Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 4, 237–252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149558

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 25. – 28. 3. 2012 se v Hradci Králové uskutečnilo celostátní kolo 61. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2012–2013.

Úlohy celostátního kola 61. ročníku matematické olympiády

Hradec Králové 25. – 28. března 2012

1. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo.

(Aleš Kobza)

Řešení. Zadaný výraz lze jednoduchou úpravou rozložit na součin:

$$n^4 - 3n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 9n^2 = \left(n^2 + 3\right)^2 - (3n)^2 = \\ = \left(n^2 + 3n + 3\right) \cdot \left(n^2 - 3n + 3\right).$$

Aby součin dvou celých čísel byl prvočíslem p, musí být jeden z činitelů roven 1 nebo -1 (a druhý p, resp. $-p$). Diskriminanty obou kvadratických trojčlenů jsou však $(\pm 3)^2 - 4 \cdot 4 = -3$, tedy záporné, takže oba trojčleny nabývají jen kladné hodnoty. Vzhledem k tomu stačí uvažovat jen kvadratické rovnice

$$n^2 + 3n + 3 = 1 \qquad \text{a} \qquad n^2 - 3n + 3 = 1.$$

Řešením první z nich jsou čísla $n = -1$ a $n = -2$, pro něž druhý činitel nabývá hodnot 7 a 13, což jsou prvočísla.

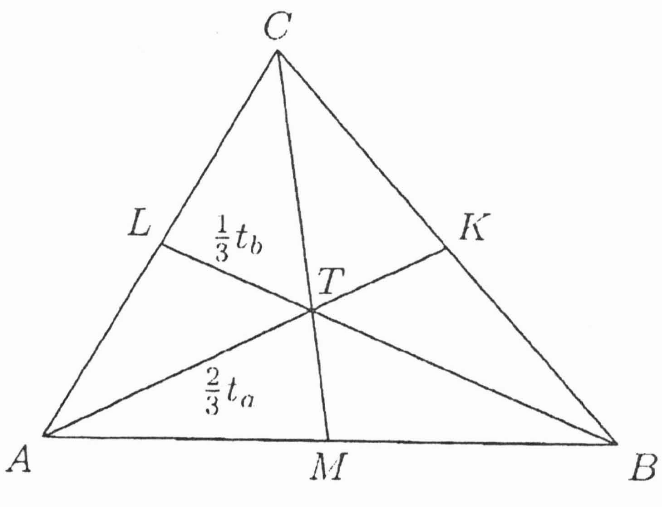
Řešením druhé rovnice jsou $n = 1$ a $n = 2$, pro něž první činitel opět nabývá prvočíselných hodnot 7 a 13.

Závěr. Zadaný výraz je prvočíslem, právě když $n \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

2. Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$, $t_c \leq 4$. *(Pavel Novotný)*

Řešení. Označme T těžiště trojúhelníku ABC a K, L, M středy stran BC, CA, AB. Těžnice rozdělují trojúhelník ABC na šest menších trojúhelníků se stejným obsahem: Například trojúhelník AMT má stranu $|AM| = \frac{1}{2}c$ a jeho výška na stranu AM má velikost $\frac{1}{3}v_c$, takže $S_{AMT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}v_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{6}S_{ABC}$, a stejný výsledek analogicky dostaneme i pro zbylých pět trojúhelníků.

Daná úloha je tedy ekvivalentní úloze určit největší možný obsah jednoho ze šesti menších trojúhelníků — výsledek stačí vynásobit šesti.



Obr. 1

Uvažujme například trojúhelník ATL (viz obr. 1). Pro jeho dvě strany platí

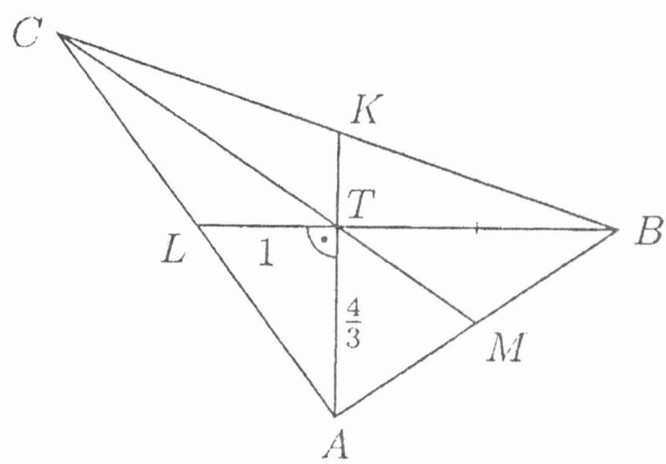
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a \leq \frac{4}{3}, \qquad |TL| = \frac{1}{3}t_b \leq 1.$$

