Jindřich Bečvář

Několik poznámek o ekvivalenci matematických vět

Učitel matematiky, Vol. 19 (2011), No. 3, 165–171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150367

NĚKOLIK POZNÁMEK O EKVIVALENCI MATEMATICKÝCH VĚT

JINDŘICH BEČVÁŘ

Tento příspěvek bezprostředně navazuje na články Vlastimila Dlaba [D], Pavla Leischnera [L] a Františka Kuřiny [K], které byly otištěny v 19. ročníku Učitele matematiky.

V. Dlab [D] ukázal, že Pythagorova věta a kosinová věta, která je jejím zobecněním, jsou ekvivalentní. Poznamenal, že takováto, na první pohled překvapivá zjištění, vedou k důkladnému porozumění elementární matematice.

P. Leischner [L] **popřel**, že by tyto dvě věty byly ekvivalentní. Uvedl, že kosinová věta není ekvivalentní s Pythagorovou větou, ale s tzv. pythagorejskou ekvivalencí.

F. Kuřina [K] naopak **potvrdil**, že je Pythagorova věta s kosinovou větou ekvivalentní, uvedl však, že tuto skutečnost nepovažuje za překvapivou. Ve svém článku uvažoval „jiné typy ekvivalence" a zdůraznil, že Pythagorova a kosinová věta **nejsou ekvivalentní z hlediska významu**, a že důkladné porozumění znamená *rozlišení typů ekvivalence tvrzení.*

Jak tomu tedy opravdu je?

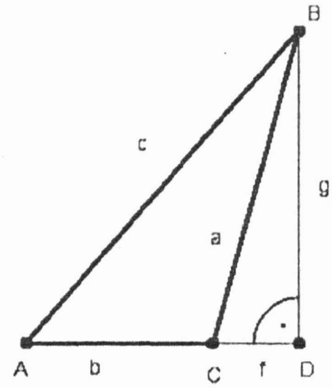
* * *

V první řadě je třeba zdůraznit, že **Pythagorova věta, obrácená Pythagorova věta a tedy i pythagorejská ekvivalence jsou navzájem ekvivalentní tvrzení**. Dokážeme to ve dvou následujích odstavcích.

1. Předpokládejme, že platí Pythagorova věta. Dokážeme obrácenou Pythagorovu větu. Jestliže v trojúhelníku ABC, kde $|\sphericalangle ACB| \geq 90°$ (viz obr. 1), je $c^2 = a^2 + b^2$, potom je podle Pythagorovy věty (dvakrát použité)

$$c^2 = (b+f)^2 + g^2 = b^2 + 2bf + f^2 + g^2 = b^2 + 2bf + a^2,$$

a tedy $2bf = 0$, tj. $f = 0$. Trojúhelník ABC je tedy pravoúhlý. Je-li naopak $|\sphericalangle ACB| \leq 90°$, postupujeme obdobně.



Obr. 1

2. Předpokládejme, že platí obrácená Pythagorova věta. Dokažme Pythagorovu větu. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami a, b. Zvolme úsečku délky c, pro niž je $c^2 = a^2 + b^2$. Trojúhelník se stranami a, b, c je podle obrácené Pythagorovy věty pravoúhlý a podle věty *sus* je shodný s trojúhelníkem ABC.

Pythagorova věta je tedy ekvivalentní s obrácenou Pythagorovou větou i s tzv. pythagorejskou ekvivalencí. Je rovněž ekvivalentní s kosinovou větou a s větou o úhlopříčkách rovnoběžníku, jak bylo dokázáno v Dlabově článku [D].

