Alena Šarounová
Sčítání křivek

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 4, 193–205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149472`

SČÍTÁNÍ KŘIVEK

ALENA ŠAROUNOVÁ

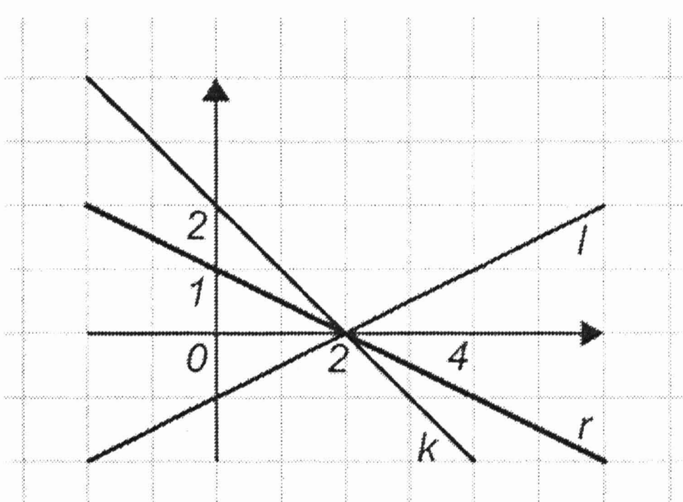
Ve škole máme nemnoho možností nabídnout žákům téma, které je zajímavé, dá se využít v různých ročnících a je založeno na „pátrání" po výsledcích. Nevýhodou mnohých částí našich „školních témat" je to, co se mi nelíbilo již při vlastním studiu. V matematických učebnicích jsou většinou (případně po velmi krátké motivaci) uváděny výsledky objevů matematiků (což je dobře), ale zcela tam chybí to nejdůležitější pro rozvíjení matematického myšlení – totiž „jak na to přišli, jak se rodí nový poznatek". Vím, že není možné věnovat se z časových důvodů více historii objevů, nápadům a chybám matematiků, o kterých se nikdy v monografiích nepíše. Přesto bychom měli aspoň občas zavést žáky „na pole neorané", aby mohli hledat, experimentovat, vymýšlet (a občas zavrhovat) hypotézy, ke kterým dospěli.

Nabízím vám zajímavé a myslím, že i užitečné téma, které sice není výslovně obsaženo v našich učebnicích, ale v podhoubí školské geometrie doutná už na ZŠ a navíc se může krásně rozvinout v předmaturitních seminářích či na škole vysoké. Navíc má z mého hlediska jedno velké PLUS. Donutí žáky vzít si do ruky tužku a pokusit se o aspoň trochu slušný obrázek (lépe řečeno grafické znázornění zajímavých funkcí). Vyjdeme z nejjednodušších poznatků žáků základních škol.

V očích žáků je nejjednodušším početním výkonem sčítání. Kromě aritmetiky se s ním seznámili i v geometrii. Dovedou graficky sčítat úsečky a (snad ještě) úhly. (Zde velmi záleží na tom, jak jsme úhel definovali!) Ukažme si metodu grafického sčítání dvojic křivek v rovině. Postup je velmi jednoduchý a v praxi se uplatňuje zejména při sčítání křivek experimentálních, tj. takových, pro které neznáme početní vyjádření. Součtovou křivku zde určíme jen přibližně (podobně, jako při odhadu průběhu grafu funkce, kdy vycházíme rovněž od několika (relativně) přesně sestrojených bodů, jimiž prokládáme „přibližný tvar" hledané křivky). Ovšem pokud známe početní vyjádření obou zadaných křivek, lze jejich součet určit přesně – a můžeme se dostat ke křivkám velmi zajímavým. Některé z obrázků, které v textu uvádím, mohou sloužit žákům přímo pro vlastní konstrukce, případně se snadno takové zadání nakreslí na PC. Čtvercové sítě, které obrázky doplňují, pomohou částečně jako nápověda, částečně ke korekci nepřesností žákovských konstrukcí.

