Učitel matematiky

Katarína Bachratá; Hynek Bachratý

Budovanie matematických predstáv pomocou manipulácií

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 3, 129–143

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149502`

BUDOVANIE MATEMATICKÝCH PREDSTÁV POMOCOU MANIPULÁCIÍ

Katarína a Hynek Bachratý

(Dokončení z minulého čísla)

V článku [1] sú uvedené mnohé ďalšie postrehy a podrobnosti. Na tomto mieste chceme v prvom rade upozorniť, že postup pri vyučovaní konštrukčných úloh s najväčšou pravdepodobnosťou výrazne nezodpovedá spôsobu prirodzenému pre deti. V prvom rade podceňujeme až ignorujeme fázy experimentálneho, manipulatívneho, „zememeračského" riešenia konštrukčných úloh, ktorá sa pri tom zdá byť základom poznávania v tejto oblasti. S etapou rysovania je ďalej previazané zrejme málo preskúmané a známe vytváranie duševných schopností a štruktúr pre opakovanie a primárnu evidenciu objavených postupov. Verbálny a najmä písomný spôsob zachytenia riešenia pomocou postupnosti elementárnych konštrukčných krokov je vysoko abstraktným nástrojom, ktorý má byť až vyvrcholením dlhej cesty k nemu. V teórii generických modelov podľa nášho názoru zodpovedá až etape kryštalizácie a automatizácie v oblasti konštrukčnej geometrie, pričom prvé, kľúčové etapy previazané na systematickú prácu s rysovacími pomôckami sa zbytočne skracujú, prípadne preskakujú. Podobne zbytočné a predčasné je napríklad bazírovanie na rigoróznom značení a diskusii o počte riešení. Pokiaľ sú tieto neprimerané postupy zvolené ako prvé a základné pri vyučovaní geometrie, blokujú dieťaťu skutočný poznávací proces a zákonite musia viesť k deformovanému, formálnemu poznaniu. Druhým dôležitým postrehom bol naozaj dlhý čas a vysoký počet opakovaní potrebný pre fixovanie určitých schopností a prechod na vyššiu úroveň. Bol prekvapením aj pre nás, zvyknutých na konštruktivistický prístup pri budovaní matematických pojmov. Obávame sa, že tento potrebný čas je v rámci školy a prípadne aj rodiny dopriaty len zlomku žiakov a nelichotivá pozícia geometrie v školskom vyučovaní je dôsledkom tohto stavu.

Gymnazisti a konfrontácia prístupov

Popísané skúsenosti sa nám potvrdili a rozšírili pri kontrolnom experimente so skupinou matematicky zdatných stredoškolákov z druhého ročníka gymnázia. Tým sme zadali na stretnutí matematického krúžku v podstate identickú sériu úloh (vynechali sme len úvodné, najľahšie) o Kvadrónoch. Ich postup najprv zodpovedal našim pôvodným, štandardným predstavám o schopnostiach žiakov v tejto oblasti: po zamyslení sa začali diktovať postupnosť jednotlivých krokov (predlžíme úsečku, spustíme kolmicu, ...) vedúcich k riešeniu. Niektorí dokonca ešte predtým urobili diskusiu a určili počet riešení.

Situácia sa prudko zmenila a začala sa výrazne podobať na prácu siedmakov, keď sme študentom rozdali rysovacie pomôcky a požiadali ich, aby svoje konštrukcie realizovali. Schopnosti rysovania zďaleka nezodpovedali úrovni ich „teoretických" úvah. Prvým, ale rýchlo odstrániteľným problémom bol nedostatok zručnosti pri práci s pravítkom a kružidlom. Ďalej sa ukázalo, že niektoré elementárne, pri slovnom popise postupu suverénne „používané" konštrukcie bolo v skutočnosti potrebné znovuobjaviť. Podobne sa často prejavila len ich formálna znalosť. Napríklad štandardná konštrukcia stredu, prípadne osi úsečky AB zrazu „prestala fungovať", ak bola úsečka príliš blízko okraja papiera. To, že je možné použiť kružnicové oblúky aj s iným polomerom ako $|AB|$, prípadne, že dvojica oblúkov na jednej a na druhej strane úsečky môže mať iné polomery, bolo pre deti novým objavom. Zdá sa nám, že pre uvedomenie si, premyslenie a vyriešenie týchto nejasností opäť výrazne prispelo zvoľnenie tempa práce na úroveň určenú manipuláciou s pomôckami.

