Pavel Pokorný
Počítání mnohoúhelníků

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 3, 1–15

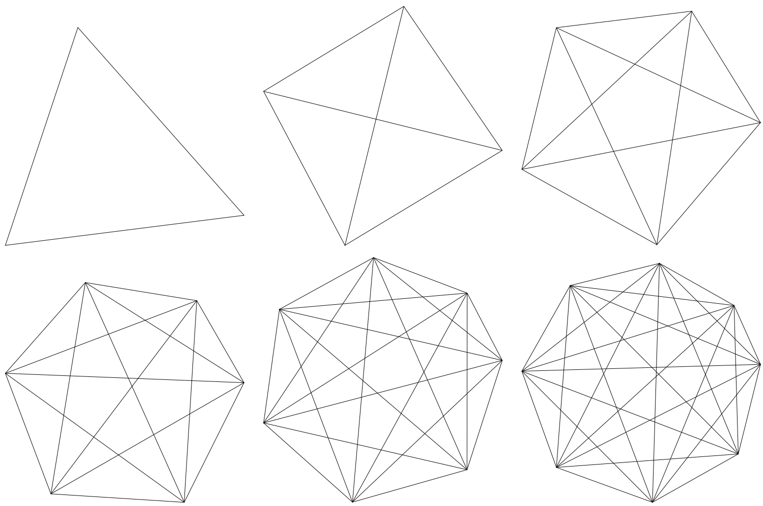
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149269

Počítání mnohoúhelníků

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

1. Úvod

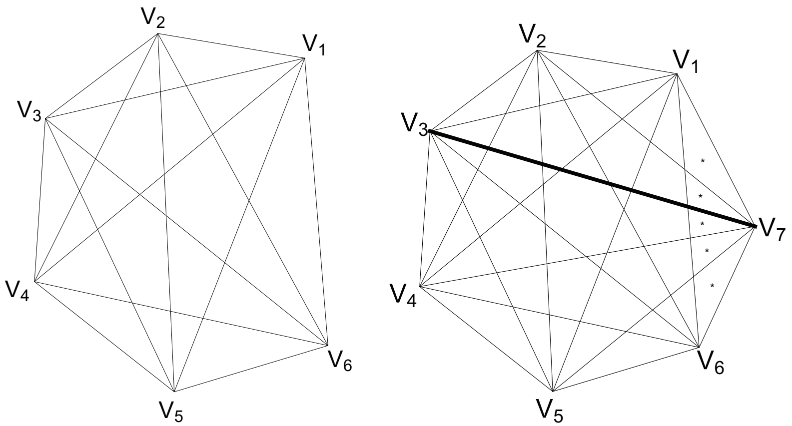
Uvažujme n vzájemně různých bodů nepravidelně rozmístěných na kružnici. Tyto body spojíme úsečkami, každý s každým. Tyto úsečky vytvoří nepravidelné mnohoúhelníky. Zabývejme se otázkou, kolik takových mnohoúhelníků vznikne. Počítáme pouze ty „malé“ mnohoúhelníky, které už nejsou rozděleny úsečkou na menší. Předpokládáme, že nedochází k průsečíku tří a více úseček ve společném bodě nikde uvnitř kruhu. Jsou-li body na kružnici rozmístěny náhodně, má situace, kdy dochází k takovému průsečíku, nulovou pravděpodobnost.



Obr. 1: Příklady obrazců, které vzniknou spojením n bodů úsečkami pro $n \in \{3, \ldots, 8\}$

Označme $m(n)$ počet mnohoúhelníků, které vzniknou spojením n bodů úsečkami. Pro $n = 1$ máme jediný bod, žádnou úsečku, tedy žádný mnohoúhelník. Proto $m(1) = 0$. Podobně pro $n = 2$ dostaneme jedinou úsečku a opět žádný mnohoúhelník. Proto $m(2) = 0$. Z obrázku 1 vidíme, že $m(3) = 1$, protože tři body vytvoří jeden trojúhelník. Dále $m(4) = 4$, protože čtyři body vytvoří jeden čtyřúhelník, který je rozdělen dvěma úhlopříčkami na čtyři trojúhelníky.