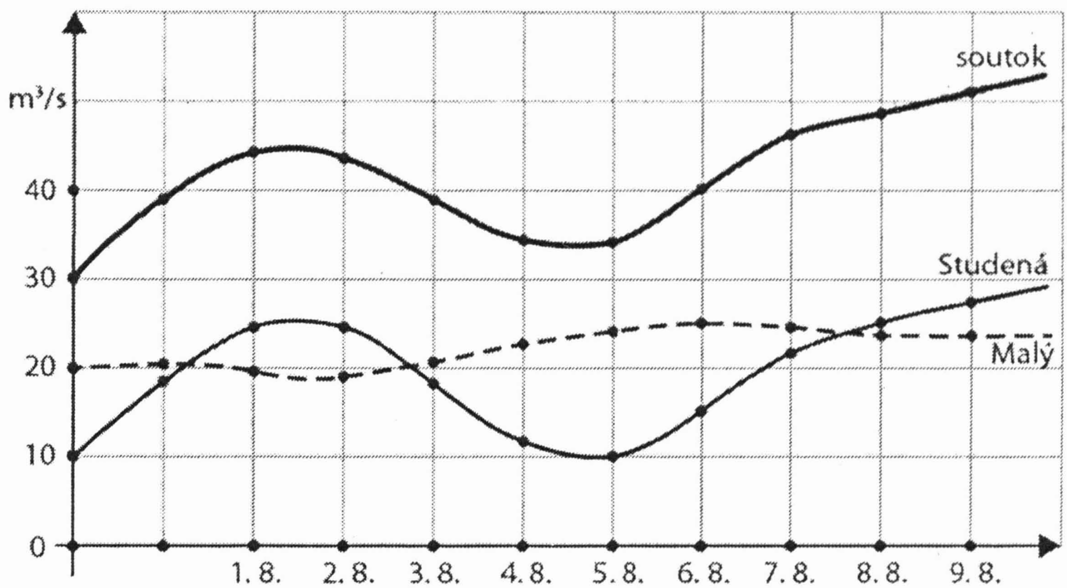
První setkání se sčítáním křivek lze provést buď na grafu dvou lineárních funkcí (obr. 1) nebo na „praktické vodohospodářské úloze" (viz obr. 2 – práce dětí na letním táboře).

Grafické sčítání lineárních funkcí (obr. 1). Ve čtvercové síti jsou zakresleny části lineárních funkcí k, l a lineární funkce r (konkrétně: k: $y = 2 - x$, l: $y = -1 + \frac{x}{2}$, r: $y = 1 - \frac{x}{2}$, ale pro „pátrání po souvislostech" to není důležité). Na ZŠ se můžeme ptát: Jsou tyto tři přímky (grafy funkcí – pokud už funkce probíráme) něčím zajímavé? Je mezi nimi nějaký vztah? V řadě různých odpovědí (jsou navzájem různoběžné, žádná není vodorovná, mají společný bod atd.) jistě najdeme takové, které nás spolu se čtvercovou sítí přivedou k poznatku, že body na přímce r lze získat pomocí bodů přímek k a l.



Obr. 1: Grafy lineárních funkcí k, l, r

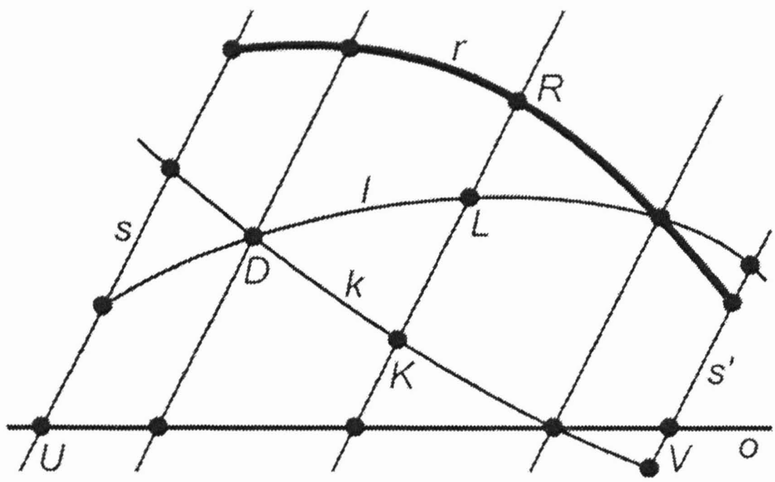
Na **odhad vteřinových průtoků** vody v řečišti pod soutokem dvou potoků z údajů pro tyto menší toky přijdou i žáci ZŠ. Mohou použít pro zvolený čas buď přímo grafické sečtení obou hodnot (to je rychlé – a pro naše další hledání perspektivní) nebo změřit jednotlivé hodnoty a sečíst je (z praxe ve škole – podstatně nepřesnější, ale teoreticky dobré).



Obr. 2: Odhad průtoku vody z průběžných záznamů automatických vodoměrů nad soutokem dvou říček

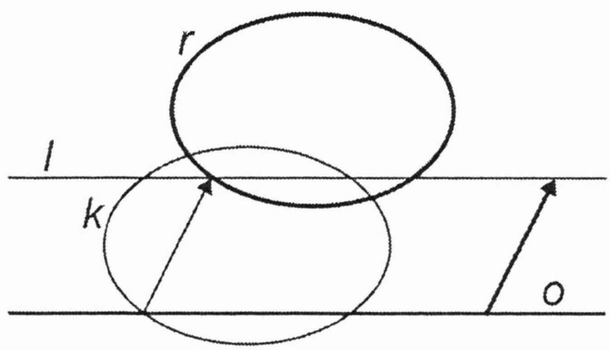
V obou případech šlo o sčítání „orientovaných úseček" (na SŠ hovořme o vektorech) a východiskem byl bod ležící na ose x. Tento postup můžeme zobecnit na **grafické sčítání křivek** (obr. 3).

