal chleba máslem v Anglii na svých doktorských studiích.

Po uvolnění železné opony od roku 1964 jej matka (tehdy 84-letá) doprovázela na cestách, a to až do své smrti v roce 1971. Jedli spolu, Paul ji držel za ruku, když usínala, a z její smrti se jen pomalu vzpamatovával. Ještě 5 let po smrti matky se odehrála scéna, kdy se přítel Paula ptá, jak se má, a Paul říká, že se cítí smutný, protože mu zemřela matka ...

Matka byla také žárlivá, kdykoliv se Paul vyskytoval v blízkosti nějaké ženy. Neměla ale důvod, protože Paulovi podle jeho slov *fyzická rozkoš působila bolest*, a tak se nikdy neoženil ani neměl žádný vážný vztah.

Matka i otec byli středoškolskými profesory matematiky a mohli do jejích tajů malého Paula zasvěcovat. Otec jej také naučil francouzsky a anglicky, ale jelikož měl znalosti pouze teoretické, zůstal Paulovi po celý život silný přízvuk.

3. Anonymous Group

Maďarští matematici se scházeli ve 30. letech pravidelně v budapešťském parku u sochy Anonyma, kronikáře 12. století; začalo se jim proto přezdívat „Anonymous Group". Bavili se hlavně o matematice, ale tu a tam sklouzla řeč i na politiku, což bylo ve fašizujícím se Maďarsku s antisemitsky založeným M. Horthym v čele nebezpečné (všichni členové skupiny byli totiž židovského původu). Tehdy vytvořil Paul svůj speciální jazyk – „erdőštinu" – který se ujal v matematických kruzích po celém světě. Komunisté byli *people on the long wavelength*, protože červené světlo má dlouhou vlnovou délku. Také měl speciální termín pro děti a vše malé *epsilon*, pro ženy *bosses* a pro muže *slaves*, pro hudbu *noise* a pro alkohol *poison*. *Give me an epsilon of poison* byla žádost o kapku vína. A na otázku, kdy se chlapec stává mužem, odpovídal: *An epsilon becomes a slave when he starts running after bosses*. Je jasné, že v prostředí, kde na jeho originální slovník nebyli zvyklí, se dostal nejednou do potíží.

V tomto období se stala členkou skupiny nadaná Esther Kleinová a přišla s následující úlohou a rovnou i jejím elegantním řešením.

Úloha 1: „Kolik bodů, z nichž žádné 3 neleží v přímce, je potřeba zadat, aby některé 4 z nich tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku?" [7] Problém kroužek matematiků zaujal, zobecnili jej a zanedlouho vyrukovali s hypotézou, že $2^{n-2}+1$ bodů vždy stačí, abychom mezi nimi našli vrcholy konvexního n-úhelníku. Dosud není hypotéza dokázána, ale hned po několika týdnech našel György Szekeres počet bodů (samozřejmě větší než $2^{n-2}+1$) postačující pro existenci konvexního n-úhelníku. Tím si získal ruku Esther a díky tomu P. Erdős nazval úlohu *Happy-End Problem* a tak také vstoupila do povědomí matematiků. György měl štěstí, že Paul neměl zájem o ženy, jinak by mu asi Esther musela dát košem, protože P. Erdős vzápětí podstatně Szekeresovu postačující podmínku vylepšil. Šlo o první Erdősův výsledek z Ramseyovy teorie - oblasti matematiky, jejímž byl průkopníkem a již obohatil nesčetnými výsledky.

[7] Konvexní je takový útvar, který s libovolnými dvěma body obsahuje i úsečku, která je spojuje. Např. úsečka, přímka, kruh, trojúhelník jsou konvexní útvary v rovině.