Proto pro jeho obsah dostáváme

$$S_{ATL} = \frac{1}{2}|AT| \cdot |TL| \cdot \sin|\sphericalangle ATL| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Tím jsme dokázali, že obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice splňují dané nerovnosti, nemůže být větší než $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Přitom rovnost $S_{ATL} = \frac{2}{3}$ (tj. $S_{ABC} = 4$) nastane, právě když $t_a = 2$, $t_b = 3$ a $|\sphericalangle ATL| = 90°$.[13]

Trojúhelník ABC s těmito vlastnostmi dovedeme sestrojit: Nejdříve narýsujeme pravoúhlý trojúhelník ATL, v němž známe délky obou odvěsen $|AT| = \frac{4}{3}$, $|TL| = 1$, a následně sestrojíme bod C jako obraz bodu A ve středové souměrnosti se středem L a bod B jako obraz bodu L ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2 (viz obr. 2). Zbývá už jen ověřit, že v takovémto trojúhelníku ABC platí $t_c \leq 4$.



Obr. 2

Délku t_c lze vypočítat různými způsoby. Například v pravoúhlém trojúhelníku ABT má přepona AB podle Pythagorovy věty délku

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |TB|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

takže velikost poloměru Thaletovy kružnice nad průměrem AB je

$$|MT| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

[13]Stejný výsledek snadno dostaneme i bez využití funkce sinus: Pro výšku v na stranu AT v trojúhelníku ATL zřejmě platí $v \leq |TL|$, takže $S_{ATL} = \frac{1}{2}v|AT| \leq \frac{1}{2}|TL||AT|$, přičemž rovnost platí, právě když $AT \perp TL$.

Odtud $t_c = 3|MT| = \sqrt{13} < 4$.[14]

Závěr. Největší možný obsah trojúhelníku ABC je 4.

3. Dokažte, že mezi libovolnými 101 reálnými čísly existují dvě čísla u a v, pro něž platí

$$100\,|u-v|\cdot|1-uv| \le (1+u^2)(1+v^2).$$

(Pavel Calábek)

Ekvivalentními úpravami zadané nerovnosti (s využitím toho, že výraz $1+x^2$ je kladný pro každé reálné x) dostaneme

$$\begin{aligned} 100\,|(u-v)\cdot(1-uv)| &\le \left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right), \\ 100\,\left|u-v-u^2v+uv^2\right| &\le \left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right), \\ \left|u(1+v^2)-v(1+u^2)\right| &\le \frac{1}{100}\left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right), \\ \left|\frac{u}{1+u^2}-\frac{v}{1+v^2}\right| &\le \frac{1}{100}. \end{aligned} \tag{1}$$

Všechny hodnoty funkce

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

leží v intervalu $\left\langle -\frac12, \frac12 \right\rangle$, protože pro libovolné reálné číslo x platí

$$|x| = \sqrt{1\cdot x^2} \le \frac{1+x^2}{2} \quad \text{neboli} \quad \frac{|x|}{1+x^2} \le \frac12.$$

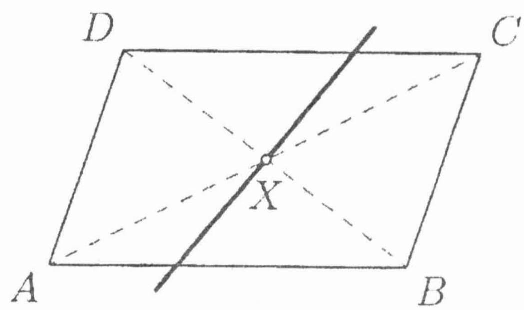
Rozdělme interval $\langle -\frac12, \frac12 \rangle$ o délce 1 rovnoměrně na sto intervalů o délce $\frac{1}{100}$. Podle Dirichletova principu mezi libovolnými 101 reálnými čísly najdeme dvě čísla u, v taková, že $f(u)$, $f(v)$ leží v témže