Je dána přímka o (osa sčítání) a s ní různoběžná přímka s (směru sčítání). Máme-li sečíst křivky k a l, musíme nejprve zjistit, které přímky směru s tyto křivky protnou. Na obrázku to jsou všechny přímky ležící v rovinném pásu ohraničeném přímkami s a s'. Jednotlivé body součtové křivky r získáme na zvolených přímkách tohoto pásu. Přímky, na nichž body součtové křivky r hledáme, je vhodné vést i společnými průsečíky křivek k, l či průsečíky křivek k, l s osou sčítání. Další přímky směru s volíme tak, abychom vhodně „zahustili" řadu zakreslených bodů hledané součtové křivky r.



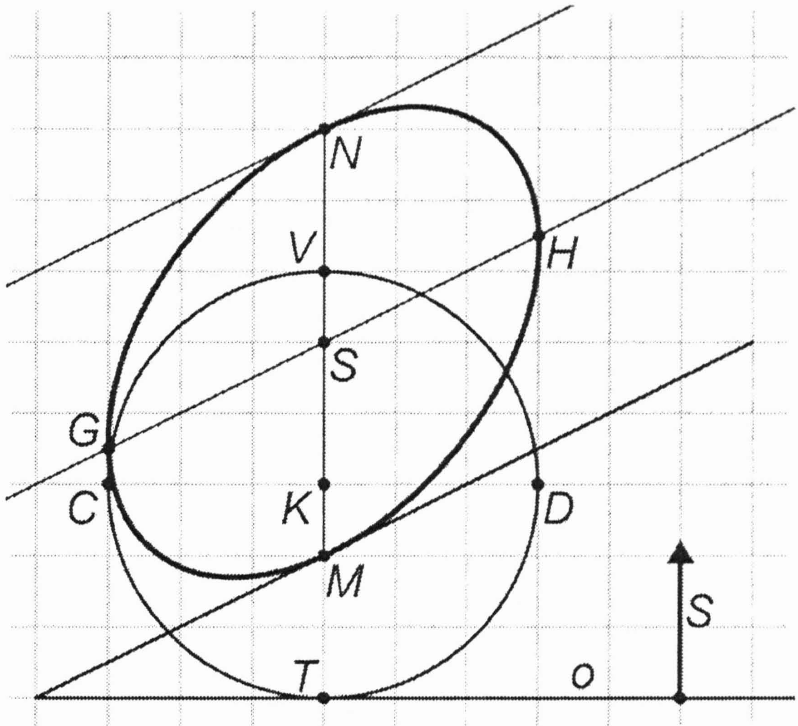
Obr. 3: Sčítání dvojice křivek k, l (vzhledem k ose o a směru s)

Součtem křivky k s přímkou l rovnoběžnou s osou sčítání (obr. 4) je křivka shodná s křivkou k a posunutá ve směru sčítání.



Obr. 4: Součet elipsy a přímky rovnoběžné s osou sčítání

Mnohem zajímavější je hledání součtové křivky kružnice k a přímky l různoběžné s osou sčítání (obr. 5). Zadání ve čtvercové síti usnadní konstrukci jednotlivých bodů i odhad tvaru součtové křivky. Zde je důležitá zkušenost s křivkami, které neprotnou zvolenou přímku směru s jen jednou. Na ZŠ žáci přibližný tvar výsledné elipsy objeví (a pokud by kreslili v GeoGebře na obrazovce, mohli by k potvrzení své hypotézy použít pokyn „kuželosečka pěti body", zadat body G, M, H a N – a pátý bod myší umístit do dalšího co nejpřesněji sestrojeného bodu) i v případě, že její název neznají (bohužel ze zkušenosti vím, že i někteří žáci nižších ročníků SŠ o elipse nevědí nic).



Obr. 5: Součtová křivka kružnice k a přímky l

(Žáci znalí základů deskriptivní geometrie rozeznají v úsečkách MN a GH dvojici sdružených průměrů elipsy a mohou tedy případně použít Rytzovu konstrukci jejích os.)