2. Rekurentní vztah



Obr. 2: Vlevo: původní obrazec, zde např. pro $n = 6$ bodů. Vpravo: přidání nového bodu, zde vrchol V_7, vytvoří nové mnohoúhelníky

Když se nám nepodaří nalézt rovnou jednoduchý vztah pro závislost počtu mnohoúhelníků $m(n)$ na počtu bodů n, pokusme se najít nejprve vztah, jak spolu souvisí $m(n+1)$ a $m(n)$. Takový vztah se nazývá rekurentní zadání posloupnosti nebo také diferenční rovnice. To znamená, jak se projeví přidání dalšího bodu. Obr. 2 ukazuje tuto situaci pro $n = 6$. Vlevo vidíme 6 vrcholů, zde označených V_1 až V_6, a jejich spojnice, které vytváří mnohoúhelníky. Vpravo vidíme přidaný nový bod V_7. Přidání nového bodu V_{n+1} vytvoří jednak $n-1$ trojúhelníků, na obr. 2 označené hvězdičkou, pro které je nový bod vrcholem. Dále přidání nového bodu V_{n+1} vytvoří n nových úseček, spojnic s n starými body. Některé z těchto nových úseček rozříznou některé staré mnohoúhelníky a vytvoří tak nové mnohoúhelníky. Úsečka V_1V_{n+1} a úsečka V_nV_{n+1} žádný starý mnohoúhelník neříznou. Ale ostatní úsečky ano. Vyberme si jednu takovou úsečku V_iV_{n+1}. Na obr. 2 je to např. úsečka V_3V_7, tedy $i = 3$, která je vyznačena tlustou čarou. Tato úsečka je rozdělena na několik malých úseček spojnicemi mezi ostatními body. Každá z těchto malých úseček (kromě té, která má za jeden svůj krajní bod vrchol V_{n+1}) vytváří jeden další mnohoúhelník tím, že přeřízne jeden původní mnohoúhelník na dvě části. A počet těchto malých úseček je roven počtu spojnic mezi body na obou stranách této úsečky. Vrchol V_i rozdělí vrcholy na dvě skupiny, v jedné jsou vrcholy s menším indexem, těch je $i-1$, a ve druhé skupině jsou vrcholy s větším indexem, těch je $n-i$. Takže počet spojnic je $(i-1)(n-i)$. Na obr. 2 je to $2\times 3 = 6$. Tedy úsečka V_iV_{n+1} vytvoří řezem $(i-1)(n-i)$ nových mnohoúhelníků. Tento přírůstek započítáme pro všechny vrcholy, tedy pro $i \in \{2,\dots,n-1\}$. Ale mohli bychom také uvažovat $i \in \{1,\dots,n\}$, protože pro $i=1$ a pro $i=n$ je součin $(i-1)(n-i)$ nulový. Tak dostáváme důležitý rekurentní vztah

$$m(n+1) = m(n) + n - 1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1)(n-i) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$m(3) = 1. \tag{2}$$

Jak si ukážeme podrobně dále, tuto diferenční rovnici s touto počáteční podmínkou řeší posloupnost

$$m(n) = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12) \tag{3}$$

a její členy pro několik vybraných hodnot n ukazuje tabulka

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	0	0	1	4	11	25	50	91	154

Dva další způsoby řešení této úlohy lze najít v [1] a [2].

3. Součet aritmetické posloupnosti

Nejprve si připravíme několik pomocných výsledků.

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, kde rozdíl mezi sousedy je konstantní. My zde budeme uvažovat posloupnost

$$a_i = i.$$

Ukážeme si čtyři způsoby, jak spočítat součet aritmetické posloupnosti

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

První způsob bude nejjednodušší. Ostatní jsou sice při znalosti toho prvního způsobu zbytečné, ale pro nás budou užitečné, protože podobně najdeme součet kvadratické posloupnosti $\sum_{i=1}^{n} i^2$. I aritmetickou i kvadratickou posloupnost můžeme sčítat od $i = 0$ nebo od $i = 1$, výsledek je stejný.