[14] Pokud si nevšimneme Thaletovy kružnice nad AB, můžeme postupovat i tak, že z pravoúhlých trojúhelníků ATL a BTK dopočítáme přepony, které jsou polovinami stran b, a trojúhelníku ABC: $\frac12 b = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac53$, $\frac12 a = \sqrt{4+\frac49} = \frac23\sqrt{10}$. Tedy $a = \frac43\sqrt{10}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac23\sqrt{13}$ a délku těžnice vypočteme podle známého vzorce $t_c = \frac12\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

intervalu. Pro tuto dvojici zřejmě platí $|f(u) - f(v)| \leq \frac{1}{100}$, což je právě nerovnost (1), která je ekvivalentní se zadanou nerovností.

4. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X. Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce. *(Vojtech Bálint)*

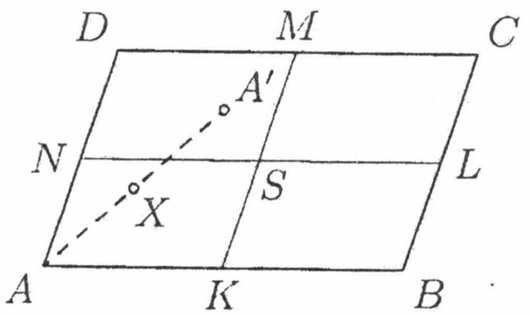
Řešení. Protože součet obsahů obou částí, na které přímka dělí rovnoběžník $ABCD$, je stále stejný, budou se nejvíce lišit, právě když menší z obsahů bude nejmenší možný. Řešení začneme pozorováním, že pokud je bod X středem rovnoběžníku $ABCD$, dělí každá přímka, která jím prochází, rovnoběžník na dvě části se stejným obsahem. Obě části jsou totiž v takovém případě shodné — jedna je obrazem druhé ve středové souměrnosti podle středu X (obr. 3). V tomto případě je každá přímka procházející bodem X řešením úlohy.



Obr. 3

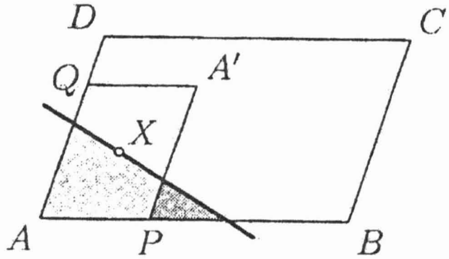
Středovou souměrnost využijeme i při obecné poloze bodu X. Označme postupně K, L, M, N středy stran AB, BC, CD, DA a S střed rovnoběžníku $ABCD$. Předpokládejme nejprve, že bod X leží uvnitř rovnoběžníku $AKSN$ (to znamená, že bod A', který je obrazem bodu A ve středové souměrnosti podle X, leží uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, obr. 4).

Bodem A' veďme rovnoběžky se stranami rovnoběžníku a jejich průsečíky se stranami AB a AD označme P a Q. Čtyřúhelník $APA'Q$ je zřejmě rovnoběžník, jehož středem je bod X. Proto

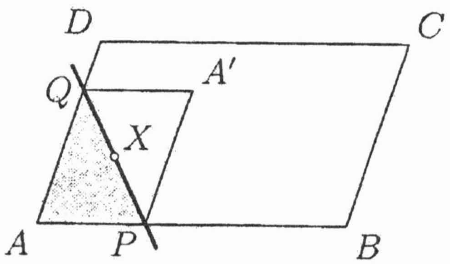


Obr. 4

každá přímka procházející bodem X rozděluje $APA'Q$ na dva útvary stejného obsahu. Každý z těchto dvou útvarů přitom patří do jiné ze dvou částí, na něž uvedená přímka zároveň rozděluje rovnoběžník $ABCD$ (viz obr. 5a). To znamená, že ani jedna ze dvou částí rovnoběžníku $ABCD$ nemá obsah menší než polovina obsahu rovnoběžníku $APA'Q$. Nejmenšího obsahu menší části proto dosáhneme, když kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $APA'Q$ nebude tato část obsahovat už žádný jiný bod daného rovnoběžníku, což nastane právě v případě, kdy dělící přímkou bude přímka PQ (viz obr. 5b).