Zaujalo nás tiež, že postup riešenia úloh pri rysovaní (na rozdiel od predchádzajúceho slovného popisu) niekedy nebol optimálny a obsahoval výrazne viac, aj keď myšlienkovo jednoduchších krokov. K zladeniu a previazaniu manipulatívneho a teoretického postupu riešenia došlo až neskôr, po nazbieraní a obnovení skúseností s rysovaním. Počas celého experimentu sa ale ani jeden zo študentov nevrátil k formálnej diskusii, teda k analyzovaniu počtu riešení. Podstatou riešenia úloh bolo zostrojenie potrebného útvaru a ak zadanie umožňovalo viac interpretácií, žiaci ich chápali ako samostatné problémy.

Tri roky náskoku v matematickom vývoji sa výrazne prejavili až v schopnosti gymnazistov rýchlejšie si osvojovať a pamätať už objavené postupy a využívať ich pri riešení nadväzujúcich úloh. Myslíme si, že príčinou sú na tento účel už vybudované schopnosti a štruktúry psychiky, ktoré, ako sme naznačili, sú u žiakov siedmeho ročníku ešte len na začiatku vývinu. Gymnazistom stačilo jeden – dva krát zopakovať „objaviteľské" konštrukcie a v ďalšom ich boli schopní používať. Ale až po ďalšom niekoľkonásobnom opakovaní postupu sa po prvý raz vyskytol návrh „toto už vieme ako urobiť, preskočme to a postupujme ďalej". Sme presvedčení, že až v tejto situácii a v tomto štádiu vývoja sa objavuje prirodzená potreba zápisu postupu konštrukcie a transformácia cieľa riešenia konštrukčných problémov od potreby ich reálnej realizácie na potrebu jej objavenia, vymyslenia. Podľa všetkého ale k tomu dochádza výrazne neskôr, ako to v súčasnosti predpokladajú školské osnovy. Tie od žiakov predčasne očakávajú a vyžadujú schopnosti odpovedajúce vyššiemu veku a zároveň im tak znemožňujú absolvovať potrebné a dlhé etapy motivácie a izolovaných modelov, previazaných takmer isto na „zememeračské", na rysovaní založené aktivity a skúsenosti.

Korešpondenčný seminár a „rysovanie na diaľku"

Doteraz popísané podnety a z nich vychádzajúce závery a hypotézy vznikli pri kontaktných vzdelávacích aktivitách s malými skupinami žiakov a detailným pozorovaním ich činnosti. Tento postup zrejme zostane základnou metódou výskumu, s využitím vyššie spomenutých skúseností sme sa ale pokúsili získať ďalšie informácie aj analýzou žiackych riešení niektorých geometrických úloh korešpondenčného seminára SEZAM a SEZAMKO. Sme si pri tom vedomí, že ide o písomné záznamy, ktoré len odrážajú skutočne dôležité myšlienkové pochody žiakov (a možno aj ich rodičov alebo učiteľov). Mali by preto slúžiť hlavne ako ilustrácie sledovaných javov a námety pre ďalšie podrobné skúmanie.

Na jeseň roku 2011 sme v priamej nadväznosti na spomínané letné sústredenie do prvej zimnej série úloh pre žiakov 7. až 9. ročníka zaradili nasledovný problém: *Základňa na planéte X mala tvar štvorca. V každom rohu bola strážna veža, v strede každej jeho strany vstupná brána a v strede základne studňa. Po piesočnej búrke ostali nezaviate len jedna veža, jedna brána a studňa, zvyšok základne zmizol pod nánosmi piesku. Keby sa nám podarilo celú základňu vyhrabať, mohli by sme zistiť niečo o neznámej vesmírnej civilizácii. K tomu musíme ale poznať jej pôvodnú polohu. K dispozícii máme však len laserový značkovač, ktorým môžeme podobne ako pravítkom vyznačiť na povrchu planéty „ľubovoľne dlhú“ polpriamku, a dlhé lano, pomocou ktorého môžeme namerať a prenášať rôzne vzdialenosti. Vedeli by ste vymyslieť jednoduchý návod, ako pomocou týchto dvoch nástrojov a objavených zvyškov základne nájsť a vyznačiť pôvodné polohy všetkých veží a všetkých brán základne? Pokiaľ je potrebných viac návodov, napíšte nám aj, ako určiť, ktorý návod máme použiť.* Zadanie úmyselne nebolo doplnené obrázkom. Boli sme zvedaví, ako budú žiaci schopní pochopiť a zakresliť zadanie, formulovať popis konštrukcie, či im bude vyhovovať a využijú ponúknutú možnosť kontextového popisu zadania úlohy a predmetných predstáv „rysovacích nástrojov“, ako zvládnu ponúknutú možnosť diskusie rôznych riešení atď.