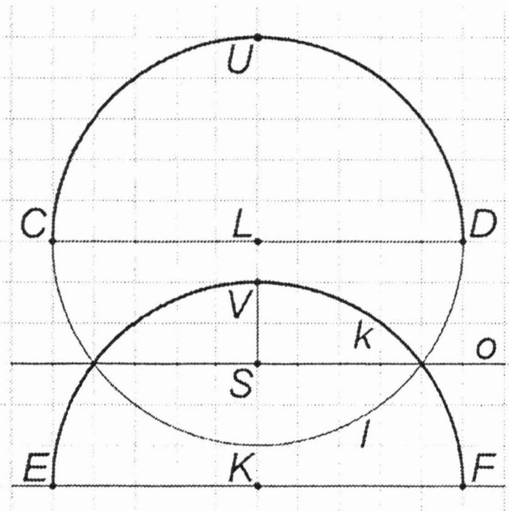
Shrňme zatímní nenáročné výsledky pátrání po vlastnostech sčítaných křivek. ZDÁ se, že můžeme tvrdit (tedy vyslovme hypotézy – ale na ZŠ bych to tak neformulovala):

- Součtem dvou přímek (různoběžných se směrem sčítání) je přímka.
- Součtem křivky s přímkou rovnoběžnou s osou sčítání je křivka shodná s původní křivkou a posunutá ve směru s.
- Součtem kružnice a přímky různoběžné s osou sčítání (i jejím směrem) je elipsa.

(Pokud studenti znají z hodin deskriptivní geometrie osovou afinitu, mohou nalézt afinní vztah mezi touto kružnicí a elipsou. Směr afinity je směrem sčítání, dvě (!) různé osy obou vyhovujících afinit lze najít snadno pomocí bodů dotyku kružnice a elipsy se společnými tečnami a dalšími body ležícími např. na spojnici středů obou kuželoseček.)

V matematických seminářích můžeme dále studovat součtové křivky dvojice kružnic. V těchto případech získáváme velmi zajímavé křivky, na nichž lze demonstrovat i některé důležité věty „vyšší geometrie".

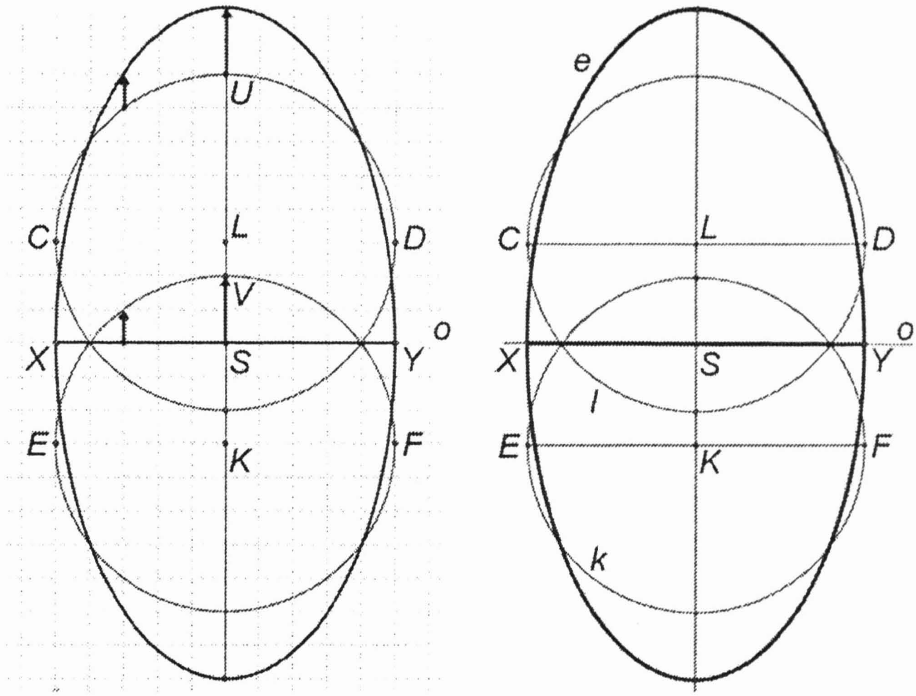
Na obr. 6 je **zadání přípravné úlohy**: Sestrojte součtovou křivku kružnicových oblouků (polokružnic) CUD a EVF pro osu sčítání o a směr sčítání SV.



Obr. 6: Zadání přípravné úlohy – součet dvou polokružnic

Výslednou křivkou je v tomto případě polovina elipsy s hlavním vrcholem na přímce SV a vedlejšími vrcholy na ose o. (Tento poznatek není nutný k dalšímu „experimentálnímu hledání" v následující úloze, ale bude důležitý, bude-li nás později zajímat stupeň součtové algebraické křivky.) Nyní můžeme už hledat **součtovou křivku dvou kružnic** (obr. 7).