Obr. 5a

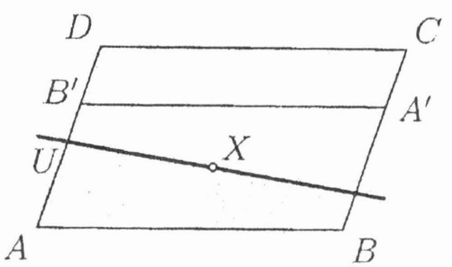


Obr. 5b

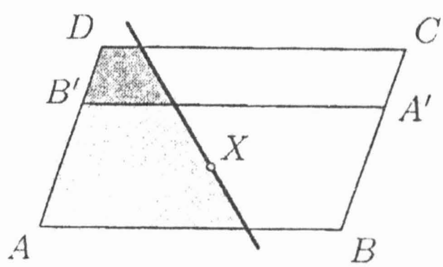
Jestliže bod X leží uvnitř rovnoběžníku $KBLS$, $SLCM$ či $NSMD$ (viz obr. 4), sestrojíme dělící přímku obdobným postupem: Pomocí obrazu bodu B, C či D ve středové souměrnosti podle X sestrojíme menší rovnoběžník, který bude celý ležet uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, bude mít střed X a dvě jeho strany budou ležet na stranách původního rovnoběžníku. Rozdělující přímkou pak musí být jedna z jeho úhlopříček, která oddělí jeho polovinu od zbytku rovnoběžníku $ABCD$.

Zbývá vyšetřit případ, kdy bod X leží uvnitř jedné z úseček KM, NL (mimo střed rovnoběžníku $ABCD$). I v této situaci umíme sestrojit menší rovnoběžník, který celý leží v rovnoběžníku $ABCD$, bod X je jeho středem a strany (tentokrát až tři) má na stranách původního rovnoběžníku.

Jestliže X leží uvnitř úsečky KS, je takovým rovnoběžníkem $ABA'B'$, přičemž A', B' jsou obrazy bodů A, B ve středové souměrnosti podle X. I v tomto případě musíme dělící přímku bodem X vést tak, aby jedna z částí rovnoběžníku $ABCD$ neobsahovala kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $ABA'B'$ nic jiného. Je zřejmé, že vyhovující bude právě každá přímka UX, kde U je libovolný bod úsečky AB' (viz obr. 6a,b).



Obr. 6a



Obr. 6b

Analogicky najdeme dělící přímky v případě, že X leží uvnitř některé z úseček SM, NS či SL.

Závěr. Jestliže X je středem rovnoběžníku $ABCD$, je řešením libovolná přímka procházející bodem X. Jestliže X leží mimo úsečky KM, NL, je řešením jediná přímka. Jestliže X leží uvnitř některé z úseček KS, SM, NS, SL, je řešením nekonečně mnoho přímek. V každém z těchto případů je jejich konstrukce zřejmá z předešlých úvah.

5. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda.

(Ján Mazák)

Řešení. Rozdělení vyhovující zadání nepopíšeme, jen dokážeme, že takové rozdělení existuje. Všech možných rozdělení 90 dětí na tři 30členné skupiny (pokud nezáleží na pořadí skupin) je celkem

$$V = \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!},$$

protože každé takové rozdělení můžeme vytvořit tak, že nejdříve vybereme ze všech dětí jednu 30člennou skupinu a potom ze zbylých 60 dětí vybereme druhou 30člennou skupinu. Třetí skupina bude tvořena dětmi, které zůstaly (číslem 3! je přirozeně potřeba výsledný součin vydělit, protože každé rozdělení jsme započítali tolikrát, kolik je pořadí tří skupin).

