Pavel Pokorný

Kdy mačkáním zvedáme

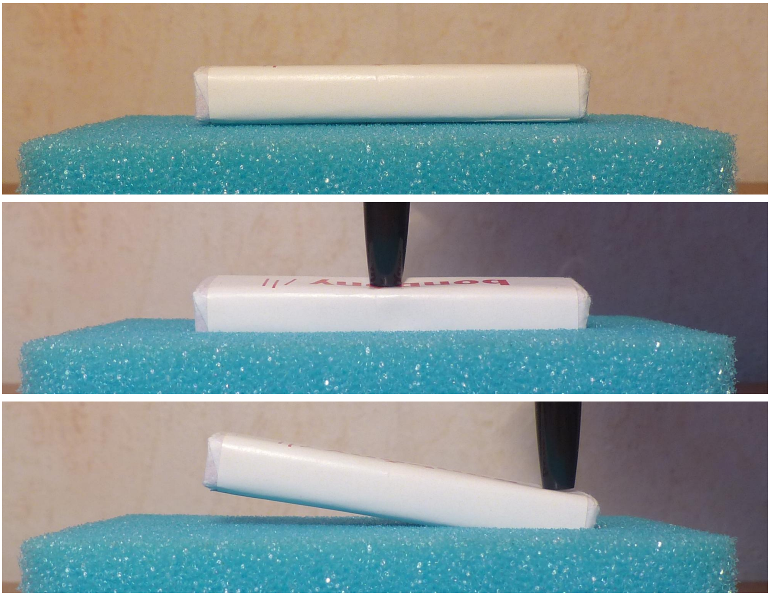
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 4, 53–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149343

Kdy mačkáním zvedáme

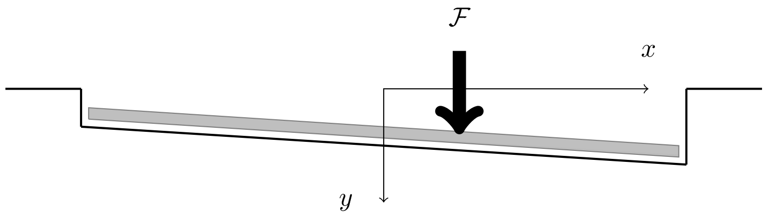
Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Když položíme na vodorovný povrch měkkého pružného tělesa (např. z polyuretanu) tuhé, ne příliš těžké těleso tvaru kvádru, tak se mírně zaboří do podložky, viz obr. 1 nahoře. Je-li těleso dostatečně lehké, můžeme toto zaboření zanedbat.



Obr. 1: Horní obrázek: lehký pevný předmět položený na měkký pružný materiál. Prostřední obrázek: účinek vnější síly působící uprostřed. Dolní obrázek: síla působící blízko okraje zvedne opačný okraj předmětu.

Pokud na předmět zatlačíme vnější silou, která je výrazně větší než tíha kvádru, uprostřed mezi okraji, tak se těleso zaboří hlouběji do měkké pružné podložky, viz obr. 1 uprostřed. Pokud ale zatlačíme blízko okraje, tak přestože tlačíme dolů, opačný konec tělesa se naopak zvedne nad úroveň povrchu podložky. Zabývejme se otázkou, jak daleko od středu musíme zatlačit, aby se opačný okraj zvedl.



Obr. 2: Schematický náčrtek tuhého kvádru (zde zobrazen šedým obdélníkem), který je tlačen do měkké podložky vnější silou $\mathcal{F}$ působící mimo střed (zde zobrazena tlustou šipkou). Malá mezera mezi kvádrem a podložkou je na obrázku pro zvýšení přehlednosti. Ve skutečnosti bude těleso v dotyku s podložkou.

Uvažujme tedy lehký tuhý kvádr, jehož půdorysem je obdélník o délce $L = 2$ (toho lze docílit vhodnou volbou jednotky délky) a šířce w (která není pro řešení podstatná) položený na měkké pružné podložce. Předpokládejme, že pro malé svislé síly je deformace y přímo úměrná tlaku p s konstantou úměrnosti k (jejíž hodnota není podstatná):

$$p = ky.$$

To platí pouze pro nezáporná y, tedy pro místa, která jsou zabořena do měkké podložky. Je-li část kvádru nad povrchem, pak měkká podložka na tuto část nepůsobí (pokud není kvádr k podložce přilepen lepidlem). Pro přesnější popis bychom tedy měli hloubku zaboření y násobit hodnotou 1 pro nezáporná y a hodnotou 0 pro záporná y. Naším cílem je ale nalézt podmínku, kdy se opačný konec kvádru začne zvedat nad podložku, záporné hodnoty deformace nemusíme tedy uvažovat.