4. Na cestách

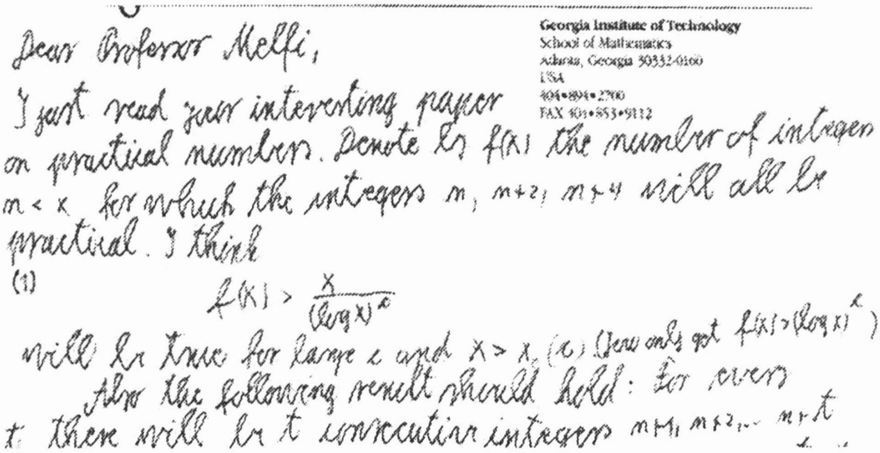
Rok po vyřešení problému s happy-endem odjíždí P. Erdős na postdoktorandský stipendijní pobyt do Anglie (je mu teprve 21 let – vysokoškolská a doktorská studia absolvoval současně!). Antisemitské Maďarsko pro něj není bezpečné. Podle slov Bély Bollobáse[8]: „Od roku 1934 spí Erdős jen výjimečně 7 dní ve stejné posteli.“ Dá se říci, že P. Erdős zasvětil matematice život: neměl ženu ani děti a říkával, že *majetek je na obtíž* (cestoval s otrhaným kufrem naplněným sotva z třetiny a oranžovou igelitkou budapešťského obchoďáku Centrum Áruház). Vysloužil si tím přezdívku „matematický mnich“.

Erdősovým stylem práce bylo zaklepat na dveře (často bez předchozího ohlášení), prohlásit *my brain is open* a vrhnout se s daným matematikem do intenzivní práce. Po několika dnech se pak odebral dál se slovy *another roof, another proof*. Kvůli své naprosté nesamostatnosti nebyl snadným hostem a manželky matematiků bývaly zpravidla po těch několika dnech pečování o Paula totálně vyčerpané. Stejně tak bývali vyčerpaní i jeho kolegové, protože P. Erdős příliš mnoho nespal, časně ráno už svého hostitele budil nesnesitelným rámusem v kuchyni či koupelně a ohlašoval tím nástup k další intenzivní práci. Denně také P. Erdős volal mnoha známým matematikům a řešil s nimi matematické problémy po telefonu. Nikdy se nestaral o to, kolik je právě na druhém konci světa hodin. S oblibou tvrdil *I am reality*. A psal dopisy, průměrně 4 až 5 denně. Typický začátek dopisu vidíme na obrázku.

Na cestách mu útěchu přináší intenzivní práce. V Anglii se věnuje i nadále Ramseyově teorii, která – zjednodušeně řečeno – hledá minimální počet prvků, jež zaručují nějakou vlastnost. Klasickým příkladem je Party Problem.

Úloha 2: „Jaký je nejmenší možný počet hostů na narozeninové oslavě, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje trojice, kde

[8] Béla Bollobás je maďarský matematik, který byl vítězem všech maďarských matematických soutěží od svých 14 let. V 17 letech napsal první společný článek s Erdősem. Dnes se věnuje extremální teorii grafů a náhodným grafům.



Georgia Institute of Technology
School of Mathematics
Atlanta, Georgia 30332-0160
USA
404•894•2700
FAX 404•853•9112

Dear Professor Melfi,

I just read your interesting paper on practical numbers. Denote by $f(x)$ the number of integers $n < x$ for which the integers n, $n+2$, $n+4$ will all be practical. I think

(1) $$f(x) > \frac{x}{(\log x)^c}$$

will be true for large c and $x > x_0(c)$ (you only got $f(x) > (\log x)^c$)

Also the following result should hold: for every t there will be t consecutive integers $n+1, n+2, \dots n+t$ ...

každý zná každého, nebo existuje trojice, kde nikdo nezná nikoho? Ukažte, že správná odpověď je 6 osob.“ Pokud požadujeme stejnou vlastnost po čtveřicích, pak je minimální počet lidí 18. Pro pětice už se pouze ví, že minimální počet hostů je někde mezi 43 a 49 a pro šestice mezi 102 a 165. Zobecnění problému vedlo k zavedení Ramseyových čísel, jejichž vlastnosti P. Erdős s oblibou studoval. Také rád vyprávěl historku o ďáblovi, který se nás může zeptat na cokoliv, a pokud neodpovíme správně, zničí lidstvo. Jestliže se nás ďábel zeptá na minimální počet hostů pro zajištění pětice, kde každý zná každého, nebo nikdo nikoho, radí P. Erdős, aby se všichni matematici spojili a pokusili se otestovat hrubou silou všechny možnosti. Zeptá-li se ale ďábel na minimální počet hostů pro šestice, je lepší zkusit zlikvidovat ďábla, než něco počítat.