3.1. Jak to sčítal malý Gauss

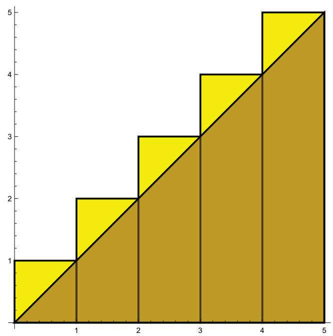
Tento způsob je spojován s německým matematikem jménem Carl Friedrich Gauss (1777–1866). Když chodil malý Gauss ještě do školy, pan učitel chtěl mít chvilku volno, tak zadal svým žákům zdánlivě těžký úkol, totiž sečíst přirozená čísla od 1 do 100. Zatímco se ostatní žáci trápili s dlouhým výpočtem, malý Gauss sečetl první a poslední číslo a dostal 101. Pak sečetl druhé a předposlední a dostal opět 101. Když sečteme dvě čísla stejně vzdálená od konců, dostaneme vždy 101. A těchto párů je 50. Takže součet je $50 \times 101 = 5050$.

Když si napíšeme obecnou aritmetickou posloupnost $a_1, \ldots, a_n$ délky n a pod ní stejnou posloupnost v opačném pořadí a tyto dvě sečteme a vydělíme dvěma, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

3.2. Graficky

Součet $1 + 2 + \cdots + n$ je součet ploch obdélníků o šířce 1 a výšce i, viz obr. 3.



Obr. 3: Součet aritmetické posloupnosti $1 + 2 + \cdots + n$ lze nalézt jako obsah velkého trojúhelníku a obsahy malých trojúhelníků

A velikost této plochy dostaneme jako plochu velkého pravoúhlého trojúhelníku o základně n a výšce n, když přidáme plochy n malých pravoúhlých trojúhelníků o základně 1 a výšce 1, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n+1).$$

3.3. Diskrétní derivace a diskrétní integrál

Jedná se o obdobu derivace a integrálu. Ve škole se bohatě procvičují vztahy pro derivaci mocninné funkce

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

např. $(x^2)' = 2x$ a neurčitý integrál, tedy anti-derivace

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{pro } n \neq -1.$$

Méně pozornosti bývá věnováno obdobným operacím pro posloupnosti.

Lze zavést diskrétní derivaci (též nazývaná diference) pro posloupnost

$$a'_n = a_{n+1} - a_n,$$

např. $(n^2)' = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

To není jediný způsob, jak zavést diskrétní derivaci. V dodatku uvádíme další možnosti.

A jak lze použít diskrétní derivaci pro výpočet součtu posloupnosti? Platí-li pro dvě posloupnosti

$$b = a',$$

tedy

$$b_n = a_{n+1} - a_n,$$

pak můžeme psát

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_1 - a_0 \qquad & a_1 &= a_0 + b_0\\
b_1 &= a_2 - a_1 \qquad & a_2 &= a_1 + b_1 = a_0 + b_0 + b_1\\
b_2 &= a_3 - a_2 \qquad & a_3 &= a_2 + b_2 = a_0 + b_0 + b_1 + b_2\\
b_3 &= a_4 - a_3 \qquad & a_4 &= a_3 + b_3 = a_0 + b_0 + b_1 + b_2 + b_3,
\end{aligned}$$

obecně

$$a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

To lze použít pro výpočet součtu

$$\sum_{i=0}^{n} i$$

tímto způsobem. Ze znalosti

$$(n^2)' = 2n + 1$$

můžeme psát

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = a_{n+1} - a_0$$

$$\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = (n + 1)^2$$

$$2\sum_{i=0}^{n} i + (n + 1) = (n + 1)^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n + 1)^2 - (n + 1)}{2} = \frac{n}{2}(n + 1).$$

3.4. Metoda neurčitých koeficientů

Tento způsob je z našich způsobů nejobecnější. Často se stane, že známe (nebo uhodneme) tvar řešení úlohy, ale neznáme hodnoty koeficientů v tomto výsledku. Např. pro součet mocnin je výsledek ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + k_3 n^3 + k_4 n^4.$$

A jak najdeme neznámé koeficienty $k_0, \ldots, k_4$? Stačí zvolit 5 hodnot n a dostaneme soustavu rovnic pro neznámé koeficienty.

Pro náš případ

$$\sum_{i=0}^{n} i = k_0 + k_1 n + k_2 n^2$$

zvolíme $n = 0, 1, 2$ a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_0 + k_1 + k_2 &= 1 \\ k_0 + 2k_1 + 4k_2 &= 3, \end{aligned}$$

která má řešení

$$k_0 = 0, \qquad k_1 = \frac{1}{2}, \qquad k_2 = \frac{1}{2},$$

takže výsledek je

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n}{2}(n+1)$$

ve shodě s našimi předchozími závěry.