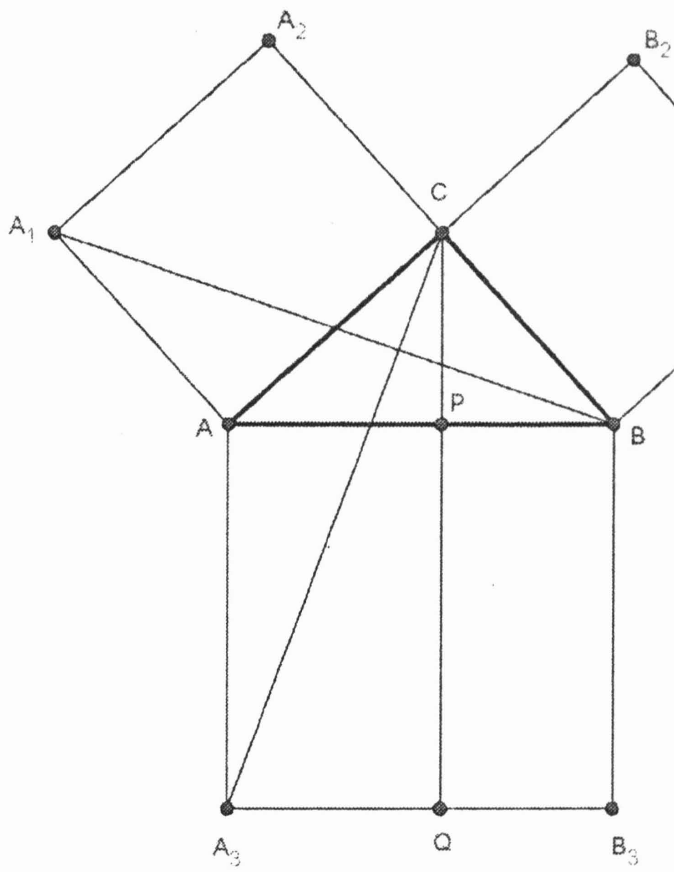
Poznamenejme ještě, že důkaz Pythagorovy věty uvedený v Eukleidových *Základech*[3], které byly sepsány kolem roku 300 př. Kr., je koncipován tak, že si bystřejší čtenář uvědomí, že[4]

- v pravoúhlém trojúhelníku ABC je $c^2 = a^2 + b^2$,
- v ostroúhlém trojúhelníku ABC je $c^2 < a^2 + b^2$,
- v tupoúhlém trojúhelníku ABC je $c^2 > a^2 + b^2$

[3]Pythagorova věta je 47. větou, obrácená Pythagorova věta 48. větou první knihy *Základů*, viz [ES], resp. [EV].

[4]Předpokládáme pravý, resp. tupý úhel při vrcholu C a obvyklé značení: proti vrcholu C je strana c atd.

a dojde tak přímo k pythagorejské ekvivalenci.



Obr. 2

Připomeňme stručně Eukleidův důkaz (viz obr. 2). Trojúhelníky ABA_1, AA_3C jsou shodné. Obsah trojúhelníku ABA_1 je roven polovině obsahu čtverce ACA_2A_1 (výška příslušná k základně AA_1 má stejnou velikost jako úsečka AC). Obsah trojúhelníku AA_3C je roven polovině obsahu obdélníku $APQA_3$. Obsah čtverce ACA_2A_1 je tedy roven obsahu obdélníku $APQA_3$. Obdobně zjistíme, že obsah čtverce BCB_2B_1 je roven obsahu obdélníku $BPQB_3$. Součet obsahů čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku je tedy roven obsahu čtverce nad přeponou.

Předpokládejme nyní, že jsou úhly při vrcholech A, B ostré, a uvědomme si, co se stane, bude-li úhel při vrcholu C ostrý (tupý). Výška trojúhelníku ABA_1 příslušná základně AA_1

bude menší (větší) než strana čtverce ACA_2A_1 a obsah trojúhelníku ABA_1, který je roven polovině obsahu obdélníku $APQA_3$ bude tedy menší (větší) než polovina obsahu čtverce ACA_2A_1. Součet obsahů čtverců ACA_2A_1 a BCB_2B_1 bude větší (menší) než obsah čtverce ABB_3A_3.

