Karem Bettaïeb

Sur les représentations tempérées d'un groupe réductif p-adique non connexe: Cas où G/G^0 est commutatif et fini

Mathematica Bohemica, Vol. 142 (2017), No. 4, 387–403

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146978`

SUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES D'UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE NON CONNEXE: CAS OÙ G/G^0 EST COMMUTATIF ET FINI

Karem Bettaïeb, Taief

Received July 30, 2013. First published February 2, 2017.
Communicated by Dagmar Medková

Abstract. Soit G l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique réductif non connexe p-adique de caractéristique 0. Soit G^0 la composante neutre de G. On suppose que G/G^0 est commutatif et fini. Notre motivation pour cette note est de rejoindre le cas connexe d'un papier précédent, Bettaïeb, (2003). Autrement dit, de retrouver une analogue à notre classification des représentations irréductibles tempérées de G, lorsque G est connexe. C'est-à-dire que toute représentation irréductible tempérée de G est irréductiblement induite d'une limite de série discrète d'un sous-groupe de Lévi cuspidal de G.

Keywords: reductive p-adic group; tempered representation

MSC 2010: 11E95, 20G05, 20G15

1. Introduction

Soit G l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique réductif non connexe p-adique de caractéristique 0. Soit G^0 la composante neutre de G. On suppose que G/G^0 est commutatif et fini. Notre motivation pour cette note est de rejoindre le cas connexe d'un papier précédent, [3]. Autrement dit, de retrouver une analogue à notre classification des représentations irréductibles tempérées de G, lorsque G est connexe. En effet, afin de développer une théorie similaire à celle des groupes connexes, Goldberg et Herb [7] suggérent de choisir un sous-groupe de Lévi, bien spécial, appelé sous-groupe de Lévi *cuspidal* de G, qu'on va l'adopter. On dit que le groupe G est *cuspidal* si G admet une fonction cuspidale (non nulle).

Notons $\mathcal{V}(G)$ l'ensemble des *caractères virtuels tempérés* de G, c'est-à-dire que $\mathcal{V}(G)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des caractères des représentations irréductibles tempérés de G. On dit que l'élément $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ est un *caractère*

DOI: 10.21136/MB.2017.0043-13

virtuel supertempéré si son *terme constant faible* Θ_M^{w} est nul, pour tout sous-groupe de Lévi propre cuspidal M de G, [8], [9], [1], [3]. Notons $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ le sous-espace vectoriel des éléments supertempérés de $\mathcal{V}(G)$. On montre que le caractère d'une représentation irréductible tempérée π est supertempéré si est seulement si π appartient à la série discrète (Théorème 1).

Comme résultat préliminaire, et à l'aide des travaux de Arthur [1], Herb [9] et de Bernstein et Zelevinsky [2], on démontre que tout élément de $\mathcal{V}(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels cuspidals supertempérés (Théorème 6). Soient $\Theta_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_i)$, où L_i $(i = 1, 2)$ sont deux sous-groupes de Lévi cuspidaux de G. On note $i_{G,L_i}(\Theta_i)$ le caractère induit de Θ_i. Par analogie avec les caractères cuspidaux, on démontre que $i_{G,L_1}(\Theta_1) = i_{G,L_2}(\Theta_2)$ si est seulement si, il existe $t \in G$ tel que $L_1 = {}^tL_2$ et $\Theta_1 = {}^t\Theta_2$ (Proposition 8). Ce résultat nous permettra de déduire (Corollaire 9) qu'à chaque élément $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ lui correspond, modulo la conjugaison par G, une famille finie unique $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, où $\Theta_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_i)$ et L_i sous-groupes de Lévi cuspidaux de G tel que:

$$\Theta = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} i_{G,L_i}(\Theta_i).$$

Notons $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles *tempérées* de G. Une représentation dans $\Pi(G)$ est dite *elliptique* si son caractère est non nul sur l'ensemble régulier elliptique de G. Notons $\Pi_{\mathrm{ell}}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi(G)$ des représentations elliptiques de G. De même, une représentation irréductible tempérée de G est dite *essentielle* (ou limite de série discrète [5]) si elle n'est pas proprement irréductiblement induite par induction parabolique cuspidal. Notons $\Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ le sous-ensemble des représentations essentielles de $\Pi(G)$.

On se donne (M, σ) une *paire cuspidale-discrète* de G, c'est-à-dire que M est un sous-groupe de Lévi cuspidal de G et σ une représentation irréductible de M, de carré intégrable modulo la composante déployée A_M du centre de M. Notons $i_{G,M}(\sigma)$ la classe de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{P=MN}(\sigma)$ et $\Re_\sigma := \Re_\sigma^G$ le $\Re$-groupe correspondant. C'est un groupe fini ayant la propriétée que l'algèbre commutante de $i_{G,M}(\sigma)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\Re_\sigma]_{\eta_\sigma}$ l'algèbre du groupe $\Re_\sigma$ tordue par un cocycle η_σ (voir [7], §5). Notons $\mathfrak{a}_M$ (resp. $\mathfrak{a}_G$), l'algèbre de Lie réelle de la composante déployée de M (resp. G). Pour tout $r \in \Re_\sigma$, posons:

$$\mathfrak{a}_M^r := \{H \in \mathfrak{a}_M : \; rH = H\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} := \bigcap_{r\in\Re_\sigma} \mathfrak{a}_M^r$$

On dit que le groupe $\Re_\sigma$ est *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$.

