

Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 2, 56–60

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/147267>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2018

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Náš soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. září 2018* na adresu redakce.

Úloha 71 V rovnoběžníku $ABCD$ se stranami celočíselných délek a , b , $a \neq b$, sestrojíme osy vnitřních úhlů. Tyto osy ohraničují čtyřúhelník $KLMN$.

- Dokažte, že $KLMN$ je pravoúhelník.
- Najděte poměry $a : b$ všech takových rovnoběžníků, pro něž je celočíselný podíl obsahů

$$S(ABCD) : S(KLMN) \quad \text{nebo} \quad S(KLMN) : S(ABCD).$$

(Jaroslav Zhouf)

Úloha 72 *Korková krychle*

Korkové těleso tvaru krychle o délce hrany a , hmotnosti m_1 a hustotě $\rho_1 = 250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je ve vzduchu o molární hmotnosti $M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a teplotě $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ při atmosférickém tlaku $p_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ vyváženo na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti $m_2 = 600 \text{ g}$ a hustotě $\rho_2 = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaká by byla hmotnost korkové krychle ve vakuu? Určete také délku hrany korkové krychle.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

Vzduch považujte při řešení úlohy za ideální plyn, molární plynová konstanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

(Miroslava Jarešová)

Řešení úloh z čísla 3/2017

Úloha 65 V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x^4 + y^4 &= 7\end{aligned}\quad (\text{Jaroslav Zhouf})$$

Řešení: Danou soustavu upravíme na tvar:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 1 \\(x^2 + y^2)^2 &= 7 + 2x^2y^2\end{aligned}$$

Z první rovnice dosadíme do druhé rovnice, takže pak postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}(1 - 2xy)^2 &= 7 + 2x^2y^2 \\1 - 4xy + 4x^2y^2 &= 7 + 2x^2y^2 \\2x^2y^2 - 4xy - 6 &= 0 \\x^2y^2 - 2xy - 3 &= 0 \\(xy - 3)(xy + 1) &= 0\end{aligned}$$

V prvním případě řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}xy &= 3 \\x + y &= 1\end{aligned}$$

Odsud je postupně:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 3 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2}\end{aligned}$$

V tomto případě má daná soustava dvě řešení:

$$(x, y) = \left(\frac{1 + \sqrt{11}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{11}i}{2} \right), \quad (x, y) = \left(\frac{1 - \sqrt{11}i}{2}, \frac{1 + \sqrt{11}i}{2} \right)$$

Ve druhém případě řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}xy &= -1 \\x + y &= 1\end{aligned}$$

NAŠE SOUTĚŽ

Odsud je postupně:

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

V tomto případě má daná soustava dvě řešení:

$$(x, y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \quad (x, y) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Daná soustava má tedy čtyři řešení v oboru komplexních čísel, z toho dvě jsou z oboru čísel reálných.

Úloha 66 Rozjíždění automobilu

Automobil se rozjížděl z klidu působením stálé síly po vodorovné silnici tak, že na konci rozjezdové dráhy byla jeho rychlost v . Vypočtete

- průměrnou rychlost v_{p1} automobilu ve druhé polovině doby tohoto pohybu,
- průměrnou rychlost v_{p2} automobilu ve druhé polovině dráhy tohoto pohybu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(Miroslava Jarešová)

Autorské řešení:

a) Označme $v_1 = a \frac{t}{2}$ rychlost na konci první poloviny doby jízdy, potom $v = at = 2v_1$ je rychlost na konci rozjíždění. Dráhu uraženou ve druhé polovině doby rozjíždění označíme s_2 . Platí

$$s_2 = v_1 \frac{t}{2} + \frac{1}{2} a \left(\frac{t}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} v_1 t + \frac{1}{4} v_1 t = \frac{3}{4} v_1 t = \frac{3}{8} vt.$$

Průměrná rychlost ve druhé polovině doby rozjíždění je pak dána vztahem

$$v_{p1} = \frac{s_2}{\frac{t}{2}} = \frac{\frac{3}{8} vt}{\frac{t}{2}} = \frac{3}{4} v = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Označme t_1 dobu, za kterou automobil ujede první polovinu dráhy s , t_2 dobu, za kterou automobil urazí druhou polovinu dráhy s . Platí

$$\frac{1}{2} s = \frac{1}{2} at_1^2.$$

Celou dráhu s pak automobil ujede za dobu t , přičemž platí $s = \frac{1}{2}at^2$. Z výše uvedených vztahů dostaneme

$$at_1^2 = \frac{1}{2}at^2,$$

z čehož

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}t.$$

Potom

$$t_2 = t - t_1 = \frac{t}{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$v_{p2} = \frac{\frac{s}{2}}{t_2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{t(2-\sqrt{2})}{2}} = \frac{s}{t(2 - \sqrt{2})},$$

kam dosadíme $s = \frac{1}{2}vt$. Nakonec

$$v_{p2} = \frac{\frac{1}{2}vt}{t(2 - \sqrt{2})} = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})v \doteq 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Stav soutěže po 66 soutěžních úlohách

Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 68,5 b., Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 b., Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 b., Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 b., Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 b., Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 b., Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 b., Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 b., Martin Bucháček (G Ludka Pika, Plzeň) – 26 b., Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 b., Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 b., Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 b., Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 b., Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 b., Marian Poljak (GJŠ, Přerov) – 15 b., Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 b., Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 b., Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 b., Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 b., Matouš Bílek (GJŠ, Přerov) – 10 b., Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 b., Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 b., Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 b., Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 b., Libor Drozek (G, Holešov) – 9 b., Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 b., Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 7,5 b., Adam

NAŠE SOUTĚŽ

Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 b., Tomáš Pavlín (G, Parlářova, Praha 6) – 7 b., Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 b., Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 b., Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 b., Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 b., Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 b., Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 b., Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 b., Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 b., Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 b., Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 b., Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 b., Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 b., Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 4,5 b., Jiří Guth (G, Jírovцова, České Budějovice) – 3 b., Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 b., Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 b., Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b., Václav Skála (G, Klatovy) – 1 b., Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 b., Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b.



VÝZVA

Redakční rada časopisu *Rozhledy* matematicko-fyzikální informuje své čtenáře, případně další zájemce, že chce změnit formu rubriky NAŠE SOUTĚŽ. Doposud šlo o rubriku soutěžní, do níž se sice postupně zapojilo poměrně hodně řešitelů, ale přece jen bychom jich chtěli zapojit mnohem více.

Chceme, aby se čtenáři mohli prezentovat svými úlohami, které rádi vložíme do rubriky jako soutěžní úlohy. Soutěž bude probíhat stejně jako doposud, ale pole autorů úloh tak bude pestřejší. Objeví se jistě nové zajímavé problémy, které by jinak možná „zapadly“.

Tedy o co vás prosíme: **Pošlete nám své originální úlohy, i s řešeními, úlohy posoudíme a v případě, že je otiskneme, uvedeme vaše jméno coby autora.**

Čtenáři budou jistě dále posílat svá řešení a tabulka všech řešitelů se bude rozšiřovat.

Děkujeme, že se zapojíte.

Redakční rada *Rozhledů*