Rozdělení nazveme *špatné kvůli dítěti* A, jestliže při něm dítě A nemá ve své skupině žádného kamaráda. Zabývejme se tím, kolik je všech špatných rozdělení (tedy takových, která *nevyhovují* zadání), a jejich počet označme Z. Stačí, když ukážeme, že špatných rozdělení je méně než všech, tj. $Z < V$.

Zkoumejme, jaký je počet rozdělení, která jsou špatná kvůli A — jejich počet označme Z_A. Jestliže A má mezi všemi právě n kamarádů (má tedy $89 - n$ „nekamarádů"), existuje[15]

$$\binom{89-n}{29}$$

30členných skupin, v nichž je A společně s dalšími 29 dětmi, z nichž ani jedno není jeho kamarád. Pro každou takovou skupinu umíme zbylých 60 dětí rozdělit

$$\binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}$$

způsoby na dvě 30členné skupiny (na pořadí skupin ohled nebereme). Počet rozdělení špatných kvůli A je tedy

$$Z_A = \binom{89-n}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \le \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \qquad (1)$$

[15]Pokud $n > 60$, žádné rozdělení špatné kvůli A neexistuje. Abychom se vyhli rozebírání zvláštních případů, definujeme, jak je zvykem, $\binom{k}{l} = 0$ pro $k < l$.

(v nerovnosti jsme využili dané ohraničení $n \geq 30$, tedy $89 - n \leq$ ≤ 59 — zřejmě z čím větší množiny 29 prvků vybíráme, tím více možností dostaneme).

Celkový počet špatných rozdělení určitě není větší než součet počtů špatných rozdělení pro jednotlivé děti (každé špatné rozdělení může být totiž špatné i kvůli více dětem). Protože dětí je 90, podle (1) máme

$$Z \leq 90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}.$$

Na důkaz nerovnosti $Z < V$ tak stačí dokázat nerovnost

$$90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} < \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!}, \tag{2}$$

již ekvivalentně upravíme:

$$45 \cdot \binom{59}{29} < \binom{90}{30} \cdot \frac{1}{6},$$

$$6 \cdot 45 \cdot \frac{59!}{29! \cdot 30!} < \frac{90!}{30! \cdot 60!},$$

$$6 \cdot 45 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 30 < 90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 61,$$

$$6 \cdot 45 < \frac{90}{59} \cdot \frac{89}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{61}{30}. \tag{3}$$

Každý z třiceti zlomků na pravé straně poslední nerovnosti je zřejmě větší než 1,5, proto je pravá strana větší než $1{,}5^{30} =$ $= 2{,}25^{15} > 2^{15} > 270 = 6 \cdot 45$. Dokázali jsme tak nerovnost (3), a tedy i (2), což znamená, že existuje rozdělení, které není špatné.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$
$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$
$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Nejdříve odhadneme levou stranu první rovnice dané soustavy pomocí nerovnosti $4x^2 \leq x^4 + 4$, která je splněna pro libovolné reálné číslo x, protože je ekvivalentní s nerovností $0 \leq \leq (x^2 - 2)^2$. Rovnost v ní nastane, právě když $x^2 = 2$, tj. právě když $x = \sqrt{2}$ nebo $x = -\sqrt{2}$.

Dostaneme tak

$$4x^2 + y^2 \leq x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Analogicky odhadneme i levé strany zbylých dvou rovnic soustavy. Obdržíme tak trojici nerovnic

$$4x^2 + y^2 \leq 5yz, \quad 4y^2 + z^2 \leq 5zx, \quad 4z^2 + x^2 \leq 5xy, \tag{1}$$

jejichž sečtením dostaneme po jednoduché úpravě nerovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + yz + zy$$

a tu ekvivalentně upravíme na tvar

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 0. \tag{2}$$

Součet druhých mocnin nemůže být záporný, proto v nerovnici (2) nutně nastává rovnost, platí tedy $x = y = z$. Rovnost musí tak platit i v každé nerovnici v (1). Odtud plyne

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{anebo} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě nalezené trojioce dané soustavě vyhovují.