4. Součet kvadratické posloupnosti

Kvadratickou posloupností nazýváme posloupnost čísel a_i, které jsou kvadratickou funkcí indexu i. My budeme uvažovat posloupnost

$$a_i = i^2.$$

Pro součet aritmetické posloupnosti jsme si ukázali čtyři způsoby výpočtu. Kromě toho prvního, jak to počítal malý Gauss, který je krásný, můžeme všechny tři ostatní použít i pro součet kvadratické posloupnosti

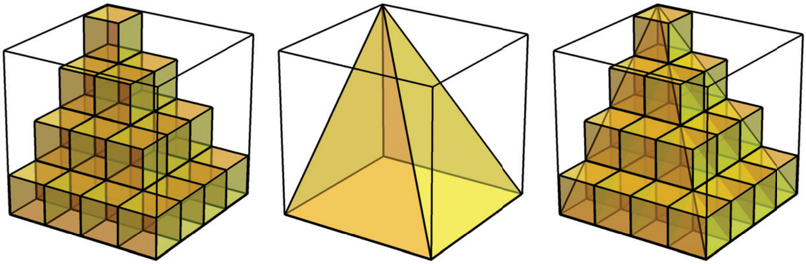
$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

4.1. Graficky

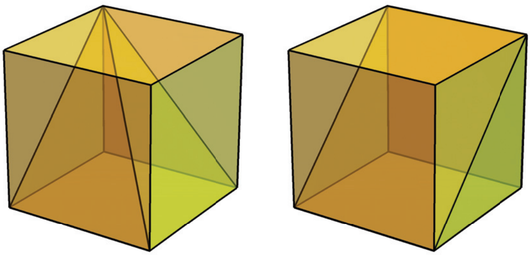
Součet kvadratické posloupnosti

$$\sum_{i=0}^{n} i^2$$

je roven objemu pyramidy sestavené z jednotkových krychliček, viz obr. 4, kde v i-té vrstvě (číslováno odshora) je i^2 krychliček. Tento objem je roven součtu objemu čtyřbokého jehlanu o výšce n a délce strany čtvercové základny také n a objemu části krychliček, které vyčnívají ven z jehlanu.



Obr. 4: Součet kvadratické posloupnosti $1^2+2^2+\cdots+n^2$ lze nalézt jako objem soustavy krychliček srovnaných do pyramidy (levý obrázek), kde v i-té vrstvě je i^2 krychliček. Ten se rovná součtu objemu čtyřbokého jehlanu (prostřední obrázek) a objemu části krychliček na hřbetu a šikmých bocích, které částečně vyčnívají z jehlanu, jak ukazuje pravý obrázek.



Obr. 5: Vlevo: kostka na hřbetu má část o velikosti $\frac{1}{3}$ v jehlanu a částí o velikosti $\frac{2}{3}$ vyčnívá ven. Vpravo: kostka na šikmém boku má část o velikosti $\frac{1}{2}$ v jehlanu a částí o velikosti $\frac{1}{2}$ vyčnívá ven.

Vyčnívající krychličky jsou dvojího druhu.

- Na hřbetu, který vede od horního vrcholu pyramidy do nejvzdálenějšího vrcholu čtvercové podstavy, je n krychliček, které mají s velkým jehlanem společnou část ve tvaru malého jehlanu o objemu $\frac{1}{3}$ a částí o objemu $\frac{2}{3}$ vyčnívají ven, viz obr. 5 levá část. Celkový vyčnívající objem těchto krychliček je $\frac{2}{3}n$.
- Dva šikmé boky vedoucí od hřbetu dolů k podstavě obsahují každý

$$1+2+\cdots+n-1=\frac{n}{2}(n-1)$$

krychliček (krychličky na hřbetu sem už nepatří), které mají polovinu svého objemu v jehlanu a polovina vyčnívá ven, viz obr. 5 pravá část. Celkový vyčnívající objem těchto krychliček je

$$2\,\frac{n}{2}(n-1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}(n-1).$$

Podstava a svislé boky jsou rovné, tam žádné krychličky nevyčnívají. Tedy celkový objem krychliček a součet kvadratické posloupnosti je

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{2}{3}n + \frac{n}{2}(n-1) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

4.2. Součet kvadratické posloupnosti pomocí diskrétní derivace

Podobně jako pro součet aritmetické posloupnosti i pro součet kvadratické posloupnosti můžeme použít diskrétní derivaci posloupnosti.

