Učitel matematiky

Alena Šarounová

Hrátky s podobností

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 4, 223–230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149406

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

HRÁTKY S PODOBNOSTÍ

Alena Šarounová

Už řadu let se mi zdá, že žáci si z matematiky základních i středních škol sice odnášejí řadu poznatků, ale v praxi je často nedovedou použít. Vidím to zejména v geometrii, protože je to „můj obor a trochu i koníček", ale stejná situace je jistě i v dalších vyučovacích předmětech (např. čeština – gramatické chyby a obtíže s vlastním vyjadřováním). Měli bychom více zdůrazňovat podstatné principy i souvislosti různých úseků látky s „životem". Tím myslím okolnosti, důvody vzniku i význam daného učiva pro společnost. (Stejně tak je nutné přiměřeným způsobem vysvětlovat žákům PROČ je třeba pěstovat paměť, umět popsat srozumitelně své myšlenky, dodržovat určitá pravidla, čitelně psát, pozorně číst pokyny k práci atd.) Neuškodí ani trochu hravosti, díky níž si lépe „osaháme" hloubku svých znalostí v situacích, o nichž se v učebnicích většinou nepíše.

V Pokrocích MFA v roce 2014 vyšel obsáhlý článek Františka Kuřiny *Jak učinit myšlenku viditelnou.* Doporučuji ho vaší pozornosti. Myslím, že velmi důrazně poukazuje na význam obrázků (nejen) při studiu matematiky. Uvádí zde i následující citát Petra Vopěnky:

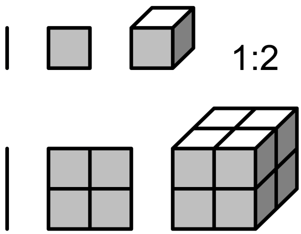
„Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, tj. důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání."

Často zapomínáme, že obrazové informace jsou jedním z nejdůležitějších nástrojů poznávání světa. Už malé děti jim porozumí dříve, než pochopí význam našich slov… I ve škole mohou úlohy zadané jednoduchými obrázky nejen oživit výuku, ale přispět k hlubšímu pochopení látky, rozvoji řeči, nápaditosti atp. Na nás záleží, KDY a JAK je žákům nabídneme (hodina – domácí práce – soutěž…).

Slovo „podobnost“ má v běžném jazyce mnoho významů ve smyslu „jakákoli blízkost“. Nám půjde o podobnost geometrickou – a pro zjednodušení o nejznámější rovinné útvary a jejich obsahy. Již starověcí zeměměřiči a stavitelé využívali jednoduchý princip zdvojování a půlení základních délkových jednotek. Výstrojí takového zeměměřiče bylo vždy měřické lano, délková „jednotka“ a vyměřovací kolíky. Ve starořeckých textech se hovoří o „napínačích lan“. Těmito prostředky se snadno na připraveném povrchu vyznačí kružnice či ve volném terénu vykolíkují vrcholy pravidelného šestiúhelníku daných rozměrů.

Zdvojnásobení a půlení rozměrů

Následující jednoduché úlohy mohou žákům posloužit k „hlubšímu prožití“ významu koeficientu podobnosti. Důležitost koeficientu podobnosti snadno připomeneme porovnáním délek, obsahů a objemů útvarů na obr. 1. (Komentáře je vhodné nechat na žácích. Musí se učit formulovat vlastní myšlenky. Jde o velmi jednoduché úlohy, proto je i já popíši jen stručně.)

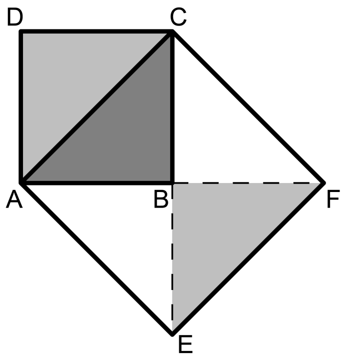


Obr. 1: Zdvojnásobení rozměrů čtverce a krychle

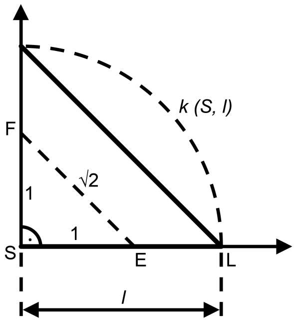
Fakt, že zdvojnásobením rozměrů rovinného útvaru se jeho obsah zvětší čtyřnásobně a jeho prostorová varianta dokonce osminásobně, je důvodem mnoha jevů okolo nás. (Proč například nerostou jablka mnohem větších rozměrů? Jablko je drženo na stromě stopkou a ta přiléhá k větvi malou ploškou (obr. 2). Při růstu jablka se obsah této plošky zvětšuje pomaleji než objem (a tedy i váha) jablka. I proto má velikost plodů jabloně určitou hranici růstu.)