Detailné spracovanie detských riešení nás ešte čaká. Aj prvé postrehy ale predstavujú zaujímavý a rozsiahly materiál. Spomenieme niektoré z nich. Pri náčrte situácie a označení obrázku sme sa stretli s prístupmi od takmer rigorózneho značenia dôležitých bodov V_1, V_2, B_1, B_2 a pod. Nikto ale nepoužil abstraktné označenie A, B, C, ... bez akéhokoľvek vzťahu ku kontextu. Omnoho častejšie boli obrázkové až ilustračné náčrtky, kde veže a brány často ani nepredstavovali idealizované geometrické objekty. Pritom sa neobjavila výrazná korelácia medzi správnosťou riešenia a schopnosťou idealizovať objekty zo zadania na úsečky a body a mierou abstraktnosti značenia. V každom prípade sa zdá, že využitie kontextu pri označení úlohy a v popise riešenia v primeranej a potrebnej miere využili takmer všetky deti. Podobná bola situácia aj v miere využitia ponúknutej predmetnej predstavy „rysovacích“ nástrojov. Najmenšia časť žiakov ich transformovala na prácu s polpriamkami a kružnicami, časť na prácu s pravítkom a kružidlom, niektorí ale pracovali s lanom a diaľkomerom (alebo len s lanom, lebo diaľkomer si nevedia predstaviť). Opäť sa ukázalo, že názorná predstava žiakom pomohla a každý ju použil na sebe primeranej úrovni. U tých, ktorí sú toho schopní, nie je problém transformovať lano na omnoho presnejšie kružidlo alebo ideálnu kružnicu. Pochybujeme ale, že sú dnešný žiaci základnej školy schopní opačného postupu, teda spredmetniť si príliš teoretické nástroje a predstavy na sebe primeranú úroveň. Miera abstrakcie „nástrojov“ sa opäť nemusela presne zhodovať s úspešnosťou riešenia, a dokonca často nezodpovedala ani miere abstrakcie pri idealizácii geometrických objektov zo zadania. Tento nesúlad úrovne (a kvality myslenia) v oblastiach, kde sme očakávali ich vzájomné zladenie, podľa nás poukazuje na neprirodzené tempo vývinu vedomostí u väčšiny žiakov. V skutočnosti nám skôr ukazuje, ktoré oblasti a do akej miery boli urýchlené neprimeraným tempom vyučovania. Pri tomto urýchľovaní vzájomné previazanie úrovní jednotlivých oblastí nie je možné očakávať.

Samotný popis konštrukcie bol dôsledne formalizovaný len v pár riešeniach. Deti prevažne používali procesuálny zápis postupnosti jednotlivých krokov konštrukcie. Najčastejším nedostatkom bolo zaradenie aj takých krokov, ktoré na rozdiel od ostatných neboli presne popísané („od studne pôjdeme kolmo na lano“). Žiaci ich popis zrejme ani nepoznali, respektíve ho nemali vymyslený.

Iným príkladom z jesene 2011 je úloha pre žiakov 5. a 6. ročníka: *... Tu všetci fanúšikovia zase vystúpili okrem jedného javiskového technika. Ten behal po celom vlaku a niečo usilovne hľadal. Jonatán sa ponúkol, že mu s hľadaním pomôže, ak mu povie, čo vlastne hľadá. „Hľadám trojuholník,“ vysvetľoval technik „kolega si myslí, že by tu ešte niekde mal byť jeden z lepenkových trojuholníkov, ktoré používame pri zdobení scény.“ „A aké by mal mať* *rozmery?" zaujímal sa Jonatán. „To si práve nevieme spomenúť. Kolega si bol istý, že má obvod 35 decimetrov. Jedna jeho strana je o decimeter kratšia než druhá. A tretia strana je dlhá štyri krát toľko než dlhšia z prvých dvoch." Viete zistiť, aké rozmery má hľadaný trojuholník? Kde by ho podľa vás mali Jonatán s technikom hľadať? ...*