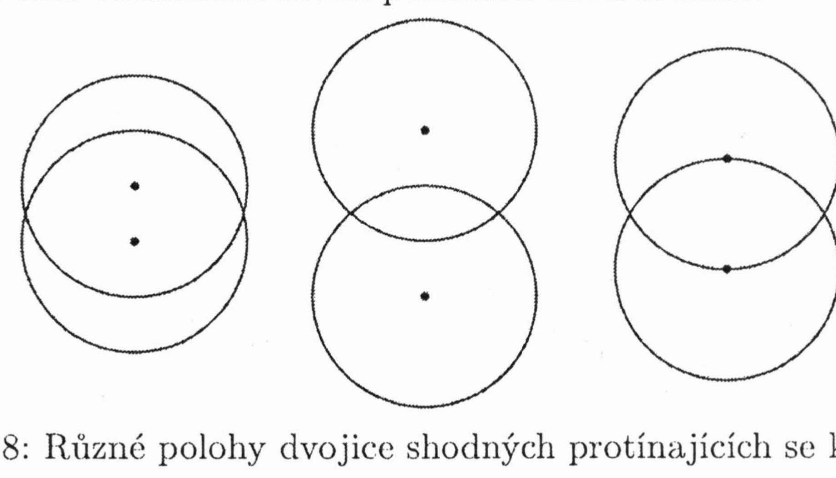
Jsou dány dvě shodné kružnice se středy K , L. Osa sčítání prochází jejich společnými body, směr sčítání je kolmý k této ose. Je vhodné upozornit na bod S, střed souměrnosti „celého zadání". Díky této souměrnosti bude i hledaná výsledná křivka středově souměrná podle bodu S a osově souměrná podle osy sčítání i přímky SL, což nám usnadní práci. Rovněž odtud plyne důležitý důsledek: Pokud je dvojice bodů, které na zvolené přímce směru sčítání právě sčítáme, souměrná podle osy sčítání, je výsledkem bod, který na této ose leží. Všimněte si, že každý bod úsečky XY na ose o kromě jejích krajních bodů je součtem bodů ležících



Obr. 7: Konstrukce bodů součtové křivky dvou kružnic a výsledná součtová křivka.

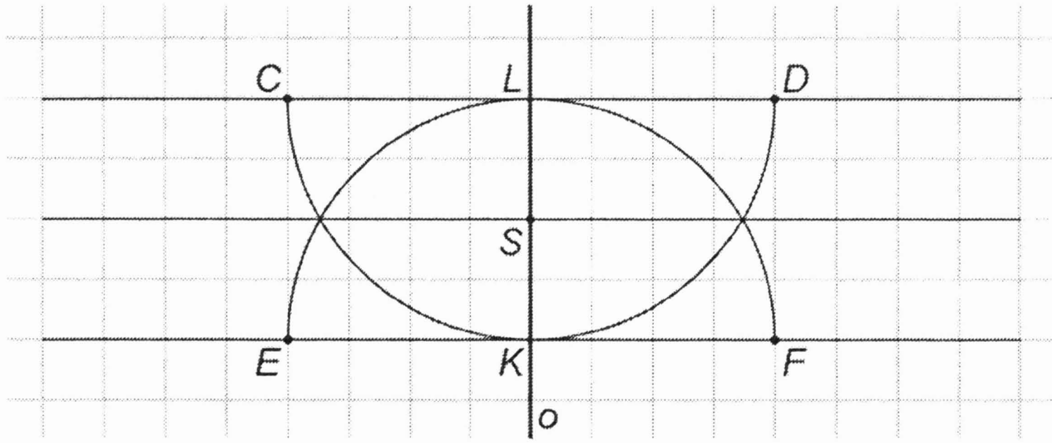
na polokružnicích, které protínají osu sčítání, ale zároveň i součtem bodů ležících na zbývajících polokružnicích. Součtová křivka se tedy skládá z jedné elipsy a jedné „dvojnásobné" úsečky XY.

Na obr. 8 vidíme tři různé polohy dvojice protínajících se shodných kružnic. Pokud změníme vzdálenost jejich středů, změní se i výsledná součtová křivka. Pro další úlohu si vybereme případ, kdy je tato vzdálenost rovna poloměru obou kružnic.



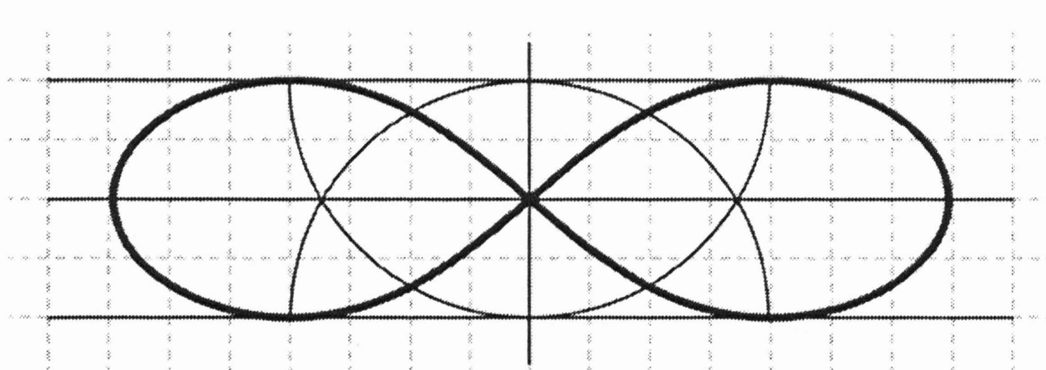
Obr. 8: Různé polohy dvojice shodných protínajících se kružnic

Tentokrát zvolíme za osu sčítání přímku, která prochází středy K, L daných kružnic (obr. 9 – **zadání úlohy**). Směr sčítání je opět kolmý k ose o. Kreslit celé kružnice není nutné, protože body součtové křivky nemohou ležet vně rovinného pásu ohraničeného přímkami CD a EF.