Obr. 2: Jablka

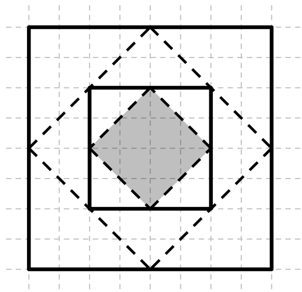
Ze starého Řecka pochází zajímavá a zdánlivě velmi jednoduchá úloha o „zdvojení krychle" (tzv. délský problém). K dané krychli je třeba sestrojit krychli s dvojnásobným objemem. Ukázalo se však, že hranu takové krychle nelze sestrojit pouze pravítkem a kružítkem. Trochu jinou úlohu řešili mnozí stavitelé typických sakrálních staveb (mysleme pro jednoduchost třeba na rotundy). Jak rostl počet obyvatelstva, tak bylo nutné zvětšovat i chrámy. Na rozdíl od délské úlohy je nutno počítat se zvětšením podlahové plochy. Výška stavby počet míst v chrámu neovlivňuje. Třetí obrázek řeší zdvojnásobení plochy čtvercové místnosti $ABCD$. (I to bylo ve starověku známo. Je pravděpodobné, že tato konfigurace přispěla k objevu věty, která byla mnohem později nazvána větou Pythagorovou.)



Obr. 3: „Zdvojnásobení čtverce"



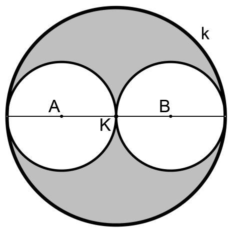
Obr. 4: Redukční úhel



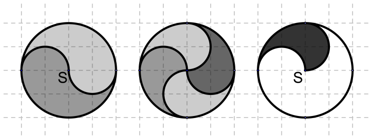
Obr. 5: Tzv. „rotace čtverců“

K rychlému sestrojení obrazce zvětšeného k danému v poměru $1 : \sqrt{2}$ lze použít např. redukční úhel vycházející právě ze čtverce a jeho úhlopříčky (obr. 4). A na obr. 5 vidíme část posloupnosti čtverců, které vznikají postupně z původního velkého čtverce rotací a zmenšováním. Řekne-li historik architektury, že stavitel použil rotaci čtverců, znamená to, že ze základní jednotky délky odvodil další úsečky v plánu použité právě z tohoto schématu. Zajímavá je i posloupnost obsahů těchto čtverců. Podložená čtvercová síť na obrázku sama napoví, že tlustou čarou vkreslený čtverec má poloviční rozměry čtverce původního (a tedy jeho čtvrtinový obsah).

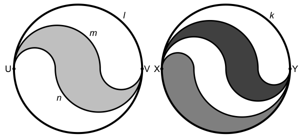
Dvojice kruhů vepsaných do kruhu se středem K nepřekrývá část jeho plochy (viz obr. 6) šedivě vyznačenou. Obdobně jsou zvýrazněna šedá políčka i na obr. 7 a 8. Ve všech těchto případech lze snadno určit, jakou část velkého kruhu šedivé plošky pokrývají.



Obr. 6: Dvojice kruhů v kruhu

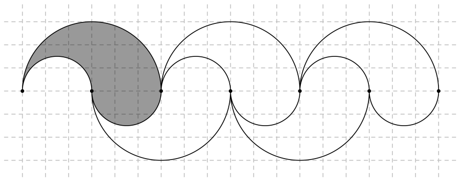


Obr. 7: Dělení tří kruhů



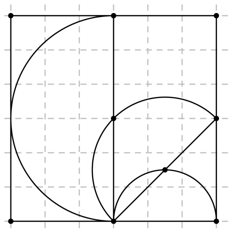
Obr. 8: Dvojice kruhů dělených křivkami

A snad jako zkoušku postřehu nechme žáky „co nejrychleji“ zjistit obsah útvaru z obr. 9, který je zakreslen v jednotkové čtvercové síti a skládá se z pěti shodných kapkovitých tvarů.

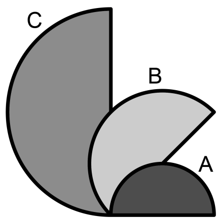


Obr. 9: Ornament

Na desátém obrázku lze ukázat, že doplněním několika vhodných čar můžeme významně zjednodušit řešení úlohy. Ke konstrukci trojice „neprůhledných polokruhů“ byl využit čtverec (obr. 10a), který je v zadání úlohy skryt. Úkolem žáků je určit poměry obsahů polokruhů A, B, C z obr. 10b. (Někteří žáci 9. ročníku si zpětně dokreslili skrytý čtverec se středními příčkami, jiní měřili průměry polokruhů nebo výsledek jen odhadovali.)