Riešenie úlohy, opäť úmyselne zadanej bez obrázku, vyžadovalo dva nadväzujúce kroky: určenie dĺžok strán hľadaného trojuholníka a následné odhalenie neexistencie ich geometrickej interpretácie. (Prvý krok je síce možné vynechať, u žiakov tohto veku je to ale málo pravdepodobné a my sme sa s tým nestretli.) Prvú časť riešenia, či už prostredníctvom rovníc alebo metódou pokus – omyl, zvládli v podstate všetci žiaci a zistili, že podmienkam zadania zodpovedajú dĺžky strán 5, 6 a 24 decimetrov. Neočakávane veľa, rádovo polovica riešení, ale túto odpoveď akceptovala aj ako geometricky správnu. U viacerých mohol byť dôvodom klasický prejav formálneho vzdelania. Nepreviazanie jednotlivých oblastí ich matematických znalostí spôsobilo ignorovanie potreby pokračovať v geometrickej časti riešenia. Veľká časť nesprávnych riešení ale bola doplnená aj náčrtom trojuholníka s nezmyselnými dĺžkami strán. Tu už jednoznačne môžeme diagnostikovať formálnosť geometrických vedomostí a absenciu predmetných skúseností s prácou s trojuholníkmi. (S podobnými problémami sa žiaľ u nás môžeme stretnúť aj v čerstvom vydaní učebnice matematiky pre 9. ročník, kde sa napríklad usilovne skúma lichobežník so základňami 23 a 2 a ramenami 5 a 5, ako aj iné, rôznou mierou nepresnosti a nezmyselnosti poznačené útvary.)

Správne pokračovanie riešení bolo približne v polovici prípadov realizované len strohým odkazom na nedodržanie trojuholníkovej nerovnosti. V tejto situácii nevieme objektívne posúdiť, nakoľko je táto vlastnosť trojuholníka u detí zažitým a známym faktom, ktorý nepotrebujú komentovať, a nakoľko len formálnym poznatkom v správnom okamžiku privolaným signálnym slovom „trojuholník". Obávame sa ale, že skôr ide o druhý prípad. Až pri poslednej skupine detí sme si istí, že ich geometrické poznanie je skutočné, neformálne a zodpovedajúce ich veku. Súčasťou ich riešenia bola buď priamo ukážka neúspešnej konštrukcie trojuholníka zo zadaných parametrov, alebo odkaz na vykonanie takéhoto experimentu doma. Najviac nás potešilo riešenie, v ktorom piatačka neriešiteľnosť úlohy zistila pomocou manipulácie so špáradlami. Aj v tejto úlohe sa nám tak na vzorke približne 80 žiackych riešení potvrdilo, že práca s kružidlom a pravítkom je v tomto veku ak nie nutným, tak určite postačujúcim predpokladom objavenia správneho postupu riešenia.

Manažéri, počítače a štatistika

Takmer neriešiteľný problém ...

Posledná skúsenosť a ukážka sa týka kurzu ekonomickej štatistiky pre druhý ročník bakalárskeho štúdia programu *Manažment* na Fakulte riadenia a informatiky na Žilinskej univerzite, ktorý sme pripravili a vyučujeme štvrtý rok. Študenti tohto bakalárskeho programu majú väčšinovo vyhranené negatívne postoje k matematike. Predmet *Ekonomická štatistika* vznikol ako reakcia na požiadavku znížiť zaťaženie študentov manažérskeho zamerania na našej fakulte eliminovaním počtu a rozsahu matematických predmetov. Z uvedeného dôvodu boli tri pôvodné jednosemestrálne predmety: *Pravdepodobnosť*, *Štatistika* a *Analýza časových radov* zlúčené do jedného, od ktorého sa očakávalo, že ponúkne študentom užitočné matematické a štatistické nástroje, využiteľné pri písaní záverečných prác a prípadne neskôr v manažérskej praxi.

Neverili sme, že by boli študenti schopní v redukovanej časovej dotácii absorbovať vedomosti z troch pôvodných predmetov. Ponúkal sa pritom spôsob vyučovania, hlavne na technických vysokých školách považovaný za moderný, keď si študenti e-learningovou formou sami doštudujú učivo, ktoré sa nestihlo prebrať na vyučovaní. Takéto vyučovanie sa na prvý pohľad javí pre učiteľa pohodlnejšie. No poctivá príprava (teda nie len vyvesenie textov prednášok) takéhoto kurzu vyžaduje od vyučujúceho veľa vynaloženej energie, značnú neistotu v tom, čo študenti z takto pripraveného kurzu naozaj použijú a naopak takmer istotu, že toto riešenie problému nebude fungovať. Ďalším nepriaznivým faktorom bolo, že študenti neovládajú nástroje integrálneho počtu potrebné pre prácu s hustotou spojitých náhodných premenných, nakoľko kurz matematickej analýzy bol v ich študijnom programe zúžený iba na diferenciálny počet. Na druhej strane sa nám každý z troch pôvodných predmetov zdal dostatočne dôležitý na to, aby sme ho v určitej forme zachovali v obsahu kurzu.