* * *

V. Dlab uvedl v článku [D] důkaz ekvivalence Pythagorovy věty a kosinové věty. Ukázal tak, že mohou být ekvivalentní dvě tvrzení, z nichž druhé je obecnější než první.[5] Tato skutečnost může být – a opravdu je – pro mnohé studenty i učitele (středoškolské i vysokoškolské) **překvapivá a matoucí**, jak názorně předvedl P. Leischner ve svém článku [L]; přehnaný důraz na formální stránku věci (pravdivostní tabulky, věta o průmětech apod.) mu situaci zatemnil.[6] Zbytečně komplikované úvahy ho přivedly k chybnému závěru, totiž k popření ekvivalence Pythagorovy věty a pythagorejské ekvivalence.[7]

* * *

Obraťme se nyní k článku [K], v němž je jasný a jednoduchý matematický pojem ekvivalence zatemněn lingvistickou akrobacií. F. Kuřina totiž rozlišuje čtyři významy pojmu ekvivalence. Budeme je komentovat ve čtyřech následujících odstavcích.

A. Kuřina se mýlí, když píše, že *ekvivalence je logická spojka výrokové logiky* ... ([K], str. 96). Ekvivalence **není** *logická spojka výrokové logiky*; touto logickou spojkou je *symbol ekvivalence* nebo *znak ekvivalence* (např. symboly $\equiv$, $\Longleftrightarrow$, resp. jejich slovní vyjádření *tehdy a jen tehdy*, *právě tehdy* apod.).

---

[5] V předchozím jsme viděli, že mohou být ekvivalentní i dvě tvrzení, která mají tvar implikace $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}$ (Pythagorova věta), $\mathfrak{A} \Longleftarrow \mathfrak{B}$ (obrácená Pythagorova věta). Obě tato tvrzení jsou tedy ekvivalentní i s tvrzením $\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathfrak{B}$ (pythagorejská ekvivalence).

[6] Leischnerem uvedená *Věta o průmětech* ([L], str. 91) je triviálním důsledkem definice kosinu.

[7] Navíc je úloha, kterou P. Leischner uvedl v závěru svého článku [L], příkladnou cestou vedoucí ke znechucení matematikou.

B. Ekvivalencí **je** binární relace na nějaké množině (resp. třídě), která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, jak uvádí F. Kuřina ([K], str. 96). Odpovídá jí disjunktní rozklad této množiny (resp. třídy) na tzv. třídy ekvivalence.[8] Právě takovou ekvivalencí je *ekvivalence matematických vět*, o níž píše V. Dlab v článku [D]. Pythagorova věta, obrácená Pythagorova věta, pythagorejská ekvivalence, kosinová věta a věta o úhlopříčkách v rovnoběžníku jsou navzájem ekvivalentní tvrzení, leží tedy ve stejné třídě příslušného disjunktního rozkladu. Dalším příkladem ekvivalentních tvrzení jsou princip dobrého uspořádání a princip matematické indukce.

C. Třetí význam pojmu ekvivalence podle článku [K] – *ekvivalence vět v deduktivním systému* – spadá pod význam předchozí.[9]

D. Hovořit o ekvivalenci matematických vět *z hlediska významu* – viz [K], str. 97 – je umělé. Takováto „ekvivalence" se nedá exaktně definovat ani přesněji vymezit, a proto **do matematiky nepatří**. Výrok *Pythagorova věta má význam pouze pro pravoúhlé trojúhelníky, kosinová věta má význam „obecný"* ([K], str. 97) je zcela banální.[10] Kuřina zde význam matematických vět rozlišuje *podle jejich předpokladů* (pravoúhlý trojúhelník, libovolný trojúhelník). V následujícím však rozlišuje význam matematických vět spíše *podle jejich tvrzení*. Píše totiž toto ([K], str. 97): *Věta Pythagorova a věta k ní obrácená jsou ekvivalentní z hlediska platnosti, nejsou však ekvivalentní z hlediska významu. První můžeme použít k výpočtu délky přepony, druhou k rozhodnutí, zda je trojúhelník pravoúhlý.*[11] Tato úvaha je opět zcela banální. Navíc měl F. Kuřina patrně na mysli nikoli *význam*, ale *užití* matematických

---

[8] Poznamenejme, že slovo třída jsme zde užili ve dvou různých významech.