(a)

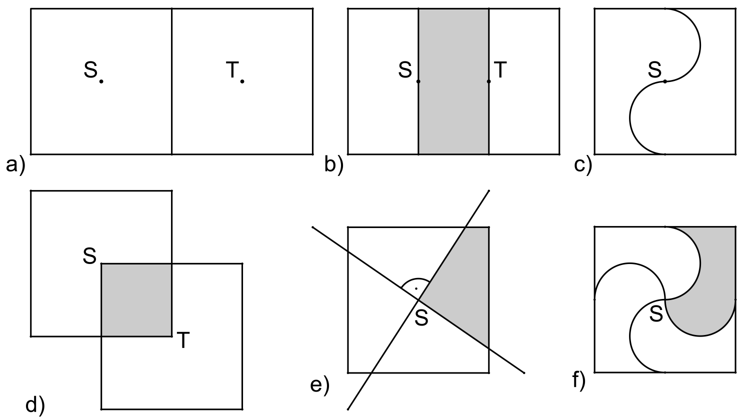


(b)

Obr. 10: Trojice polokruhů

Úlohy na překrývání čtverců a kruhů

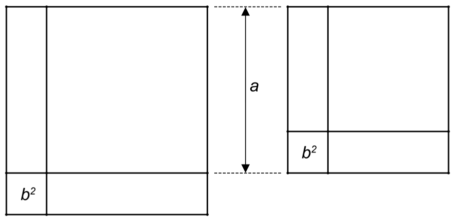
Pozorováním posledních obrázků mohou žáci dospět k jednoduchému a v praxi velmi užitečnému principu: Složením dvou nepřekrývajících se n-úhelníků U, V s obsahy u, v, získáme m-úhelník s obsahem $u + v$. Pokud se překrývají, bude obsah složeného útvaru o obsah společné části menší. Konkrétně na obr. 11a,b,d jde o dva shodné čtverce se středy S, T. Na obr. 11e je vhodné vyznačit celou polohu čtverce se středem T. Čtverce 11c, f jsou rozděleny křivkou středově souměrnou podle středu čtverce (tedy středu souměrnosti tohoto čtverce) na shodné části. Z obr. 7 je patrná obdoba – dělení kruhu. (Můžeme poznatek zobecnit?)



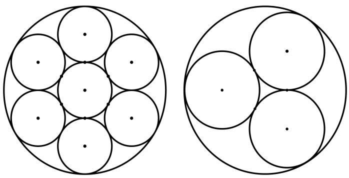
Obr. 11: Překrývání a dělení čtverců

Na překrytí obdélníků si musíme dát pozor i na známém grafickém znázornění platnosti vzorce pro výpočet druhé mocniny dvojčlenu (obr. 12).

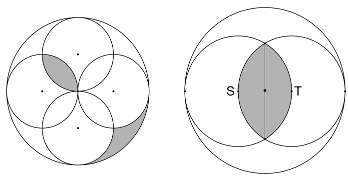
Obr. 13 a 14 nabízejí více možností jejich využití (jejich narýsování od menších kruhů k velkému či naopak, náročnější zjištění velikosti plochy kruhu nepokryté kruhy menšími atd.).



Obr. 12: Znázornění vzorců pro výpočet druhé mocniny dvojčlenů $(a+b)$, $(a-b)$

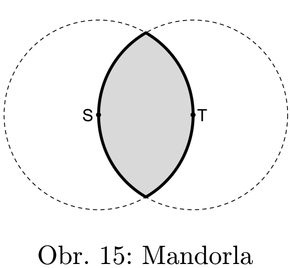


Obr. 13: Jednoduchá gotická okénka

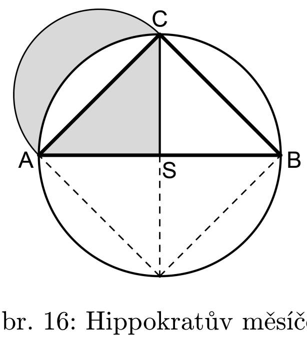


Obr. 14: Kruhy v kruhu

V historii byla velmi často užívaná konfigurace dvojice kruhů a zejména jejich společná část zvýrazněná na obr. 15 zvaná mandorla (italsky mandle). Na církevních obrazech mohla obklopovat celého Krista (význačná svatozáře). Na ikonách i kostelních freskách mívá však občas otupené „rohy“.



Obr. 15: Mandorla



Obr. 16: Hippokratův měsíček

Na obr. 16 je znázorněn Hippokratův měsíček, jehož obsah je roven obsahu trojúhelníku ASC. Tím se navracíme k úvodním obrázkům. Obsah čtvrtkruhu ASC je roven obsahu polokruhu s průměrem AC. Můžeme přikreslit měsíček i k odvěsně BC a vyslovit větu: *Součet obsahů „měsíčků“ nad odvěsnami rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu tohoto trojúhelníku.* (Věta platí i v obecnější podobě, nevyžaduje rovnoramennost pravoúhlého trojúhelníku, ale k důkazu je už zapotřebí Pythagorova věta. Je to vhodná úloha pro žáky!)

Na závěr

Chtěla jsem připomenout užitečnost „obrázkových úloh“ pro výuku geometrie. Dává žákům možnost „něco objevit“, připomenout si jinou formou poznatky z učebnic a cvičit schopnost hovořit a srozumitelně formulovat své myšlenky. Myslím, že všechny tři „možnosti“ jsou velmi důležité (nejen v matematice).

Literatura

[1] Kuřina F. (2014). Jak učinit myšlenku viditelnou. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 59*(2), 117–134.

Abstract

Simple problems emphasizing the significance of the ratio of similarity in situations concerning circle, square and their parts.

Alena Šarounová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: sarounov@karlin.mff.cuni.cz