Ze znalosti

$$(n^3)' = 3n^2 + 3n + 1$$

můžeme psát

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = a_{n+1} - a_0$$

$$\sum_{i=0}^{n} (3i^2 + 3i + 1) = (n+1)^3$$

$$3\sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n + 1 = (n+1)^3$$

a po drobných úpravách opět dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

4.3. Metoda neurčitých koeficientů pro součet kvadratické posloupnosti

Postupujeme podobně jako pro aritmetickou posloupnost. Hledáme výsledek ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + k_3 n^3.$$

Zvolíme $n = 0, 1, 2, 3$ a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k_0 & = 0 \\ k_0 + k_1 + k_2 + k_3 & = 1 \\ k_0 + 2k_1 + 4k_2 + 8k_3 & = 5 \\ k_0 + 3k_1 + 9k_2 + 27k_3 & = 14, \end{aligned}$$

která má řešení

$$k_0 = 0, \qquad k_1 = \frac{1}{6}, \qquad k_2 = \frac{1}{2}, \qquad k_3 = \frac{1}{3},$$

takže výsledek je opět

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

ve shodě s našimi předchozími závěry. Tento způsob výpočtu lze s výhodou provést na počítači, např. pomocí počítačového algebraického systému *Mathematica* těmito příkazy

```
In[1]:= Unprotect[Power];
In[2]:= 0^0 = 1;
In[3]:= n = 3;
In[4]:= a = Table[i^j, {i, 0, n}, {j, 0, n}];
In[5]:= b = Table[Sum[i^2, {i, k}], {k, 0, n}];
In[6]:= k = Inverse[a].b

                1   1   1
Out[6]= {0, -, -, -}
                6   2   3
```

Ale když už máme tak silný nastroj, jako je *Mathematica*, tak můžeme použít přímo příkaz

```
In[1]:= Sum[i^2, {i, n}]

        n (1 + n) (1 + 2 n)
Out[1]= -------------------
                 6
```

a získáme výsledek jediným řádkem.

5. Řešení diferenční rovnice

Nyní máme připravené nástroje pro poctivé vyřešení diferenční rovnice (1)

$$m(n+1) = m(n) + n - 1 + \sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i).$$

Roznásobením pravé strany dostaneme součty konstantní, aritmetické a kvadratické posloupnosti, které již umíme sečíst, takže dostaneme pro závislost $m(n)$ počtu mnohoúhelníků na počtu vrcholů n diferenční rovnici

$$m(n+1) - m(n) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 8n - 6)$$

s počáteční podmínkou

$$m(3) = 1.$$

Ta nám dovoluje postupně počítat hodnoty $m(n)$ pro $n = 3, 4, 5, \dots$ A pomocí metody neurčitých koeficientů nebo pomocí diskrétní derivace najdeme přímo řešení (3)

$$m(n) = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12).$$

Je příjemné, že tento vztah dá $m(1) = 0$ v souladu s pozorováním, že jeden bod nevytváří žádnou úsečku ani žádný mnohoúhelník. A také $m(2) = 0$, kdy dva body sice vytvoří jednu úsečku, ale žádný mnohoúhelník.

6. Počítání mnohoúhelníků na počítači

Výše odvozený analytický výsledek pro $m(n)$, který udává vztah pro výpočet počtu mnohoúhelníků pro libovolný počet bodů, je nejlepší možný závěr. Pro některé úlohy se nám ale nepodaří takto pěkný výsledek získat. Pak se musíme spokojit alespoň s numerickým experimentem.

Pojďme se ještě podrobněji podívat, jak mnohoúhelníky počítáme. Obvykle si na papír načrtneme několik málo bodů, ty spojíme úsečkami a spočítáme vzniklé mnohoúhelníky. Pro malý počet bodů to zvládneme pouhým okem, pro větší počet bodů je dobré si tužkou dělat značky do mnohoúhelníků, které jsme již započítali.