[9] Je pochopitelné, že o ekvivalenci matematických vět hovoříme v rámci zvolené matematické teorie, axiomatického systému apod. (eukleidovská geometrie, Lobačevského geometrie, Zermelova-Fraenkelova axiomatika apod.).

[10] V. Dlab píše zcela srozumitelně a jednoduše, aniž by užíval nedefinovaný a nejasný pojem „ekvivalence z hlediska významu": *Na střední škole by měla být kosinová věta chápána jako zobecnění věty Pythagorovy; pro studenty by mělo být motivujícím zjištěním, že jsou tyto dvě věty přitom ekvivalentní.* ([D], str. 12–13)

[11] Lze uvést i jiné „významy". V prvním případě např. výpočet délky odvěsny, ve druhém např. vytyčení pravého úhlu v terénu.

vět. Zkušenější matematik však ví, že mnohé matematické věty čekají na svá užití (někdy velmi překvapivá) celou řadu let, desetiletí či století. Jejich (nedefinovaný) „význam" v Kuřinově smyslu se tedy během doby mění. Kuřinovy úvahy mají s matematikou málo společného; patří do žánru nepříliš plodného „povídání o matematice".

I když pojem *ekvivalence matematických vět podle významu* nebyl definován, z kontextu a uvedených příkladů se zdá být jasné, že ekvivalentní věty v tomto smyslu musí být v podstatě „totožné". Musí mít stejné předpoklady, stejná tvrzení, lišit se mohou pouze „literárním ztvárněním", užitou symbolikou, vyjádřením v různých jazycích (čeština, angličtina atd.).[12] Takováto ekvivalence však postrádá smyslu.

* * *

V matematice (ale i ve vyučování matematice) bychom měli usilovat o přesné a současně srozumitelné vyjadřování. Čím jednodušeji, úsporněji a srozumitelněji se vyjadřujeme (ústně i písemně), tím méně „nebezpečí" hrozí nám i našim studentům.

Studenty (a zejména budoucí učitele) bychom měli vést k tomu, aby dobře vnímali strukturu matematických vět, aby věděli, že tvrzení věty lze užít jen tehdy, jsou-li splněny její předpoklady. Pochopí-li tento základní fakt, budou mít jasno i v tom, kdy lze danou větu použít, a kdy ne. Pythagorovu větu budou aplikovat na pravoúhlý trojúhelník a kosinovou větu na trojúhelník, který pravoúhlý není.

Nejdůležitějším faktorem v úspěšné výuce kteréhokoliv předmětu je učitel, který svému předmětu dokonale rozumí. A totéž – a především – platí i pro ty, kdo vychovávají budoucí učitele. Zde vidím velký úkol pro didaktiku matematiky při výchově budoucích učitelů a při jejich následném dalším vzdělávání.

---

[12] *Tvrzení* `Rovnice má právě dva kořeny` *je ekvivalentní tvrzení* `Existují právě dvě čísla, která vyhovují rovnici.` ([K], str. 97)

Literatura

[D] Dlab V., Důkladné porozumění pojmu ekvivalence, *Učitel matematiky* **19**(2010/11), 9–13.

[ES] Eukleides, *Eukleidovy Základy (Elementa)*, přeložil František Servít, Jednota českých mathematiků, Praha, 1907.

[EV] Eukleides, *Základy. Knihy I–IV*, komentované Petrem Vopěnkou, Prameny evropské vzdělanosti 1, Nymburk, 2007.

[K] Kuřina F., O vyjadřování v matematice, *Učitel matematiky* **19**(2010/11), 95–98.

[L] Leischner P., Silvestrovské rozjímání o ekvivalenci geometrických vět, *Učitel matematiky* **19**(2010/11), 89–94.

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakzúlta Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Jindrich.Becvar@mff.cuni.cz