Obr. 9: Zadání úlohy – součtová křivka dvojice kružnic

Součtová křivka má tvar „osmičky“ („součtová lemniskáta“) souměrné podle dvou navzájem kolmých os i středu, která prochází body C, D, E a F. Pomocí čtvercové sítě snadno určíme její vrcholy. Na dalších přímkách směru sčítání však leží celkem čtyři body zadaných kružnic. Je proto třeba sestrojovat další body součtové křivky velmi pozorně. (Pro získání dalších bodů hledané křivky doporučuji „zahustit“ síť přímek směru sčítání.) Na obr. 10 je (pro kontrolu) hledaná lemniskáta nakreslená počítačem do čtvercové sítě.

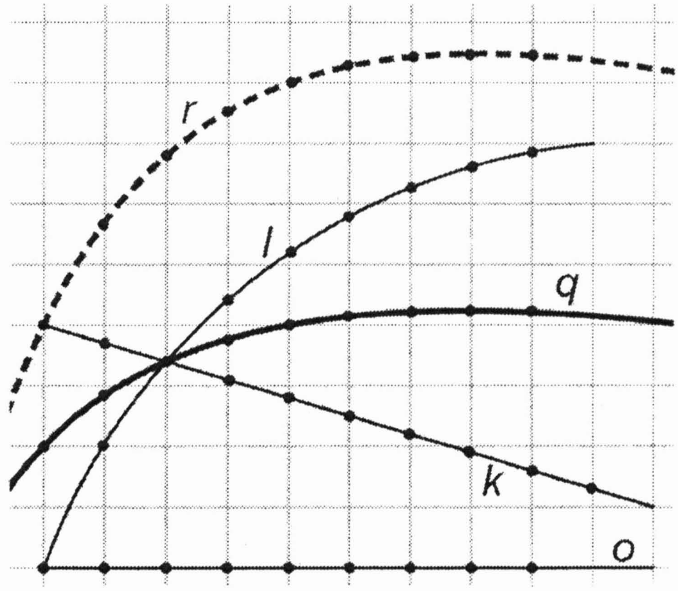


Obr. 10: Součtová křivka dvou kružnic

Součtové křivky z posledních dvou úloh mají zajímavé vlastnosti. První je ukázkou „křivky, která se rozpadla na dvě nesourodé části", na druhé leží dvojnásobný uzlový bod S. S těmito případy se ve škole studenti běžně nesetkávají.

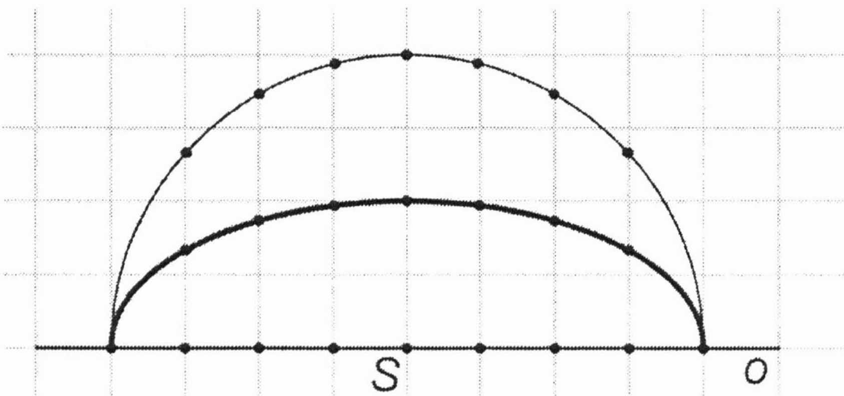
Až potud nebylo řešení úloh obtížné, nevyžadovalo mnoho znalostí – a přesto vedlo k nečekaným výsledkům. V matematickém semináři můžeme postoupit ještě o krok dále, budeme-li definovat algebraické křivky a stupeň algebraické křivky. Vrátíme-li se k výsledkům prvních úloh, kde se sčítaly přímky (křivky 1. stupně) a kružnice (křivka 2. stupně) a dospěli jsme k elipse (křivka 2. stupně), můžeme usoudit (vyslovit hypotézu), že součtem dvou algebraických křivek k, l stupňů m, n je algebraická křivka r stupně mn. Algebraickými křivkami se ale obecněji zabývají někteří studenti až na vysokých školách.