Jak lze tuto úlohu provést na počítači? Lze s výhodou použít matematický software *Mathematica* a následující program

```
n=6;
uhly = Table[2Pi/n*(i+0.2*Sin[Sqrt[32]*i]),{i,n}];
body  = Transpose[{Cos[uhly], Sin[uhly]}];
dvojice = Subsets[body, {2}];
obrazek = Graphics[Line[dvojice]];
rastrovanyobrazek = Rasterize[obrazek, RasterSize ->1000];
binarizovanyobrazek = MorphologicalBinarize[rastrovanyobrazek];
slozky = MorphologicalComponents[binarizovanyobrazek];
m = Max[slozky]-1
```

Co jednotlivé řádky dělají? Nejdříve si připravíme počet bodů, zde $n = 6$. Pak si připravíme úhly určující body na kružnici. Je třeba úhly volit ne rovnoměrně, protože pak by mohl nastat průsečík tří nebo více úseček, jako tomu je např. pro pravidelný šestiúhelník. Toto je úkol, který si vyžaduje pečlivější přístup. Později vytvoříme obrázek a ten budeme rastrovat. Rozložíme jej na velký počet řádků a sloupců, tedy matici malých obdélníků, můžeme jim říkat pixely. Kdybychom měli dokonalé nekonečné rozlišení, tak by nám vyhovovalo téměř libovolné náhodné rozložení bodů na kružnici. Ale protože musíme pracovat pouze s konečným rozlišením, je dobré, aby vzniklé mnohoúhelníky nebyly příliš malé. To je snadné pro velmi malý počet bodů n, ale pro větší n je potřeba pečlivě volit „znáhodnění“ úhlů. Po větším počtu pokusů se nám osvědčila právě tato volba. Výraz

$$\frac{2\pi}{n}\,i, \quad i = 1, \ldots, n$$

by dal rovnoměrné rozložení bodů. Když místo i použijeme

$$i + 0{,}2 \sin(i\sqrt{32}),$$

tak vytvoříme nepravidelné odchylky s amplitudou 0,2.

Další řádek připraví pomocí funkcí `Sin` a `Cos` souřadnice bodů v rovině. Pak si připravíme pomocí příkazu `Subsets` všechny dvojice bodů, koncové body úseček. A příkazem `Graphics` vytvoříme obrázek. Ten rastrujeme příkazem `Rasterize` s rozlišením 1000×1000 bodů. Rastrovaný obrázek převedeme příkazem `MorphologicalBinarize` na binární, kde každý pixel může nabývat pouze jedné ze dvou hodnot. A nakonec příkazem `MorphologicalComponents` obrázek rozdělíme na souvislé komponenty a vznikne matice, kde každý prvek matice obsahuje číslo komponenty, kam daný pixel patří. Jedna komponenta je okolí, proto počet mnohoúhelníků je o jednu menší než největší číslo komponenty. Příkazem

```
Export["obrazek.pdf",obrazek];
```

můžeme obrázek uložit do souboru `obrazek.pdf`.

Takže máme počítačový program, který můžeme použít na výpočet prvních pár členů posloupnosti $m(n)$, např. pro $n = 3, \ldots, 9$. Nyní chceme objevit nějakou zákonitost v těchto datech. Jedna možnost je postupně počítat rozdíly sousedních členů. To je vlastně počítaní diskrétní derivace. Tím vznikne nová posloupnost, kratší o jeden člen. Tento krok můžeme několikrát opakovat. Výsledky si zapíšeme do následující tabulky

1		4		11		25		50		91		154
	3		7		14		25		41		63	
		4		7		11		16		22		
			3		4		5		6			
				1		1		1				

Když po několika krocích dostaneme konstantní posloupnost, znamená to, že naše výchozí posloupnost $m(n)$ je mnohočlen, jehož argument je index n. Řád mnohočlenu je roven počtu kroků vedoucích ke konstantní posloupnosti, zde 4. Jeho koeficienty najdeme řešením soustavy rovnic, kde položíme rovny hodnoty mnohočlenu a členy naší posloupnosti. Tedy máme tvar mnohočlenu

$$m(n) = k_0 + k_1 n + k_2 n^2 + k_3 n^3 + k_4 n^4$$

a soustavu rovnic pro $n = 3, \ldots, 7$

$$\begin{aligned}
k_0 + 3k_1 + 3^2 k_2 + 3^3 k_3 + 3^4 k_4 &= 1\\
k_0 + 4k_1 + 4^2 k_2 + 4^3 k_3 + 4^4 k_4 &= 4\\
k_0 + 5k_1 + 5^2 k_2 + 5^3 k_3 + 5^4 k_4 &= 11\\
k_0 + 6k_1 + 6^2 k_2 + 6^3 k_3 + 6^4 k_4 &= 25\\
k_0 + 7k_1 + 7^2 k_2 + 7^3 k_3 + 7^4 k_4 &= 50.
\end{aligned}$$