Na základe konštruktivistických princípov vyučovania matematiky, spomenutých v predošlom odseku, sme sa rozhodli, že v kurze sa budeme venovať len niektorým témam a úlohám z pôvodných predmetov. Tie by študentom v zjednodušenej forme objasnili základné princípy štatistického modelovania a zároveň by im poskytli základ pre ďalšie samostatné štúdium, pokiaľ by mali záujem alebo potrebu venovať sa niektorej z tém detailnejšie.

Druhou zásadnou úpravou bolo rozsiahle zaradenie vyučovania na počítačoch. Hoci reakcia mnohých kolegov, ktorí mali s pôvodnými predmetmi skúsenosti, bola skeptická, naplánovali sme celý rozsah cvičení do počítačových miestností s predstavou, že každú preberanú tému budeme ilustrovať na príkladoch. Podľa všetkého išlo opäť aj o šťastné rozhodnutie, ktoré nám v skutočnosti prinieslo omnoho viac, ako sme očakávali.

Priebeh prvého semestra

Prvá, možno najdôležitejšia zmena, sa odohrala už počas prvých hodín vyučovania. Spočívala v tom, že každý študent si zapol svoj počítač, napísal v tabuľkovom procesore niekoľko hodnôt časového radu a vykreslil do jedného obrázka hodnoty časového radu a priamku, ktorá tieto hodnoty aproximovala. Hoci sme vedeli o pozitívnych skúsenostiach s využitím špeciálnejších programovacích jazykov vo vyučovaní (Python [6], Geogebra [7]), rozhodli sme sa pre využitie tabuľkového procesora Excel. Študenti si pre prácu doma nemuseli inštalovať nový softvér a skúsenosti s Excelom budú môcť bez problémov uplatniť aj v budúcnosti. Samostatná práca na počítači bola pre mnohých študentov zásadnou zmenou v prístupe. Študenti neboli zvyknutí pracovať na počítačoch sami a získavať reálne výstupy, chceli robiť v skupinkách. Postupne sa nám ich však podarilo presvedčiť, aby si hodnoty nielen sami vykreslili, ale aby každý z nich experimentoval s koeficientami a pokúsil sa nájsť priamku, ktorá by čo najpresnejšie vyjadrovala zadané hodnoty. Počas práce na tejto úlohe sa úplne samostatné riešenie objavilo len u niekoľkých študentov v skupine. Ostatní opisovali príkazy, ktoré mal napísané sused, a úprimne sa tešili, keď sa aj výsledok a obrázok na ich vlastnom počítači podobal na ten susedov. To, ako sa študenti radovali zo svojich výkonov, spôsobilo, že sme prehodnotili svoje požiadavky a ambície. Našim pôvodným zámerom bolo, aby každý študent sám, bez cudzej pomoci v tabuľkovom procesore vykreslil graf. Študenti sa však tešili už z toho, že im sa podarilo vykresliť graf hoci aj s pomocou suseda. Od profesora Milana Hejného sme prevzali pravidlo, že jedným z kritérií, pomocou ktorých sa dá zistiť, či je vyučovanie dobré, je počet žiakov, ktorí sa na hodine niečomu potešili. (Ďalšie kritérium je, koľko krát sa na hodine potešil učiteľ.) Uvažovali sme, prečo študentov teší, keď počítač urobí to isté, čo sa udialo u suseda. Tu sme si uvedomili možnú analógiu so zememeračstvom.