V roce 1938 se P. Erdős přesouvá do amerického Princetonu, známého ráje vědců, kde jsou odříznuti od války a nemají žádné učební povinnosti. Setkává se tu s Albertem Einsteinem, Kurtem Gödelem a Johnem von Neumannem.[9] Žádný z těchto tří vědců ale nemá Erdősovo číslo 1!

V roce 1948 se P. Erdős po letech poprvé vrací do Budapešti a s radostí zjišťuje, že jeho matka i blízký přítel Paul Turán přežili válku. Ale řada jeho přátel a příbuzných takové štěstí neměla.

[9]John von Neumann je považován za otce informatiky. Byl také maďarského původu, ale byl pravým opakem P. Erdőse. Miloval ženy, rychlá auta, mexické jídlo a byl na každém večírku nejzábavnějším společníkem.

V Maďarsku zůstává pouhé 3 měsíce. Od roku 1949 je Maďarsko pod vlivem J. V. Stalina a P. Erdős opět pendluje mezi USA a Velkou Británií a také konferencemi po celém světě. Jeho cestování se neobejde bez problémů se *Samem* (tak překřtil USA podle uncle Sam) a *Joem* (podle Josipa Stalina). Je třeba dodat, že do nejrůznějších problémů dostává P. Erdőse hlavně jeho upřímnost. U jednoho amerického pohovoru třeba řekl, že Marx jistě nebyl hlupák.

Podle P. Erdőse není žádná země na světě bez viny, a tak odmítá nabízená občanství a prohlašuje sama sebe za *světoobčana*. Na přímluvu maďarských přátel dostává v 50. letech speciální pas, který mu umožňuje vstoupit do Maďarska, kdykoliv chce. Stává se členem maďarské Akademie věd a nové členy vítá s osobitým sarkasmem: *Jsem rád, že jste se stal polobohem.*

Kniha

V roce 1940 přejmenoval P. Erdős Boha na SF (*Supreme Fascist*) a také NOGUT (*Number-One Guy Up There*). Bůh totiž v jeho očích není dobrotivý, když dopouští na Zemi takové utrpení a nespravedlnost. SF může za vše špatné: Když Paul nemůže třeba něco najít, jistě mu to schoval SF. Erdősovo krédo zní: *Každý se má chovat tak, aby držel své SF skóre nízko. A jak se SF skóre počítá? Uděláte-li něco špatného, SF má plus 2 body, neuděláte-li něco dobrého, co jste udělat mohli, SF má plus 1 bod.* On sám jde ostatním příkladem, má rád děti a pomáhá nemocným, jakmile slyší o nějaké charitativní sbírce, hned bez váhání přispívá. A často vyhledává a podporuje mladé nadané matematiky.

Nejmladším Erdősovým spoluautorem byl 14-letý Lájos Pósa. P. Erdős si jej vyzkoušel hned při prvním setkání následující úlohou (pokud ji do 10 minut vyřešíte, P. Erdős by vás přibral do svého týmu).

Úloha 3: „Proč když mezi prvními přirozenými $2n$ čísly libovolně vybereme $n+1$ z nich, budou mezi vybranými aspoň dvě nesoudělná?“[10] Některé ze zázračných dětí, např. L. Pósa, ma-

[10] Dvě přirozená čísla jsou nesoudělná, pokud nemají žádného přirozeného dělitele většího než 1.

tematicky zemřeli (erdőština), mnohé se ale staly matematickou elitou, např. B. Bollobás. Kromě vyhledávání zázračných dětí měl P. Erdős zálibu ve vypisování odměn za vyřešení otevřených matematických problémů. Odměny byly často dost vysoké a některé problémy zůstaly nevyřešené dodnes a odměnu za ně lze stále získat!