Řešením je

$$k_0 = 1, \quad k_1 = -\frac{7}{4}, \quad k_2 = \frac{23}{24}, \quad k_3 = -\frac{1}{4}, \quad k_4 = \frac{1}{24},$$

a tedy posloupnost je dána vztahem

$$m(n) = 1 - \frac{7}{4}n + \frac{23}{24}n^2 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{24}n^4 = \\ = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n^2-3n+12).$$

Pro kontrolu můžeme tento mnohočlen vyčíslit ještě pro $n = 8$ a $n = 9$ a dostaneme

$$m(8) = \frac{1}{24}(8-1)(8-2)(8^2 - 3 \times 8 + 12) = 91$$

a

$$m(9) = \frac{1}{24}(9-1)(9-2)(9^2 - 3 \times 9 + 12) = 154$$

v souladu s našimi výsledky.

7. Encyklopedie posloupností

Když postupným diskrétním derivováním posloupnosti dojdeme ke konstantní posloupnosti, víme, že původní posloupnost je výsledek mnohočlenu, jehož argument je index členů posloupnosti. Ale co když zkoumáme posloupnost, která není výsledkem mnohočlenu? Naštěstí existuje Encyklopedie posloupností (The On-line Encyclopedia of Integer Sequences), kterou založil Neil Sloane v roce 1963. Původně ji vydával v knižní podobě, dnes je dostupná na Internetu na adrese `www.oeis.org` a v srpnu 2020 obsahovala informace o více než 336000 posloupnostech. Když na této stránce vložíme naši experimentálně nalezenou posloupnost

$$1,\ 4,\ 11,\ 25,\ 50,\ 91,\ 154,$$

tak za méně než jednu vteřinu dostaneme odpověď, že tato posloupnost se nachází v uvedené databázi pod číslem A006522, včetně prvních asi 50 členů, několika odkazů na související odborné články, různé významy této posloupnosti, včetně toho našeho, tedy „počet oblastí vytvořených stranami a úhlopříčkami konvexního n-úhelníku v obecné poloze“ a také několik matematických vztahů pro přímý výpočet libovolného členu posloupnosti.

Je to nádhera, zabývat se matematikou v době, kdy máme volně k dispozici takovéto nástroje.

8. Dodatek

V hlavním textu jsme zavedli diskrétní derivaci pro posloupnost vztahem $a'_n = a_{n+1} - a_n$. Pak např.

$$(n^2)' = 2n + 1.$$

Na základě zkušeností s derivacemi funkcí bychom si mohli přát, aby výsledek byl pouze $2n$. Také vyvstává otázka, proč se posunovat dopředu členem a_{n+1}, proč se neposouvat dozadu? Je to možné. Mohli bychom zavést diskrétní derivaci vztahem $a'_n = a_n - a_{n-1}$. Pak např.

$$(n^2)' = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1.$$

To bohužel opět není pouhé $2n$. Ale když tyto dva způsoby zprůměrujeme, tak dostaneme třetí možnou definici diskrétní derivace

$$a'_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}.$$

Pak

$$(n^2)' = \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{2} = 2n.$$

To je v souladu s naším přáním na základě zkušeností s derivacemi funkcí. Ale bohužel pro vyšší mocniny už to tak hezky nedopadá, např.

$$(n^3)' = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2} = 3n^2 + 1.$$

Závěr je, že žádný z těchto způsobů, jak zavést diskrétní derivaci pro posloupnosti, není v dokonalé formální shodě s derivací funkcí. Ale každý z těchto způsobů lze použít pro vybudování teorie pro práci s posloupnostmi. My zde používáme první způsob

$$a'_n = a_{n+1} - a_n.$$

Literatura

[1] Herman, J.,Kučera, R., Šimša, J.: *Counting and Configurations.* Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] Herman, J.,Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.