Zememeračstvo zabezpečí, že objekt bude vymeraný presne, pričom zememerač pracuje s reálnymi objektmi. Geometria až následne vysvetlí, prečo to tak je, a pracuje už s abstraktnými objektmi. Podobne počítač pre našich študentov nebol nástrojom na ilustráciu teoretických úvah, ako sme pri plánovaní predmetu predpokladali. Bol to reálny nástroj, ktorým študenti dokázali vytvoriť žiadaný výstup. V našich pocitoch sa pôvodne takýto predkauzálny postoj študentov príliš nezlučoval s matematickým poznaním, ktoré sme u nich chceli dosiahnuť. Ale radosť študentov a ich ochota naozaj pracovať a nie iba prácu imitovať nás presvedčila o tom, že prípravnej predkauzálnej fáze je potrebné venovať dostatočnú pozornosť, dať jej potrebný časový priestor a adekvátne vysoké ohodnotenie. Ocenili a podporili sme napríklad študentov, ktorí boli ochotní venovať námahu tomu, aby ich grafy mali estetický alebo atraktívny farebný dizajn. Motivovali sme študentov, aby tvorili vlastné grafy, histogramy a tabuľky, hoci potrebný intelektuálny výkon spočíval len v pochopení postup kolegu pri susednom počítači. Pripomíname, že vzájomnú komunikáciu študentov považujeme za vítanú a funkčnú tam, kde pri nej dochádza k získavaniu nových skúseností a objavovaniu nových poznatkov. Vhodnými úlohami sme postupne problémy modifikovali a sťažovali, aby po niekoľkých týždňoch boli študenti ochotní nielen samostatne vykresľovať výsledky, ale aj iniciatívne hľadať ďalšie možnosti ich vylepšenia, ktoré im ponúka software. Študenti sa naučili efektívne komunikovať medzi sebou. Po čase tak boli grafy nielen esteticky vykreslené, ale študenti sa už dokázali vzájomne naučiť aj zjednodušenia, klávesové skratky a rôzne iné vylepšenia pri práci s počítačmi. Niekedy sa spoločne s vyučujúcim začudovali, že rôzne postupy a príkazy dávajú rovnaké výsledky. Na hodinách sme všetci mali pocit, že sme sa niečo nové naučili.

Na tomto mieste spresníme, že pre prácu v tabuľkovom procesore sme v čo najväčšej miere využívali elementárne, čo najjednoduchšie príkazy. Väčšinu výpočtov sme robili postupne a použili sme veľké množstvo na prvý pohľad nadbytočných krokov. Pre výpočet vzdialenosti dvoch vedľa seba zapísaných stĺpcových vektorov sme preto zvlášť vyrobili stĺpec rozdielov ich zložiek, v prípade záujmu aj stĺpec absolútnych hodnôt týchto rozdielov, stĺpec druhých mocnín týchto rozdielov, ich súčet a nakoniec odmocninu tohto súčtu. Celý tento výpočet je pritom možné realizovať jediným príkazom. Pôvodne hlavným dôvodom k tomuto zdĺhavému postupu bolo rešpektovanie didaktickej zákonitosti, podľa ktorej prvé osvojenie nových pojmov má najskôr prebiehať v procesnej forme. Až po jej zvládnutí a zažití môže nastúpiť uchopenie pojmu vo forme konceptu. Prípadný prechod ku konceptu zodpovedal postupnému objavovaniu zložitejších funkcií tabuľkového procesora. Do tejto fázy ale prechádzali študenti (aj keď zďaleka nie všetci) až po získaní dostatočného množstva skúseností. Ďalším dôvodom „neposkytovania návodov" bolo, že ani študenti, ani vyučujúci neboli pre prácu s tabuľkovými procesormi školení resp. vzdelávaní. Aj dnes, keď už pred študentmi máme na základe získaných skúseností značný náskok, nepodsúvame im príkazy na predčasné urýchlenie práce, ale nechávame ich ako možnosť samostatného objavu pre najšikovnejších. Na tomto mieste ale chceme upozorniť na hlavný prínos využitia počítačov. V tomto prípade totiž na seba zobrali úlohu rysovacích pomôcok alebo kreslenia z predchádzajúcich ilustrácií. Aj keď sme sa na jednej strane od začiatku chceli vyhnúť prílišnému tempu vyučovania predmetu, a na druhej mali dobré a rozumné dôvody a predstavy využitia počítačov, opäť došlo k šťastnej a súčasne prekvapujúcej zhode okolností a reálne tempo práce študentov pri riešení postupne sa sťažujúcich úloh určilo skutočnú rýchlosť nášho postupu. Bola menšia, ako sme predpokladali, a zároveň sa ukázala ako optimálna pre väčšinu študentov. Či išlo o náhodu, alebo pre túto skutočnosť existujú hlbšie dôvody, je potrebné ďalej preskúmať.

