Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Marcello Ortaggio; Vojtěch Pravda
Abelovu cenu za rok 2019 získala Karen Uhlenbecková

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 66 (2021), No. 1, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148688

Abelovu cenu za rok 2019 získala Karen Uhlenbecková

Marcello Ortaggio, Vojtěch Pravda

Abstrakt. Abelovu cenu získala v roce 2019 matematička Karen Uhlenbecková. Její práce mají důležitý dopad hned na několik oborů matematiky – geometrii, analýzu i matematickou fyziku. Zásadním způsobem ovlivnila moderní pojetí geometrické analýzy. V článku se pomocí relativně jednoduchých příkladů snažíme čtenáře seznámit se dvěma z oblastí, kterými se doposud zabývala. Na závěr též velmi stručně zmiňujeme hlavní výsledky několika jejích prací.

1. Úvod

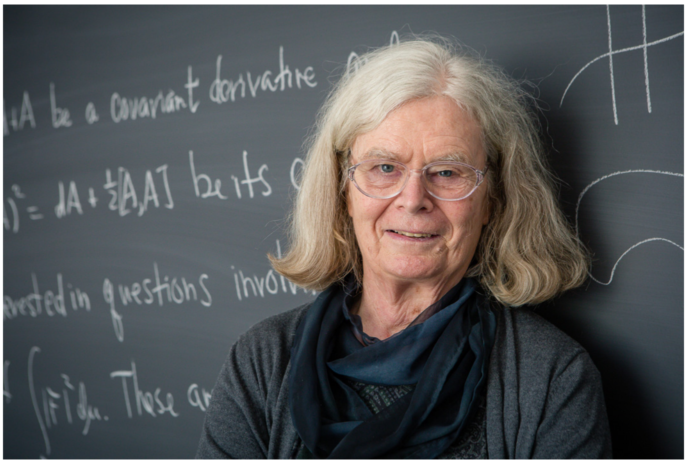
Abelova cena, prestižní matematická cena, založená podle vzoru Nobelovy ceny, je od roku 2003 každoročně udělována za mimořádné matematické objevy a je spojena s prémií 7,5 miliónu norských korun (cca 18 miliónů Kč). V roce 2019 tuto cenu jako první žena získala americká matematička Karen Uhlenbecková.

Univerzitní studia započala studiem fyziky na Michiganské univerzitě. V průběhu studií však nakonec dala přednost matematice. Po celý život se přesto zabývala matematickými tématy úzce souvisejícími s teoretickou fyzikou. Magisterská studia zahájila ročním studiem na Courantově institutu v New Yorku, poté její manžel získal místo na Harvardově univerzitě a Karen Uhlenbecková se tedy přesunula na blízkou Brandeisovu univerzitu, kde nakonec také v roce 1968 pod vedením Richarda Palaise získala doktorský titul. Po ukončení studií řešili s manželem „problém dvou těles“.[1] Karen Uhlenbecková tak vystřídala dvě dočasné pozice – strávila rok na MIT a dva roky v Berkeley. V předních institucích, které měly zájem zaměstnat jejího manžela (MIT, Stanford a Princeton), se jí však trvalé místo získat nepodařilo – jak sama uvádí [2], v té době se spíše očekávalo, že se jako žena bude věnovat péči o rodinu. Nakonec se jí v roce 1971 podařilo uchytit se na University of Illinois v Urbana-Champaign. Toto místo si však příliš neoblíbila, a tak od roku 1976 postupně vystřídala několik dalších univerzit.

Přes obtížný počátek vědecké kariéry se z ní brzy stala uznávaná matematička. V roce 1983 obdržela prestižní grant MacArthur Fellowship, který bývá také neoficiálně nazýván „genius grant“. V roce 1986 byla zvolena do Národní akademie Spojených států amerických. V roce 1990 se stala teprve druhou ženou, která přednesla plenární přednášku na Mezinárodním kongresu matematiků (první takovou ženou byla o 58 let dříve, v roce 1932, Emma Noetherová). V roce 2001 obdržela prestižní grant Guggenheimovy nadace. V současné době je Karen Uhlenbecková emeritní profesorkou na

[1] Takto bývá někdy nazýván obtížný problém vědeckého páru nalézt trvalá místa ve stejném městě.