Podle P. Erdőse má SF transfinitní knihu (transfinitní vyjadřuje obrovitost této knihy a přívlastek si P. Erdős vypůjčil od svého oblíbence G. Cantora), která obsahuje všechna matematická tvrzení a jejich nejhezčí důkazy. Dobří matematici jsou ti, jejichž důkazy se podobají těm z knihy, a největší pochvala od P. Erdőse zní: *Your proof is straight from the Book.* Jakou závažnost P. Erdős knize přikládá, je cítit z jeho slov: *You don't have to believe in God, but you should believe in the Book.*

Zatímco velká část matematiků spadá do kategorie „budovatelé teorií", P. Erdős patřil do kategorie „řešitelé problémů". Rozdíl mezi A. Einsteinem a P. Erdősem je následující: „Einstein měl ve fyzice nos na centrální témata a nepodléhal žádným jiným problémům, zatímco Erdős podlehl s radostí každému zajímavému problému a mnohé z nich podlehly Erdősovi."

P. Erdős miloval přirozená čísla a rozuměl jim jako nikdo jiný. Zatímco řada matematiků u teorie čísel začíná a později se přesouvá do jiných oblastí, P. Erdős zůstal teorii čísel věrný celý život. Také miloval teorii grafů, je tvůrcem teorie náhodných grafů a extremální teorie grafů. Jeho pravděpodobnostní metoda dokazování se dnes hojně využívá v teoretické informatice. Ramseyova teorie spojuje P. Erdőse s Československem, protože celou řadu článků z této disciplíny napsal spolu s Vojtěchem Rödlem a Jaroslavem Nešetřilem. Byl ale schopen vyřešit i úlohy ze vzdálených oblastí matematiky. Stačilo, aby mu matematici dodali základní definice a dobře zformulovali problém, a po krátké době P. Erdős přišel s řešením.

6. Stáří

Slavný matematik G. H. Hardy tvrdil, že matematika je hrou mladých mužů: „Galois zemřel ve 21 letech, Abel ve 27, Riemann ve 40 .... Neznám případ, kdy by nějaký významný výsledek dokázal matematik starší 50 let.“ P. Erdős se s G. H. Hardym setkal hned při svém prvním pobytu v Anglii. Tehdy ještě nevěděl, že bude nejlepším protipříkladem k Hardyho domněnce. Poznamenejme ovšem, že pracovat 19 hodin denně, což bylo Erdősovo tempo po smrti matky, tedy 25 posledních let života, mu z velké části umožňovala káva a amfetaminy. S oblibou citoval výrok svého kolegy a přítele Alfréda Rényiho: „Matematik je stroj, který vyrábí z kafe teorémy.“ Další z Paulových přátel-matematiků, Paul Turán, po vypití kávy v USA prý vyslovil: „Slabé kafe je dobré jen na lemmata.“[11] Na rady přátel, aby zvolnil své pracovní tempo, P. Erdős odpovídal: *Na odpočinek je čas v hrobě.* A stejně břitce popsal známky mužské senility: *Nejprve muž zapomíná své teorémy, poté si zapomíná zapnout poklopec a nakonec si zapomíná poklopec rozepnout.* Senilita ale Paula Erdőse nepostihla, pálilo mu to až do smrti a zemřel na matematické konferenci. A abychom nekončili v ponurém duchu, zanechal nám P. Erdős s ironií sobě vlastní epitaf s nápisem: *Konečně už nehloupnu.*

Řešení úloh

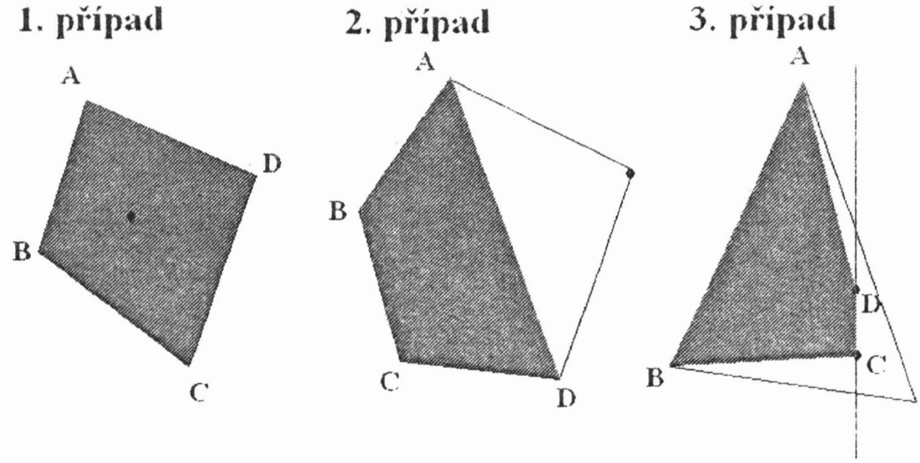
- **Úloha 1**: „Kolik bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, je potřeba zadat, aby některé čtyři z nich tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku?“