Po uvedomení si nášho skutočného tempa sme mali spočiatku obavy, či sme v úvode nevenovali príliš veľa času riešeniu elementárnych úloh a či náš postup nie je zdĺhavý a ťažkopádny. Trpezlivý prístup sa nám ale odvďačil neskôr pri ťažších problémoch. Vtedy sa už študenti vedeli spoľahnúť na vlastné sily, nečakali na pokyn učiteľa alebo na presný návod, ako úlohy riešiť. Pri analýze periodických vlastností časového radu so sto hodnotami pomocou diskrétnej Fourierovej transformácie bolo potrebné vytvoriť tabuľku rozmeru 100×100, ktorej hodnoty boli komplexné zložky vektorov harmonickej bázy v exponenciálnom tvare. Najprácnejší postup, ktorým túto tabuľku niektorí študenti vytvárali, bolo zadať obsah každej bunky jej napísaním. (Zvlášť reálnu a zvlášť imaginárnu časť príslušného komplexného čísla, ktoré sa potom previedlo do exponenciálneho tvaru.) Mysleli sme, že po takejto práci budú študenti aspoň rozmrzení. Naopak, boli hrdí, že dokázali celú tabuľku zadať, a videli, že výsledok funguje. Navyše študenti, ktorým sa podarilo urobiť časť tejto práce automaticky, sa zrazu o svoje výsledky nechceli s ostatnými podeliť. Mali pocit, že je to ich osobné duševné víťazstvo a vlastníctvo. Keď sme sa pokúsili „prezradiť" ostatným tento postup na prednáške „zadarmo", ohradili sa. Študenti pociťovali ako nespravodlivé, keď sme chceli ostatných naučiť na prednáške niečo, čo oni sami objavili a naučili sa vlastným úsilím. Je možné, že niektorí práve tu začali odlišovať aj rôzne odtiene slova „naučiť sa".

Zaujímavé bolo sledovať študentov v situácii, keď mali „program" hotový. Najskôr si ho uložili, odovzdali a odškrtli splnenie jednej zo svojich povinností. Ale vzápätí mnohí z nich začali skúšať meniť namerané hodnoty, regresné koeficienty, pozorujúc, či procesor reaguje na zmeny a vykresľuje to, čo očakávajú. Tí najodvážnejší začali hľadať hodnoty, pre ktoré by program zlyhal. To boli okamihy, kedy sa zo zememeračov stávali geometri. Začali o veciach rozmýšľať, najskôr iba vo forme ako fungujú, neskôr prišla aj otázka prečo.

V tomto čase sa zmenila aj atmosféra na prednáškach. Študenti priebežne programovali to, čo sa prednášalo. Navyše sme každý týždeň so študentmi písali kontrolný test, hodnotenie ktorého sa započítavalo do ich skúšky a pri ktorom mohli používať svoje programy. Preto sa začali na prednáške zaujímať aj o to, ako veci fungujú teoreticky, aby bolo ich programovanie efektívnejšie a výsledky z testov lepšie. Bolo veľmi motivujúce prednášať študentom, ktorí prednášajúceho počúvajú a počuté ďalej spracovávajú. Za jeden semester sme na prednáškach zažili niekoľko milých momentov, či už to bol potlesk po skončení prednášky (ktorý začal spontánne, ale skončil pomerne rozpačito, lebo študenti si počas potlesku uvedomili, že na našej vysokej škole nie je zvykom po prednáške tlieskať), plná prednášková sála v deň medzi štátnymi sviatkami, kedy mali ostatné fakulty dekanské voľno (dodatočne sme sa dozvedeli, že si prednášku prišli vypočuť aj kamaráti našich študentov z iných fakúlt), alebo pokyn študentky v prvej rade prednášajúcej: „Buďte ticho! Už nič nehovorte!“ (Študentka uchopila celú prednášku a 5 minút pred koncom mala pocit, že začať novú tému, ktorej chcela tiež porozumieť, je už nad jej kapacitu. Chcela, aby sa pokračovalo až o týždeň, keď bude mať premyslené a absorbované to, čo počula doteraz.)

Aj popri týchto milých spomienkach ale nezabúdame a pripomenieme, že opäť sa nám tu potvrdila a oplatila myšlienka zvoľnenia tempa práce. Práve na technických a ekonomických školách je pritom bežnou praxou zhusťovanie matematických predmetov spôsobom, ktorý vyvoláva úžas ešte aj na špecializovaných matematických fakultách. Neveríme, aj s prihliadnutím na dnešné zloženie študentov našich škôl, že takýto postup prináša väčšine z nich vzdelávacie výsledky. Pri tu popísanom prístupe sme optimistickejší. A čo je potešiteľné, ukazuje sa, že pozitívnu úlohu tu môže zohrať aj počítač. Miesto rysovacích nástrojov to teraz bola práca študentov na ňom, ktorá nám pripomínala a naznačovala rýchlosť, ktorou bolo potrebné a vhodné postupovať.