Závěr. Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě dvě řešení, a to trojice $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Jiné řešení. Po substituci $x = \sqrt{2}a$, $y = \sqrt{2}b$, $z = \sqrt{2}c$ (již přirozeně děláme, aby soustava měla triviálně řešení $a = b = c = = \pm 1$) řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 4a^4 + 2b^2 + 4 &= 10bc, \\ 4b^4 + 2c^2 + 4 &= 10ca, \\ 4c^4 + 2a^2 + 4 &= 10ab. \end{aligned} \tag{3}$$

Přitom podle nerovnosti mezi váženým aritmetickým a geometrickým průměrem (nezáporných) čísel a^4, b^4, a^2, b^2, 1 platí

$$\frac{2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4}{10} \geq \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{10}} = |ab| \geq ab,$$

takže $2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4 \geq 10ab$. Sečtením této nerovnosti s dvěma nerovnostmi, které z ní získáme cyklickou záměnou proměnných, dostaneme, že v (3) je součet levých stran větší nebo rovný součtu pravých stran, přičemž rovnost nastane, jedině když nastane v použitých AG-nerovnostech, tedy jedině když $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Přitom a, b, c musejí mít totožná znaménka, aby platila rovnost i v nerovnosti $|ab| \geq ab$ a v dalších dvou analogických nerovnostech. Jediným řešením soustavy (3) jsou tudíž trojice $(1, 1, 1)$ a $(-1, -1, -1)$, jimž odpovídají stejné trojice (x, y, z), které jsme našli v prvním řešení (a ověřili je zkouškou).

Výsledková listina celostátního kola 61. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.–3.	Ondřej Bartoš	8/8 G Žďár n. S., Neumannova	**29**
	Michal Kopf	4/4 SG Opava	**29**
	Anh Dung Le	4/6 G Tachov, Pionýrská	**29**
4.	Josef Svoboda	5/6 G Frýdlant n. O.	**28**
5.	David Hruška	7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	**27**
6.	Martin Töpfer	4/4 G Praha 7, Nad Štolou	**26**
7.	Jakub Krásenský	8/8 G Jihava, Jana Masaryka	**25**
8.–9.	Jan Klusáček	8/8 G Třebíč, Masarykovo nám.	**23**
	Dominik Steinhauser	4/4 GJK Praha 6, Parléřova	**23**
10.	Michal Buráň	7/8 GJAK Uherský Brod	**22**
11.	Jan Stopka	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**21**

Další úspěšní řešitelé:

12.	Ondřej Hübsch	2/4 G Praha 6, Arabská	**20**
13.–14.	Tomáš Rusý	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**23**
	Ondřej Skácel	6/8 G Štenberk	**19**
15.–17.	Jan Kuchařík	4/4 G Jihlava, Jana Masaryka	**18**
	Michal Opler	8/8 MG Vsetín, Tyršova	**18**
	Dominik Tělupil	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**18**
18.	Ondřej Bouchala	8/8 GK Havířov	**17**
19.–21.	Lubomír Grund	7/8 GChD Praha 5, Zborovská	**16**
	Jan Hadrava	8/8 GChD Praha 5, Zborovská	**16**
	Štěpán Šimsa	7/8 GJJ Litoměřice, Svojsíkova	**16**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2012–2013

Kategorie A

A-I-1. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(Ján Mazák, Róbert Tóth)

A-I-2. Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.

(Tomáš Jurík)

A-I-3. Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \le p(n) \le 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(Pavel Novotný)

A-I-4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(Pavel Calábek)

A-I-5. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(Jaroslav Švrček)

A-I-6. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

(Pavel Calábek)

KATEGORIE B

B-I-1. Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(Jaroslav Švrček)

B-I-2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel. *(Jaromír Šimša)*

B-I-3. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q.

Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. *(Jaroslav Švrček)*

B-I-4. Najděte nejmenší hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2. *(Vojtech Bálint)*

B-I-5. V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. *(Pavel Calábek)*

B-I-6. Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného 12úhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$.

(Ján Mazák)

KATEGORIE C

C-I-1. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka doskočí.) *(Peter Novotný)*

C-I-2. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$?

(Ján Mazák)

C-I-3. Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$. *(Tomáš Jurík)*

C-I-4. Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku. *(Jaromír Šimša)*

C-I-5. Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. *(Jaroslav Švrček)*

C-I-6. Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM. *(Pavel Leischner)*