Dott. Mag. Marcello Ortaggio, Ph.D., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: ortaggio@math.cas.cz, Mgr. Vojtěch Pravda, Ph.D., DSc., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: pravda@math.cas.cz



Obr. 1. Karen Keskulla Uhlenbecková (foto Andrea Kane/Institute for Advanced Study)

Texaské univerzitě v Austinu. Další životopisné údaje o Karen Uhlenbeckové lze nalézt např. v [2], [1], [7].

Ze závěrů jednání komise pro udělení Abelovy ceny ocitujme:

…for her pioneering achievements in geometric partial differential equations, gauge theory and integrable systems, and for the fundamental impact of her work on analysis, geometry and mathematical physics. Karen Keskulla Uhlenbeck is a founder of modern Geometric Analysis. Her perspective has permeated the field and led to some of the most dramatic advances in mathematics in the last 40 years.

I z této citace je zřejmé, že K. Uhlenbecková významně ovlivnila hned několik matematických oborů. Geometrická analýza, ve které zejména působila, je ve své podstatě také mezioborová disciplína propojující diferenciální geometrii a topologii s diferenciálními rovnicemi. V dalších dvou kapitolách se pokusíme pomocí relativně jednoduchých příkladů dopracovat k tomu, abychom mohli alespoň stručně nastínit některé specifické otázky, na nichž pracovala.

2. Variační počet

Variační počet je obor matematické analýzy, k jehož vzniku přispěli např. I. Newton, Jakob a Johann Bernoulliové, L. Euler a další. Tato matematická disciplína se zabývá následující úlohou: Nechť J je nějaký funkcionál, který funkcím f v nějakém prostoru funkcí přiřazuje reálná čísla. Nalezněte funkci f, pro kterou je hodnota J minimální (případně maximální či stacionární).

Klíčovým výsledkem variačního počtu je tzv. Eulerova–Lagrangeova rovnice[2]. Nechť J je funkcionál

$$J(f) = \int_a^b L(f(x),\, f_x(x),\, x)\, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

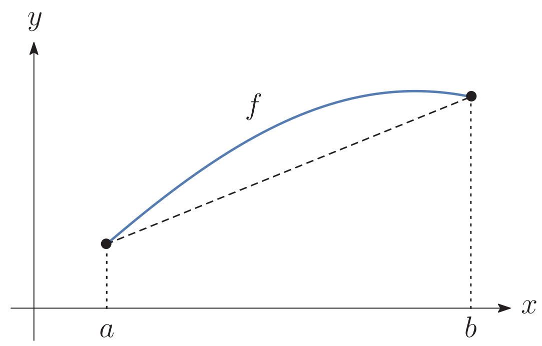
[2] Zde volíme jednoduchý jednorozměrný příklad jako ilustraci složitějších vícerozměrných variačních úloh, které často vedou na komplikované soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

kde f_x je derivace funkce f. Pak hledaná funkce f řešící variační úlohu je řešením Eulerovy–Lagrangeovy rovnice[3]

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial f_x} = 0. \tag{2}$$

Funkce L vystupující v rovnicích (1) a (2) se nazývá Lagrangeova funkce nebo také lagrangián.

Nyní vyřešme úlohu, jejíž řešení každý čtenář jistě zná – nalezení nejkratší spojnice dvou bodů v rovině. Účelem je ilustrovat řešení úloh pomocí variačního počtu.



Obr. 2. Hledáme funkci f reprezentující nejkratší spojnici mezi dvěma body

Délku oblouku křivky spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ v rovině můžeme vyjádřit jako

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f_x(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lagrangeova funkce pro tuto úlohu má tedy tvar

$$L = \sqrt{1 + {f_x}^2}.$$

Vidíme, že $\frac{\partial L}{\partial f} = 0$ a přímým dosazením do Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (2) tedy dostáváme

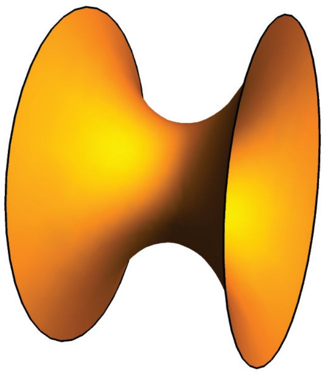
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f_x}{\sqrt{1 + {f_x}^2}} = 0,$$

a tudíž $\frac{f_x}{\sqrt{1+{f_x}^2}} = K$, kde K je konstanta. Odtud ale můžeme vyjádřit ${f_x}^2 = \frac{K^2}{1-K^2}$ a f_x je tedy také konstantní. Funkce f tedy popisuje přímku a nejkratší spojnicí dvou bodů v rovině je, jak je dobře známo, úsečka. Obecně řešení Eulerovy–Lagrangeovy rovnice může odpovídat minimu, maximu nebo stacionárnímu bodu funkcionálu J, případně také může být více lokálních minim atd. a je tedy ještě potřeba studovat, který z těchto případů pro danou úlohu nastává.

[3] Řešení hledáme za daných okrajových podmínek s pevně určenými funkčními hodnotami funkce f v krajních bodech a a b.

Úlohu hledání nejkratší spojnice dvou bodů lze řešit nejen v rovině, ale např. na povrchu koule nebo na obecnějších zakřivených plochách či ve vícerozměrných zakřivených prostorech (na diferencovatelných varietách splňujících dodatečné podmínky). V těchto obecnějších případech se nejkratší spojnice dvou bodů nazývají geodetiky. Lze ukázat, že za poměrně obecných předpokladů vždy v zakřiveném prostoru M existuje nejkratší geodetika spojující libovolné dva body z M (viz Hopfova–Rinowova věta [4]), i když nemusí být jednoznačně určena.

Posuňme se nyní o jednu dimenzi výše a přejděme k minimálním plochám – plochám jejichž obsah je lokálním minimem[4] (tyto plochy lze též definovat jako plochy, které mají ve všech bodech nulovou střední křivost). Mějme v třírozměrném prostoru dvě paralelní kružnice o jednotkovém poloměru. Hledejme nyní plochu, která propojuje tyto kružnice a má minimální obsah. Fyzikálně si můžeme tuto plochu představit jako mýdlovou blánu rozepjatou mezi dvěma drátěnými kružnicemi, která díky povrchovému napětí samovolně zaujme tvar s minimálním obsahem.



Obr. 3. Katenoid – plocha s minimálním obsahem, propojující dvě kružnice

Ze symetrie úlohy vidíme, že se jedná o rotační plochu, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x. Nechť jsou středy drátěných kružnic o jednotkovém poloměru umístěny na ose x v bodech $-b$ a b. Obsah plochy je pak

$$S = \int_{-b}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + f_x(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Nyní tedy již Lagrangeova funkce úlohy $L = f\sqrt{1+{f_x}^2}$ závisí jak na f, tak na f_x a Eulerovu–Lagrangeovu rovnici je obtížnější vyřešit. V tomto případě je vhodné využít toho, že Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na x. Pak se Eulerova–Lagrangeova rovnice zjednodušuje na tzv. Beltramiho identitu $L - f_x \partial L/\partial f_x = K$, kde K je konstanta. Řešením této rovnice je v našem případě tzv. řetězovka

$$f = c\cosh(x/c),$$

kde c je nějaká konstanta a hledanou plochou je katenoid – plocha získaná otáčením řetězové křivky v prostoru (viz obr. 3). Konstantu c je ovšem nutno dopočítat tak,

[4]Každý bod minimální plochy $\mathcal{M}$ má okolí $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ ohraničené uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$ takové, že obsah $\mathcal{K}$ je lokálním minimem mezi všemi plochami se stejnou hranicí.

aby katenoid procházel drátěnými kružnicemi. Řetězovka tedy musí procházet body $[-b, 1]$ a $[b, 1]$. Ukazuje se však, že takové c lze nalézt, pouze pokud jsou tyto kružnice dostatečně blízko u sebe. Přesněji řečeno, řetězovka procházející oběma těmito body existuje pouze pokud $b \lesssim 0{,}663$ (viz např. [5]). Když kružnice oddálíme za tuto mez, mýdlová blána praskne a vzniknou dva mýdlové kruhy vyplňující drátěné kružnice. Toto odpovídá tzv. Goldschmidtovu nespojitému řešení, kdy jsou tyto dva kruhy propojeny úsečkou na ose x. Spojitá plocha propojující tyto kružnice, pokud jejich vzdálenost překročí kritickou mez, neexistuje.

Narozdíl od geodetik tedy pro minimální plochy obecně nemusí existovat řešení variační úlohy splňující požadované podmínky. R. Palais a S. Smale nalezli jistou postačující podmínku, která garantuje existenci řešení určité třídy vícerozměrných variačních úloh. Bohužel, pro celou řadu variačních úloh, včetně úlohy hledání minimálních ploch, není tato podmínka splněna, i když hledaná minimální plocha existuje. Ve své nejcitovanější práci [8] K. Uhlenbecková spolu s J. Sacksem detailně analyzovali právě ty situace, v nichž nejsou splněny Palaisovy–Smaleovy podmínky a podařilo se jim nalézt existenční podmínky pro minimální 2-sféry na kompaktních Riemannových varietách. Jak uvádí nositel Fieldsovy medaile S. Donaldson ve svém článku [3] věnovaném matematickým výsledkům K. Uhlenbeckové, přelomová práce J. Sackse a K. Uhlenbeckové [8] měla výrazný vliv na další vývoj v různých oblastech matematiky, např. v teorii minimálních podvariet, Riemannově geometrii, symplektické topologii a teorii diferenciálních rovnic.

3. Kalibrační teorie

K. Uhlenbecková významně ovlivnila i matematický výzkum Yangových–Millsových rovnic, které C. N. Yang a R. Mills odvodili při studiu kalibračních teorií teoretické fyziky (viz [14]). V matematické řeči lze tyto rovnice formulovat pomocí diferenciální geometrie a grup.

Pro první seznámení s aspekty kalibrační teorie, která vyžaduje matematické znalosti výrazně nad rámec tohoto článku, uveďme následující analogii. Již ze střední školy víme, že při popisu zákona zachování energie v gravitačním poli můžeme hmotnému tělesu přiřadit potenciální energii mgh, kde m označuje hmotnost tělesa, g tíhové zrychlení a h je výška nad zvolenou nulovou úrovní. Stejně tak bychom však mohli tuto energii zavést jako $mgh + k$, kde k je nějaká konstanta. Volba hodnoty k nemá na fyziku této úlohy vliv a volba $k = 0$ je tedy pouze praktickou konvencí. Analogická situace nastává u kalibračních teorií. Jejich základní vlastností je, že se zde pracuje s fyzikálně neměřitelnými matematickými objekty (jde např. o některá skalární či vektorová pole), od nichž jsou fyzikálně měřitelné veličiny odvozené. Různé konfigurace těchto polí pak mohou popisovat stejnou fyzikální situaci. V takovém případě jsou tyto různé konfigurace svázány tzv. kalibrační transformací.

Nejjednodušším příkladem kalibrační teorie je Maxwellova teorie elektromagnetizmu. Yangovy–Millsovy rovnice jsou pak zobecněním Maxwellových rovnic. Zastavme se tedy nejprve u Maxwellových rovnic.

Tradiční učebnicová verze Maxwellových rovnic svazující vektory intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ a magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ (v jednotkách, pro které platí $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$) zní

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Rovnice (4) zajišťují, že $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ můžeme vyjádřit pomocí skalárního potenciálu ϕ a vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{5}$$

S využitím (5) jsou rovnice (4) identicky splněny. V klasické elektrodynamice můžeme potenciály ϕ a $\boldsymbol{A}$ považovat za pomocné veličiny, zatímco fyzikální měřitelné veličiny jsou $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. Potenciály totiž nejsou určeny jednoznačně. Kalibrační transformace

$$\phi \mapsto \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi, \tag{6}$$

kde χ je libovolná funkce, vede prostřednictvím (5) na stejná vektorová pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. Vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a Maxwellovy rovnice jsou tedy invariantní vůči kalibrační transformaci (6).

Maxwellovy rovnice lze také formulovat kovariantně pomocí tenzorového počtu. V tomto tvaru je lorentzovská invariance této teorie viditelnější.[5] Když definujeme čtyřproud $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ (kde $\mu = 0, 1, 2, 3$) a z komponent $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sestavíme antisymetrický tenzor 4×4

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

pak Maxwellovy rovnice (3) a (4) lze vyjádřit ve tvaru[6]

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \qquad \partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0. \tag{8}$$

S využitím (5) můžeme zavést čtyřpotenciál $A_\mu = (-\phi, \boldsymbol{A})$ a $F_{\mu\nu}$ vyjádřit jako

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{9}$$

Druhá rovnice z (8) je pak identicky splněna. Kalibrační transformaci (6) pak zapíšeme jako

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi. \tag{10}$$

[5] Pracujeme se signaturou $(-+++)$.

[6] V první rovnici v (8) používáme tzv. Einsteinovu sumační konvenci – opakuje-li se ve vztahu nějaký index, pak sčítáme přes všechny jeho hodnoty. První komponentu rovnice $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$, neboli $\partial_\nu F^{0\nu} = j^0$ můžeme tedy rozepsat jako $\partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = -j^0$. Hranaté závorky ve druhé rovnici v (8) značí antisymetrizaci v indexech ρ, μ, ν.

Maxwellovu teorii lze také formulovat jako variační problém. První soustava v (8) reprezentuje Eulerovu–Lagrangeovu rovnici odpovídající akci

$$S = \int_M \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right) \mathrm{d}^4 x, \tag{11}$$

kde integrujeme přes prostoročas M (který pro jednoduchost považujme za plochý Minkowského prostoročas).

Nejelegantnější tvar mají Maxwellovy rovnice v řeči diferenciálních forem:[7]

$$\mathrm{d} * \boldsymbol{F} = *\boldsymbol{J}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0, \tag{12}$$

kde komponenty formy $\boldsymbol{F}$ jsou dány vztahem (7) a symbol $*$ je Hodgeův operátor. 1-forma čtyřpotenciálu je spojena s 2-formou $\boldsymbol{F}$ vztahem $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ (viz (9)), kalibrační transformace odpovídá vztahu $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \mathrm{d}\chi$ a kalibrační invariance je prostým důsledkem operátorové identity $\mathrm{d}^2 = 0$.

Z pohledu kalibračních teorií lze na transformaci (10) nahlížet jako na prvek abelovské grupy $U(1)$[8]. V průkopnické práci C. N. Yanga a R. Millse z roku 1954 a v řadě navazujících prací dalších autorů byl pojem kalibrační invariance zobecněn i na případ neabelovských grup (C. N. Yang a R. Mills se původně zajímali o grupu $SU(2)$[9] spojenou s izospinem).

Nechť G je (kompaktní, polojednoduchá) Lieova grupa a $\{t_a\}$, $a = 1, \ldots, \dim(G)$, (anti-hermitovské) generátory Lieovy algebry splňující komutační relace

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c, \tag{13}$$

kde f^{abc} jsou strukturní konstanty.

Za účelem definování kovariantní derivace se zavádí konexe, neboli kalibrační potenciál A_μ (maticová 1-forma), kterou lze vyjádřit pomocí generátorů Lieovy algebry vztahem

$$A_\mu = A_\mu^a t^a. \tag{14}$$

Při kalibrační transformaci g patřící do kalibrační grupy G se konexe A_μ transformuje jako

$$A_\mu \mapsto g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) g^{-1}, \tag{15}$$

kde g je funkcí časoprostorových souřadnic. Nyní můžeme vyjádřit kovariantní derivaci působící na skalární pole $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ jako $D_\mu \psi = (\partial_\mu + A_\mu)\psi$. Tenzor $\boldsymbol{F}$ (maticová 2-forma) pak hraje roli křivosti a je vyjádřen pomocí komutátoru $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$, neboli

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{16}$$

[7] Tučným fontem značíme v tomto článku jak třírozměrné vektory, tak čtyřrozměrné formy.

[8] $U(1)$ je unitární grupa dimenze 1. Intuitivně si jí můžeme představit jako množinu komplexních jednotek $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, kde $\theta \in [0, 2\pi)$.

[9] $SU(2)$ je grupa komplexních matic

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

a transformuje se jako $F_{\mu\nu} \mapsto gF_{\mu\nu}g^{-1}$. V řeči forem dostáváme $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A}$. Všimněme si, že pokud za G zvolíme $U(1)$ tak, jak je tomu u Maxwellových rovnic, je $F_{\mu\nu}$ kalibračně invariantní. Pro neabelovské grupy je kalibračně invariantní stopa $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$. Yangova–Millsova teorie tak může být definována pomocí kalibračně invariantní akce

$$S = \frac{1}{2} \int_M \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\ \mathrm{d}^4x, \tag{17}$$

která vede na (nelineární) Yangovy–Millsovy polní rovnice

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \tag{18}$$

Pro $G = U(1)$ platí $[A_\mu, A_\nu] = 0$ a tyto rovnice se redukují na bezzdrojové ($j^\mu = 0$) Maxwellovy rovnice.

Kromě řady fyzikálních otázek otevřela Yangova–Millsova teorie i mnoho otázek matematických. K. Uhlenbecková zásadním způsobem přispěla k nalezení odpovědí na celou řadu z nich. Zajímala se zejména o eukleidovskou verzi Yangových–Millsových rovnic s kompaktní kalibrační grupou (která má kromě matematického významu i aplikace v kvantové teorii pole). Nadále tedy budeme předpokládat pozitivně definitní signaturu (doposud jsme v této kapitole předpokládali lorentzovskou signaturu).

3.1. Existence „správné“ kalibrace

V kalibrační teorii jsou konfigurace pole lišící se pouze o kalibrační transformaci fyzikálně ekvivalentní. Vyvstává tak přirozeně otázka, zda lze zvolit nějakou speciální kalibraci, která bude mít (alespoň lokálně) požadované vlastnosti. Například v případě $U(1)$ kalibrační teorie (tedy v Maxwellově teorii) lze bez újmy na obecnosti zavést Lorenzovu kalibrační podmínku $\partial_\mu A^\mu = 0$. V neabelovském případě je však tato otázka mnohem složitější. V práci [10] nalezla K. Uhlenbecková postačující podmínky pro lokální existenci takové kalibrace (v článku nazvané „Coulombova kalibrace“) pro neabelovská kalibrační pole na kouli v $\mathbb{R}^n$. Toto je splněno za předpokladu, že křivost je v jistém smyslu „dostatečně malá“. Důležité je, že v této kalibraci přecházejí Yangovy–Millsovy rovnice na eliptický systém. K. Uhlenbecková také diskutuje, jak lze tento výsledek využít ke studiu regularity řešení Yangových–Millsových rovnic.

3.2. Odstranitelné singularity

Další matematická otázka související s kalibračními teoriemi je otázka regularity řešení Yangových–Millsových rovnic. V případě neabelovských grup není křivost kalibračně invariantní (viz (16)) a kalibrační transformace, která není hladká, tak může ovlivnit její regularitu. Výběr vhodné kalibrace tedy může být v neabelovském případě komplikovanější. V práci [11] dokázala K. Uhlenbecková teorém o lokální regularitě řešení Yangových–Millsových rovnic ve čtyřech dimenzích. Ukázala, že řešení s bodovou singularitou (řešení na kouli s vyjmutým počátkem, $B^4\backslash\{0\}$) je kalibračně ekvivalentní hladkému řešení za předpokladu, že L^2 norma křivosti je konečná. Jinými slovy, bodové singularity jsou odstranitelné.

3.3. (Ne)samoduální řešení

Další zajímavé vlastnosti kalibračních teorií souvisí s dualitou. Jako jednoduchý příklad si uveďme elektromagnetickou dualitu – Maxwellovy rovnice (3) a (4) za nepřítomnosti zdrojů (tj. $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$) se nezmění při substituci $\boldsymbol{E} \mapsto \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \mapsto -\boldsymbol{E}$. Tato dualita je ještě markantnější při přechodu do eukleidovské signatury (toho lze dosáhnout Wickovou rotací $t = \mathrm{i}\tau$ a redefinicí $\boldsymbol{E} \mapsto \mathrm{i}\boldsymbol{E}$), protože potom se dualita redukuje na $\boldsymbol{E} \mapsto \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{E}$. Pak můžeme studovat speciální konfigurace pole – tzv. samoduální řešení splňující $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}$. Tato řešení mají zajímavou vlastnost: pokud platí dvě Maxwellovy rovnice (4) (tedy pokud $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou vyjádřeny pomocí potenciálů (5)), pak další dvě Maxwellovy rovnice (3) jsou pro samoduální řešení také automaticky splněny. Toto pozorování může být užitečné při hledání řešení Maxwellových rovnic, protože podmínka samoduality je rovnice prvního řádu, zatímco Maxwellovy rovnice (vyjádřené pomocí potenciálů (5)) jsou rovnice druhého řádu.

Podobná dualita existuje i pro obecnější Yangovy–Millsovy teorie. Po několik let zůstávala nezodpovězená otázka, zda existují nesamoduální řešení Yangových–Millsových rovnic na čtyřsféře S^4. Na základě analogie s problémem harmonických zobrazení z S^2 do S^2 byla očekávána neexistence takových řešení. K. Uhlenbecková ve společné práci s L. M. Sibnerem a R. J. Sibnerem [9] však ukázala, že ve skutečnosti existuje nekonečné množství takových řešení.

3.4. Hermitovské Yangovy-Millsovy konexe

Uvažujme holomorfní vektorový fibrovaný prostor E ranku r nad kompaktní komplexní varietou M s Kählerovou metrikou g. Je-li dána hermitovská metrika h na vláknu z E, můžeme definovat preferovanou hermitovskou konexi, kompatibilní s holomorfní strukturou. Taková konexe se nazývá hermitovská Yangova–Millsova konexe, pokud její křivost F splňuje $\mathrm{Tr}_g F = \mu I$, kde I je jednotkový endomorfismus E a μ je konstanta.

K. Uhlenbecková a S. T. Yau v práci [12] (viz také [13]) dokázali, že stabilní holomorfní vektorový fibrovaný prostor nad kompaktní Kählerovou varietou připouští právě jednu hermitovskou Yangovu–Millsovu konexi (definice stability je zde dosti technická, viz [12] a reference tamtéž). Tento výsledek, spolu s předchozími výsledky S. Donaldsona, znamenal výrazný pokrok v kontextu tzv. Kobayashiho–Hitchinovy korespondence a měl významný dopad na následný výzkum v tomto směru (viz např. [6]).

Poděkování. Tento článek byl podpořen projektem RVO 67985840 a grantem GAČR 19-09659S.

L i t e r a t u r a

[1] Al-Khalili, J.: *A biography of Karen Uhlenbeck* [online]. `https://www.abelprize.no/c73996/binfil/download.php?tid=74107`

[2] Ambrose, S., et al.: *Journeys of women in science and engineering, no universal constants.* Temple University Press, Philadelphia, 1997.

[3] Donaldson, S.: *Karen Uhlenbeck and the Calculus of Variations.* Notices Amer. Math. Soc. 66 (2019), 303–313.

[4] Hopf, H., Rinow, W.: *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche.* Comm. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.

[5] Isenberg, C.: *The science of soap films and soap bubbles*. Dover Publications, New York, 1992.

[6] Lübke, M., Teleman, A.: *The Kobayashi–Hitchin correspondence*. World Scientific, Singapore, 1995.

[7] O'Connor, J. J., Robertson, E.: *Karen Keskulla Uhlenbeck* [online]. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Uhlenbeck_Karen/`

[8] Sacks, J., Uhlenbeck, K.: *The existence of minimal immersions of 2-spheres*. Ann. of Math. 113 (1981), 1–24.

[9] Sibner, L. M., Sibner, R. J., Uhlenbeck, K.: *Solutions to Yang-Mills equations that are not self-dual*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 86 (1989), 8610–8613.

[10] Uhlenbeck, K. K.: *Connections with L^p bounds on curvature*. Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31–42.

[11] Uhlenbeck, K. K.: *Removable singularities in Yang-Mills fields*. Comm. Math. Phys. 83 (1982), 11–29.

[12] Uhlenbeck, K., Yau, S. T.: *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*. Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), S257–S293.

[13] Uhlenbeck, K., Yau, S. T.: *A note on our previous paper: On the existence of Hermitian Yang-Mills connections in stable vector bundles*. Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), 703–707.

[14] Zhang, D.: *C. N. Yang a současná matematika*. PMFA 39 (1994), 305–317.