Záver

Predpokladáme, že čitateľ na základe obsahu našich dvoch príspevkov už pozná aj ich hlavné posolstvo. Našim cieľom je podieľať sa ako učitelia na takom matematickom vzdelávaní, ktoré považujeme za zmysluplné a prináša nám aj našim študentom uspokojenie založené na pocite osobného a vedomostného rastu. Veríme, že toto vieme dosiahnuť dôsledným aplikovaním konštuktivistických prístupov, a darí sa nám to do značnej miery v oblasti školskej aj mimoškolskej matematiky. Dôležitým parametrom, predpokladom a prejavom takéhoto vyučovania je správna voľba jeho tempa. Trúfame si pritom povedať, že v absolútnej väčšine situácií je tempo určené osnovami príliš vysoké. Spočiatku neúmyselne, ale po získaní ďalších skúseností sme toto tempo vedome zvoľňovali a ponúkali študentom možnosť vnímať matematiku dostatočne dôkladne a podrobne na to, aby si mohli sami budovať potrebné pojmy a predstavy a verili, že takéto vnímanie matematiky je v ich silách.

Vybojovať a vybrať si svoju cestu vyučovania musí každý učiteľ sám. Pokiaľ sa jeho názor blíži k nášmu, ako jeden z nástrojov pre objavenie a nastavenie správnej rýchlosti napredovania mu ponúkame zaradenie manipulatívnych postupov do vyučovania. Zdá sa, že často poskytujú účinný nástroj pre budovanie vlastných skúseností a objavov a zároveň dávajú dostatočný čas a priestor pre ich teoretické, myšlienkové zvládnutie.

Literatúra

[1] Bachratý H., Bohiníková A., Vykopaná geometria: ako nás školská reforma vrátila o 2500 rokov do minulosti, *Zborník celostátní konference „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let“* Litomyšl, 29–43

[2] Bachratý H., Ako si z kociek postaviť pekný hrad a ešte krajšiu matematiku, *Zborník celostátní konference „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 str.“* Litomyšl, 61–72

[3] Bachratý H., Logika nápisov a tabuliek (Úlohy o autoreferenčných sústavách výrokov a viet), *Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2003*

[4] Hejný, M. at al., *Creative teaching in mathematics*, Charles University in Prague, Czech Republic, Kassel University, Germany, Aristotle University, Thessaloniki, Greece, University of Derby, United Kingdom. 2006.

[5] Hejný M., Schéma – pilíř matematické znalosti, *Zborník príspevkov z letnej školy z vyučovania matematiky PYTAGORAS 2007* Hronec, 2007

[6] Krnáč J., Siláči J., Šuch O., Využitie jazyka python vo výučbe, *In: DidInfo 2011, 17. ročník národnej konferencie* Banská Bystrica,

[7] Hanč J., Hančová M., Moderné didaktické metódy vo výučbe a popularizácii matematiky, *43. konferencia slovenských matematikov* Jasná pod Chopkom, EDIS-Vydavateľstvo Žilinskej univerzity, Žilina, 2011

Doc. RNDr. Katarína Bachratá, PhD.
RNDr. Hynek Bachratý, PhD.
Katedra informačných sietí
Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
Slovensko
e-mail: Katarina.Bachrata@fri.uniza.sk
e-mail: Hynek.Bachraty@fri.uniza.sk

ABSTRACT

The article is a continuation from the previous issue. It focuses on activities which aim at building new mathematical knowledge via manipulation and experimenting. One activity is a Logo construction set which can be used for developing spatial imagery. The main part of the article aims at geometric constructions with constructing tools – it consists of stories which motivate pupils to construct shapes using the knowledge of some of their properties. It is shown that the stage of constructing the shape is indispensable and that the constructing itself is a part of the discovery process. It is documented that in the teaching process, the phase of experimenting and making hypotheses is underestimated and unnecessarily accelerated. The third part of the article concerns university students. It is shown how land surveying can be used for motivating them for mathematics and developing their geometric knowledge. The authors support the constructivist approaches to the teaching of mathematics.