Síla $\mathrm{d}F$, kterou podložka působí na těleso na ploše o obsahu

$$\mathrm{d}S = w\,\mathrm{d}x,$$

pak je

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S = kyw\,\mathrm{d}x.$$

Přesněji řečeno, zde veličinou p označujeme podíl svislé síly a obsahu elementu půdorysu, ne styčné plochy, která je mírně skloněna. Také neuvažujeme statickou třecí sílu, o které předpokládáme, že pouze zajistí, aby nám těleso neklouzalo do strany. Bilancujeme pouze svislé síly. Také zanedbáváme efekty na okrajích, kde bude deformace složitější.

Je-li tuhé těleso vlivem působení vnější svislé síly $\mathcal{F}$ a síly od podložky F skloněno, můžeme výchylku ve svislém směru vyjádřit jako:

$$y = ax + b,$$

kde a a b jsou konstanty, viz obr 2. Pak celková síla F od podložky je součtem všech příspěvků $\mathrm{d}F$, který spočteme integrálem:

$$F = \int_{-1}^{1} kyw \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} k(ax + b)w \, \mathrm{d}x = 2kbw.$$

Zde i dále pro jednoduchost integrujeme od -1 do 1, přestože polovina půdorysu kvádru skloněného o úhel α je dlouhá pouze $\cos\alpha$. My předpokládáme, že úhel α je malý.

Spočtěme si ještě moment M sil od podložky vůči bodu $x = 0$. Ten je dán součtem všech příspěvků:

$$\mathrm{d}M = x \, \mathrm{d}F = xkyw \, \mathrm{d}x.$$

Tento součet opět spočteme pomocí určitého integrálu:

$$M = \int_{-1}^{1} xkyw \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} xk(ax + b)w \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}kaw.$$

Při výpočtu těchto integrálů lze s výhodou využít toho, že integrál liché funkce přes souměrný interval je roven nule.

Působí-li vnější síla $\mathcal{F}$ ve vzdálenosti r od středu tělesa, je její moment

$$\mathcal{M} = r\mathcal{F}.$$

Kdy bude těleso v rovnováze? Aby se těleso neposunovalo, musí se součet sil rovnat nule. A aby se těleso neotáčelo, musí se součet momentů sil rovnat nule. Tedy síla od podložky F se musí rovnat vnější svislé síle $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = 2kbw$$

a moment M sil od podložky se musí rovnat momentu $\mathcal{M}$ vnější síly:

$$r\mathcal{F} = \frac{2}{3}kaw.$$

Odsud lze vyjádřit

$$b = \frac{\mathcal{F}}{2kw}$$

a

$$a = \frac{r\,\mathcal{F}}{\frac{2}{3}kw}.$$

Nás zajímá, kdy se levý okraj tělesa zvedne. Jeho polohu snadno určíme ze vztahu $y = ax + b$, tedy:

$$y(-1) = b - a = \frac{\mathcal{F}}{2kw} - \frac{r\mathcal{F}}{\frac{2}{3}kw} = \frac{\mathcal{F}}{2kw}(1 - 3r).$$

Podobně pro pravý okraj tělesa dostaneme:

$$y(1) = b + a = \frac{\mathcal{F}}{2kw}(1 + 3r).$$

Pro $r = 0$, tedy když vnější síla $\mathcal{F}$ působí uprostřed mezi okraji tělesa, je:

$$y(-1) = y(1) = \frac{\mathcal{F}}{2kw} > 0,$$

tedy (vzhledem k tomu, že souřadnice y značí hloubku promáčknutí do měkké podložky) oba okraje dolní stěny tělesa jsou zabořeny do podložky, viz obr. 1 uprostřed.

Pro malé kladné r, tedy když vnější síla působí mírně mimo střed, hloubka $y(-1)$ klesá s r. A při překročení hodnoty $r = \frac{1}{3}$ bude hodnota $y(-1)$ záporná, tedy levý okraj bude nad povrchem měkké podložky. Pro délku předmětu $L = 2$ znamená kritická hodnota $r = \frac{1}{3}$ relativní vzdálenost od středu $\frac{1}{6}$.

Závěr

Na povrchu tuhého tělesa jsou tři stejně velké oblasti, každá o relativní šířce jedna třetina. Když tlačíme v bodě v prostřední oblasti, bude celá spodní stěna tělesa zatlačena do měkké podložky. Když naopak tlačíme v bodě v krajní oblasti, tak se vzdálený spodní okraj tělesa vynoří nad povrch měkké podložky. To je v dobrém souladu s pozorováním, které si snadno čtenář může provést sám.