  Je snadné si rozmyslet, že 4 body nestačí (mohou vytvořit vrcholy „vykousnutého“ čtyřúhelníka). Esther Kleinová elegantně dokázala, že pět bodů již stačí. Mohou totiž nastat pouze tři situace, viz obrázek:

  1. Jeden z bodů leží uvnitř konvexního obalu ostatních.[12] Pak je tento konvexní obal hledaným konvexním čtyřúhelníkem.

[11] Lemma je méně důležité matematické tvrzení. Většinou hraje pomocnou roli při důkazu matematické věty, slouží k zpřehlednění důkazu.

[12] Konvexní obal nějakého konečného počtu bodů je nejmenší konvexní útvar obsahující dané body.



Obrázek 1

2. Konvexní obal všech pěti bodů tvoří konvexní pětiúhelník (tedy žádný z bodů neleží uvnitř konvexního obalu ostatních). Pak libovolné čtyři z nich tvoří vrcholy hledaného konvexního čtyřúhelníka.
3. Dva z bodů leží uvnitř konvexního obalu ostatních. Spojíme-li je přímkou, pak na jedné straně od ní budou ležet dva body. Tyto dva body spolu s dvěma body na přímce jsou vrcholy hledaného konvexního čtyřúhelníka.

- **Úloha 2**: „Jaký je nejmenší možný počet hostů na narozeninové oslavě, má-li být zajištěno, že mezi nimi existuje trojice, kde každý zná každého, nebo existuje trojice, kde nikdo nezná nikoho? Ukažte, že správná odpověď je šest osob."

Snadno si rozmyslíme, že pět hostů nestačí. Uvažujme oslavu se šesti hosty a ty si představme jako body. Pokud se znali již před oslavou, spojíme je úsečkou. Pokud se na oslavě vidí prvně, nespojíme je. (Definovali jsme vlastně graf.) Vyberme libovolný bod. Jistě je buď spojen s aspoň třemi ostatními, nebo není spojen s aspoň 3 ostatními. Předpokládejme, že nastal první případ (druhý by se ošetřil analogicky). Uvažujme tedy čtveřici bodů, kde náš vybraný bod je spojen se všemi ostatními. Pak buď některá dvojice ze zbylých tří bodů je spojena úsečkou a spolu s vybraným bodem tvoří hledanou trojici hostů, kde každý znal každého již před oslavou. Nebo žádná dvojice ze zbylých tří bodů není spojena úsečkou a my jsme tedy našli tři hosty, kteří se vidí prvně.

- **Úloha 3**: „Proč mezi prvními přirozenými $2n$ čísly, když libovolně vybereme $n + 1$ z nich, budou mezi vybranými aspoň dvě nesoudělná?“

  Mezi libovolnými $n + 1$ čísly budou určitě alespoň dvě po sobě jdoucí a ta jsou nesoudělná.

Literatura

[1] Csicsery G.-P., *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdős*, DVD, Springer, Berlin, 1999.

[2] Hoffman P., *The Man Who Loved Only Numbers. The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion, New York, 1998.

[3] Schechter B., *My brain is open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, New York, 2000

[4] Wikipedia (The free encyclopedia): Paul Erdős [online]. Poslední revize 2. června 2010 [cit. 5. 6. 2010] http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdős

[5] The Erdős Number Project [online]. Poslední revize 30. dubna 2010 [cit. 5. 6. 2010] http://www.oakland.edu/enp/

Ing. Ľubomíra Balková, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
Trojanova 13, Praha 2 120 00
e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz