Rozhledy matematicko-fyzikální

Jiří Dvořák; Marie Snětinová

Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 2, 12–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148000

Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda

Jiří Dvořák, MFF UK, Praha – Marie Snětinová, MFF UK, Praha

Abstrakt. V tomto příspěvku se zabýváme základy teorie pravděpodobnosti a zaměřujeme se na tzv. geometrickou pravděpodobnost. Představujeme zdánlivě velmi jednoduchý problém, u kterého se však ukáže, že má několik různých řešení. Tento problém je znám jako Bertrandův paradox. Předkládáme tři různá řešení problému a diskutujeme, proč si vzájemně neodporují.

Náhoda a pravděpodobnost

Představa, že některé jevy ve světě se odehrávají „náhodně“, nám usnadňuje jejich popis, zkoumání a předvídání. Pro zkoumaný jev (například hod kostkou) vytvoříme pravděpodobnostní model (může nastat šest různých výsledků a všechny jsou stejně pravděpodobné) a v rámci tohoto modelu můžeme odpovídat na různé otázky (jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo?). Naše odpovědi jsou pak platné v rámci tohoto modelu. Podstatnou otázkou samozřejmě zůstává, jak dobrý je zvolený model, jak blízko je skutečnosti (je kostka správně vyvážená nebo má některá strana větší šanci padnout?). To však už není otázka pravděpodobnostní.

Příkladem situace, kdy je užitečné řešit daný problém pomocí pravděpodobnostních úvah, je kromě hazardních her třeba rozhodování, kolik posádek má mít v dané denní době v pohotovosti stanice zdravotnické záchranné služby. Pokud je případů, ke kterým se vyjíždí, málo, stačí jedna posádka. Pokud se ale stává, že se vyskytne více případů krátce po sobě, je nutné mít k dispozici více posádek, aby dojezdový čas zůstal přiměřený. Samozřejmě není možné vědět, kolik případů se objeví zítra, za měsíc, za rok, můžeme se však na počet případů dívat jako na náhodné číslo a zařídit se podle toho. Dalším příkladem může být budování protipovodňových hrází: jak vysoká musí být hráz, aby v jednom roce přetekla s pravděpodobností nejvýše jedno promile?

Klasická pravděpodobnost

Nejjednodušší situací při studiu náhody je, když uvažujeme pouze konečný počet možných výsledků experimentu (takzvaných elementárních jevů), přičemž jsou všechny výsledky stejně možné a žádný není zvýhodněn ani znevýhodněn. Množinu všech možných (navzájem různých) výsledků označíme $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, kde jednotlivá ω_i jsou elementární jevy. Pravděpodobnost jevu A, kterému odpovídá k různých elementárních jevů, tj. $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, je potom k/n, tedy podíl počtu elementárních jevů příznivých jevu A a celkového počtu elementárních jevů.

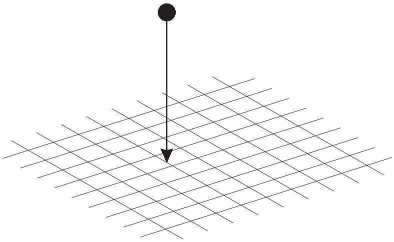
Učebnicovým příkladem je hod šestistěnnou kostkou: možných výsledků hodu je celkem 6, $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, a předpokládáme-li férovost kostky, má každé číslo (každý elementární jev) pravděpodobnost 1/6. Pravděpodobnost nějakého jevu, například $A = \{$na kostce padne liché číslo$\}$, je pak rovna 3/6, protože celkem tři elementární jevy jsou příznivé jevu A. Podobným způsobem můžeme popisovat situace jako házení mincí, hod třemi kostkami, tahání míčků z urny a podobně.

Geometrická pravděpodobnost

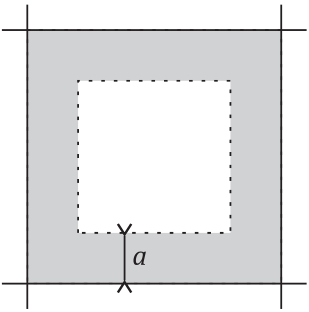
S uvedeným postupem už si nevystačíme, pokud je celkový počet možných výsledků nekonečný. Postup ovšem můžeme jednoduše upravit pro situace, kdy se dají možné výsledky experimentu popsat body v nějaké souvislé podmnožině přímky, roviny či trojrozměrného prostoru atd., přičemž opět žádné výsledky nejsou zvýhodněny ani znevýhodněny. Označme tuto množinu opět Ω. Pravděpodobnost nějakého jevu $A \subset \Omega$ je potom rovna podílu velikosti A ku velikosti Ω, kde velikostí množiny myslíme například její délku, plochu či objem, podle dimenze množiny Ω.

Uvažme příklad ze života: jdete po ulici, v ruce máte klíče od domu a zrovna když překračujete víko kanálu, klíče vám vypadnou z ruky (zákon schválnosti). Jaká je pravděpodobnost, že klíče cinknou o kanál? Pro účely našeho příkladu budiž kanál tvořen nekonečnou periodickou mříží se čtvercovými otvory o délce strany 1 jednotka a nulovou tloušťkou tyčí. Klíče jsou, matematicky vzato, kulička o poloměru a jednotek, kde a je kladné číslo menší než 1/2, a padají z výšky kolmo na mříž v náhodném místě. Obr. 1 ilustruje tuto (idealizovanou) situaci.

Protože je mříž periodická, omezíme se v následující úvaze jen na jeden čtverec, tedy $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Skutečnost, že klíče upustíme v náhodném místě, pro nás znamená, že střed kuličky (klíčů) se nachází na náhodném místě v uvažovaném čtverci, přičemž žádná pozice není pravděpodobnější než jiné. Elementární jev $\omega_i \in \Omega$ tedy určuje pozici středu kuličky a tím celý výsledek experimentu. Zřejmě klíče o kanál cinknou, pokud se střed kuličky nachází blíže k hraně čtverce než je jeho poloměr a, viz obr. 2. Na něm šedá plocha vyznačuje pozice středu, které jsou příznivé cinknutí. Spočítat je ale nemůžeme, je jich nekonečně mnoho. Protože však žádná pozice není preferovaná, využijeme místo toho plochu množiny příznivých výsledků. Plocha celého čtverce (všech možných výsledků) je 1 čtvereční jednotka, plocha množiny příznivých výsledků je $1 - (1 - 2a)^2 = 4a(1 - a)$, viz obr. 2. Pravděpodobnost, že klíče cinknou, je tedy $4a(1 - a)$.



Obr. 1: Klíče padající do kanálu



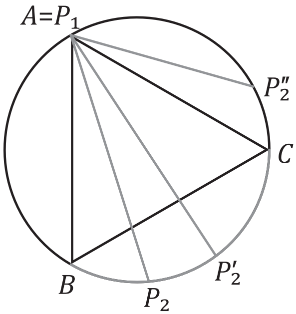
Obr. 2: Zakreslení případů, kdy klíče cinknou o kanál

Náhodná tětiva

Pomocí geometrické pravděpodobnosti je možné řešit celou řadu zajímavých otázek. Nás teď bude zajímat následující situace. Vezmeme kružnici o jednotkovém poloměru, v níž je vepsaný rovnostranný trojúhelník ΔABC. Náhodně zvolíme tětivu, která tuto kružnici protíná. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy uvnitř kružnice je větší než délka strany vepsaného rovnostranného trojúhelníku? Tuto otázku poprvé položil Joseph Bertrand v roce 1889 ve své knize [1]. Mezi českými zdroji můžeme doporučit například [2, s. 20]. Ukážeme si tři způsoby řešení naší otázky.

První způsob

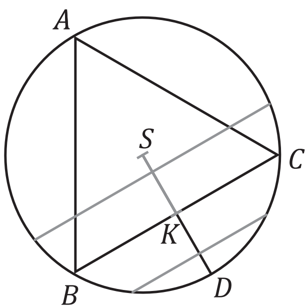
Tětiva protínající naši kružnici je určená dvěma průsečíky P_1, P_2 s kružnicí. Protože ve skutečnosti záleží jen na vzájemné poloze obou průsečíků, první z nich umístíme pevně do bodu $A = P_1$ a druhý průsečík P_2 umístíme náhodně na kružnici. Situaci znázorňuje obr. 3. Tětiva je delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když průsečík P_2 leží na oblouku kružnice mezi body B, C. Tento oblouk zabírá přesně třetinu obvodu kružnice, proto hledaná pravděpodobnost je $1/3$.



Obr. 3: Tětiva určená dvěma průsečíky s kružnicí

Druhý způsob

Tětiva protínající naši kružnici je určená svou orientací a vzdáleností od středu S naší kružnice. Protože celá situace nezávisí na otočení kolem středu kružnice, budeme vybírat takovou tětivu, která je rovnoběžná se stranou BC vepsaného trojúhelníku, tedy kolmá na úsečku SD, viz obr. 4. Tím je určená orientace tětivy. Nyní stačí vybrat náhodně polohu středu tětivy na úsečce SD.

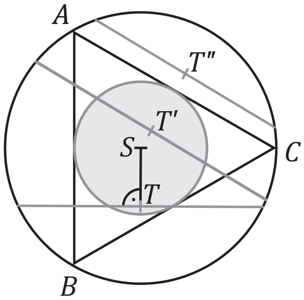


Obr. 4: Tětiva určená vzdáleností od středu kružnice

Označme K průsečík úseček BC a SD. Vybraná tětiva bude delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když náhodně vybraný střed tětivy bude ležet blíže středu kružnice S než bod K, viz opět obr. 4. Protože bod K leží přesně v polovině úsečky SD, je hledaná pravděpodobnost 1/2.

Třetí způsob

Délka tětivy protínající naši kružnici je určená polohou svého středu T. Zřejmě taková tětiva je kolmá na úsečku TS, viz obr. 5. Vyberme tedy náhodně bod T uvnitř kruhu, jehož hranici tvoří naše kružnice. Obr. 5 ukazuje, že vybraná tětiva bude delší než strana trojúhelníku ABC právě tehdy, když její střed T leží uvnitř kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Protože její poloměr je roven polovině poloměru naší původní kružnice, je plocha kruhu určeného kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC čtvrtinou plochy kruhu určeného kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Hledaná pravděpodobnost je tedy 1/4.



Obr. 5: Tětiva určená polohou svého středu

Bertrandův paradox

Uvedenými postupy jsme dostali celkem tři rozdílné odpovědi. Na první pohled není jasné, která odpověď je správná, proto se tato úloha tradičně označuje slovem „paradox". Znamená to, že jsme udělali nějakou chybu? Neudělali, všechny tři odpovědi jsou správné.

Jak je to možné? Jádro pudla je v tom, že v zadání úlohy jsme neurčili, jaký způsob vybírání „náhodné tětivy" máme na mysli. Proto jsme mohli uvažovat tři různé způsoby, jak tětivu náhodně vybírat. Tyto způsoby ale nejsou rovnocenné – některé tětivy mají větší šanci být vybrány jedním způsobem než jiným. Jinými slovy, ze zadání úlohy není jasné, jaký pravděpodobnostní model (způsob výběru náhodné tětivy) máme zvolit. Abychom byli schopni na zadanou otázku odpovědět, musíme si nějaký model vybrat. Naše odpověď pak bude správná v rámci tohoto modelu. Je ovšem možné zvolit i jiné modely a v jejich rámci mohou být správné jiné odpovědi. V předchozích odstavcích jsme popsali tři různé modely (způsoby výběru náhodné tětivy), ale je určitě možné vymyslet i jiné modely, které povedou k jiným výsledkům.

Tuto nejednoznačnost může být těžké si představit v případě, kdy máme nekonečně mnoho možných výsledků. Můžeme si ale představit jednodušší situaci s konečným počtem možných výsledků: náhodně vybereme číslo mezi 1 a 12, jaká je pravděpodobnost, že to bude číslo 12? Pokud například házíme dvanáctistěnnou kostkou (ano, i takové se vyrábějí), jsou všechna čísla stejně pravděpodobná a odpověď je, že pravděpodobnost vybrání čísla 12 je 1/12.

Co když ale místo toho vybíráme z klobouku, který obsahuje pohmatem nerozlišitelné kuličky označené čísly 1 až 12, přičemž ale každé sudé číslo je na dvou kuličkách? V takovém případě je v klobouku celkem 18 kuliček a pravděpodobnost vytažení čísla 12 je $2/18 = 1/9$.

Nakonec můžeme číslo vybírat tak, že hodíme dvěma šestistěnnými kostkami a hodnoty sečteme. Potom číslo 12 dostaneme pouze tak, že na obou kostkách padne číslo 6, což má pravděpodobnost $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Opět jsme viděli tři různé způsoby vybírání čísla, tři různé modely pro „náhodný výběr čísla“. Tyto modely nebyly rovnocenné a vedly k rozdílným odpovědím. Pokud tedy není už při zadání otázky určeno, jak výběr probíhá, není možné jednoznačně říci, co je správná odpověď.

Literatura

[1] Bertrand, J.: *Calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, Paříž, 1889.
[2] Anděl, J.: *Matematika náhody.* Matfyzpress, Praha, 2007.

19 úloh pre rok 2019

Dušan Jedinák, Trnava

1. Stanovte, koľkými nulami končí číslo, ktoré je súčinom prvých 2019 prvočísel.

2. Stanovte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2019.