Kromě právě popsaného typu sčítání křivek se občas používá i tzv. „poloviční součet křivek" (obr. 11), při kterém hledáme na jednotlivých přímkách směru sčítání v podstatě aritmetický průměr, tedy střed úsečky omezené průsečíky zvolené přímky směru s oběma sčítanými křivkami.



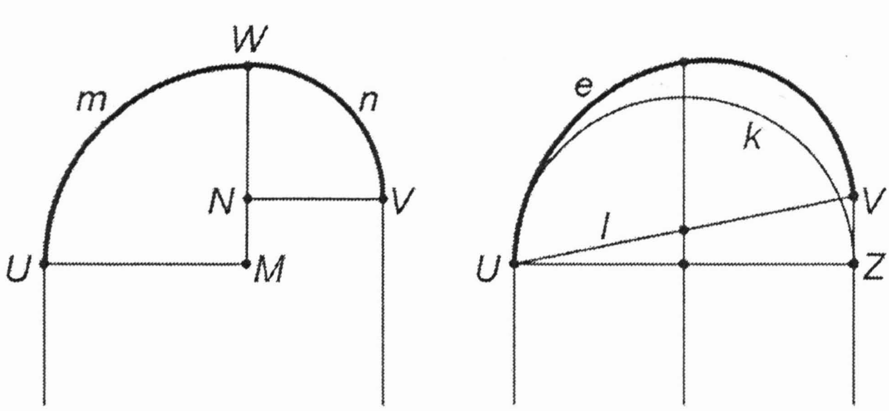
Obr. 11: Křivka q je polovičním součtem křivek k, l

V tomto případě vlastně osu sčítání nepotřebujeme, stačí zadat křivky k a l a směr sčítání – dále hledáme už jen středy příslušných úseček. Takto lze snadno sestrojit např. „snížený oblouk nad oknem“ (tedy místo půlkružnice polovinu elipsy) polovičním součtem polokružnice nad vodorovnou osou a touto osou (obr. 12).



Obr. 12: Poloviční součet oblouku kružnice a jejího průměru pro směr kolmý k průměru

V knihách starých architektů (17.–19. století) najdeme řadu návodných obrázků, jak konstruovat pomocí sčítání křivek a dalších grafických metod určité stavební prvky. Je škoda, že většina obrazového materiálu z nich už díky „zubu času“ není vhodná k reprodukci na tomto místě. Ukažme si alespoň dva různé způsoby řešení oblouku podpírajícího schodiště. Tento oblouk (tzv. **kobylí hlava** – viz obr. 13) vzniká buď kombinací dvou oblouků



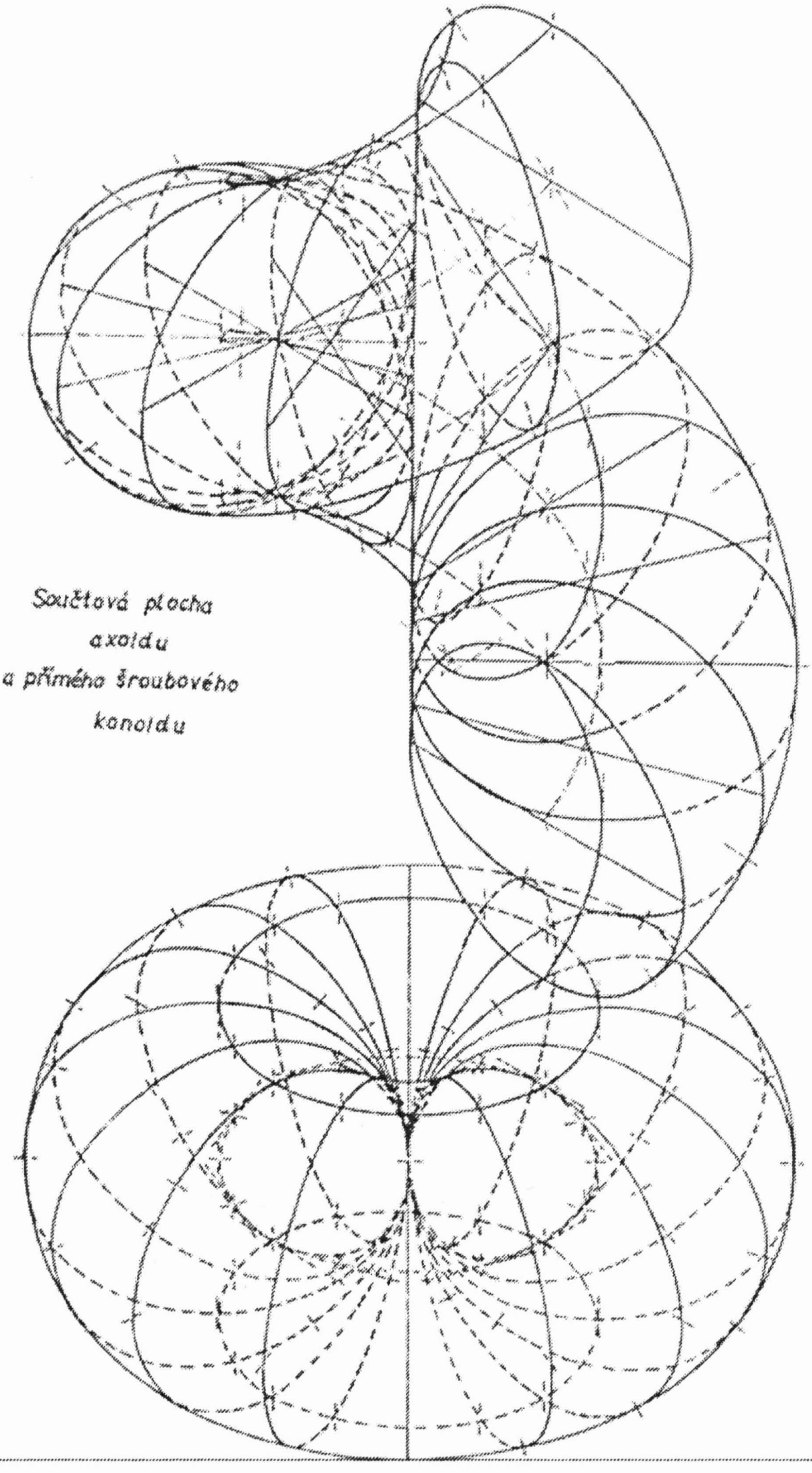
Obr. 13: Návody ke konstrukcím kobylí hlavy

kružnic o různém poloměru, nebo jako součtová křivka půlkružnice a úsečky. Právě tento druhý způsob je graficky popisován v historických spisech pro architekty. Výsledný oblouk má tvar poloviny elipsy (což vlastně stavitelé ani nemuseli „vědět“ – praktické konstrukce je často dovedly k zajímavým aplikacím geometrie, aniž by si to uvědomovali), jak už víme z předchozích úloh.

Myšlenku sčítání přímek v rovině lze zobecnit na sčítání ploch v prostoru. Je zajímavé, že i tuto metodu v praxi používali stavitelé mnohem dříve, než byla popsána. Obecně je architektura zdrojem mnoha myšlenek, které silně přispěly k rozvoji geometrie (ovšem platí to i obráceně – zejména v současné době).

Na závěr uvádím jeden letitý rys (obr. 14). V pravoúhlé axonometrii zobrazuje anuloid (tzv. axoid, vznikající rotací kružnice, která leží v rovině osy rotace a dotýká se jí) a součtovou plochu tohoto axoidu s přímým šroubovým konoidem. (Vodorovné průměry kružnic součtové plochy si můžete představit jako hrany točitého schodiště.) Každá kružnice této součtové plochy je „povytažena“ rovnoběžně s osou rotace (směr sčítání) a její střed leží na lehce vyznačené šroubovici ovíjející tuto přímku. Všimněte si, že i bez počítače lze vytvořit názorné a krásné obrazy. (Na MFF postupně vznikne jakýsi archiv takových „rukodělných“ prací, skenů krásných rysů studentů z 19. i 20. století. Věřím, že potěší i vaše oko. Na rozdíl od obrazů kreslených geometrickými programy jsou tyto rysy poněkud méně „přesné“ (i když i „počítač mnohdy švindluje a kreslí přibližně“), ale ty opravdu dobré rysy v sobě mají cosi jedinečného jako zajímavý rukopis.

(Omlouvám se čtenářům za poněkud „lidový jazyk“ tohoto článku, ale vím, že ne všichni lidé včetně našich studentů mají rádi geometrii. Mnozí z nich mnohou porozumět obrázkům i bez odborné terminologie – a možná někteří z nich pak svůj vztah k této disciplině změní.)



Obr. 14: Součtová plocha axoidu s přímým šroubovým konoidem
(rys posluchačky)

Literatura

[1] Piska, R., Medek, V., *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1974.

[2] Štíchová, R., *Geometrie v architektuře Santiniho – Aichla„* diplomová práce MFF UK, Praha, 2008.

PhDr. Alena Šarounová, CSc.
MFF UK Praha
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

ABSTRACT
Addition of curves yields an interesting possibility for geometric experiments at basic and secondary schools. Addition of curves and surfaces is a tool used in architecture.

The article presents some problems with solutions which can be used at the primary and secondary schools and which allow for pupils' experimenting and making hypotheses.