Comme conséquence du Corollaire 9, on démontre qu'une composante irréductible de $i_{G,M}(\sigma)$ est essentielle si est seulement si le groupe $\Re_\sigma$ est essentiel (Théorème 13). Ainsi, on aura que si π est essentielle alors toutes les reliées à π le sont aussi (Corollaire 14). Rappelons qu'une représentation irréductible tempérée π_2 de G est dite *reliée* à π_1 si π_1 et π_2 proviennent d'une même paire cuspidale-discrète (M, σ) de G.

Cette classification des représentations irréductibles essentielles de G nous permet de prouver, aussi, que toute représentation irréductible tempérée π de G est irréductiblement induite d'une essentielle (Proposition 15). De plus, si $\pi = i_{G,L_1}(\delta_1) = i_{G,L_2}(\delta_2)$, $\delta_i \in \Pi_{\text{ess}}(L_i)$ et L_i sous-groupes de Lévi cuspidaux de G, alors il existe $t \in G$ tel que $L_1 = {}^tL_2$ et $\delta_1 = {}^t\delta_2$.

2. L'espace des caractères virtuels $\mathcal{V}(G)$

Dans ce paragraphe on montre que tout caractère virtuel tempéré s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels cuspidaux supertempérés.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique (pas forcément connexe) réductif défini sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0. Notons $G(F)$ l'ensemble des points F-rationnels de $\mathbf{G}$. Dans toute la suite on note $G := G(F)$. Soit G^0 la composante neutre de G. On suppose que G/G^0 est commutatif et fini. Dans un prochain papier, on verra le cas ou G^0 est d'index premier.

Pour la suite, on fixe une composante de Lévi F-rationnelle M_0 d'un certain sous-groupe parabolique minimal P_0 de G défini sur F et de composante déployée A_0. Notons $M_0^0 = M_0 \cap G^0$ et $P_0^0 = P_0 \cap G^0$. On a P_0^0 est un sous-groupe parabolique de G^0, ([7], Lemma 2.4). Définissons $W_0^{G^0} := N_{G^0}(M_0^0)/M_0^0$ le groupe de Weyl de (G^0, A_0) où $N_{G^0}(M_0^0)$ est normalisateur de M_0^0 dans G^0 et $W_0^G := N_G(M_0)/M_0$ le groupe de Weyl de (G, A_0).

On définit $W_G := N_G(P_0, A_0)/M_0^0$ où $N_G(P_0, A_0)$ est l'ensemble de tous les éléments de G qui normalisent, à la fois, P_0 et A_0. De ce fait, à partir de ([7], Lemma 3.8), le groupe G s'écrit comme réunion disjointe:

$$G = \bigcup_{w \in W_G} wG^0 \tag{1}$$

Un élément semi-simple $x^0 \in G^0$ est dit *régulier* si $D_{G^0}(x^0) \neq 0$ où D_{G^0} est le facteur discriminant standard défini dans [11], équation (4.7). Un élément $x^0 \in G^0$ est dit *elliptique* si son centralisateur est compact modulo la composante déployée A_{G^0} de G^0. Suivant l'expression (1), on dit que $x \in G$ *correspond* à $x^0 \in G^0$ s'il existe $w \in W_G$ tel que $x = wx^0$. On dit, alors, que $x \in G$ est *régulier* s'il lui correspond un élément régulier $x^0 \in G^0$. Notons G' l'ensemble des éléments réguliers de G. De même, on dit que $x \in G$ est *elliptique* s'il lui correspond un élément elliptique

$x^0 \in G^0$. Notons G_{ell} (resp. $(G^0)_{\text{ell}}$) l'ensemble des éléments réguliers et elliptiques de G (resp. G^0).

Soit π une représentation admissible de G, notons $\mathcal{A}(\pi)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des coefficients matriciels de π et $\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\pi} \mathcal{A}(\pi)$, la réunion étant prise sur toutes les représentations admissibles de G. De la même façon on définit $\mathcal{A}(G^0)$. Aussi on définit le sous-espace $\mathcal{A}_T(G^0) \subset \mathcal{A}(G^0)$, des fonctions dites *termes constants* dans $\mathcal{A}(G^0)$, comme dans ([11], §4.5). On sait que si $f \in \mathcal{A}(G)$ alors $f_{|G^0} \in \mathcal{A}(G^0)$, ([7], §2). Définissons:

$$\mathcal{A}_T(G) := \{f \in \mathcal{A}(G) \colon\ l(x)f_{|G^0} \in \mathcal{A}_T(G^0) \text{ pour tout } x \in G\}$$

où $l(x)f$ est la translation à gauche de f par x.

Lorsque π est une représentation admissible irréductible de G, on dit que π est *tempérée* si $\mathcal{A}(\pi) \subset \mathcal{A}_T(G)$. On note $\Pi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles tempérées de G. Aussi, lorsque π est une représentation irréductible unitaire de G. On dit que π est une *série discrète* de G si $\mathcal{A}(\pi) \subset L_2(G/A_G)$ où A_G est la composante déployée du centre de G. Notons $\Pi_2(G)$ l'ensemble des classes des représentations irréductibles de série discrète de G.

Par définition, un sous-groupe de Lévi M de G est un sous-groupe algébrique de G contenant la composante de Lévi M_0 du parabolique minimal P_0.

Notons $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$ l'ensemble de toutes les fonctions lisses qui sont $A(G)$-finis, à valeurs complexes sur G et qui sont à supports compacts modulo A_G, [11]. On dit que $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$ est *cuspidale* sur G, si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MN$ de G, on a:

$$\int_N f(xn)\,\mathrm{d}n = 0 \quad \text{pour tout } x \in G.$$

On note ${}^0\mathcal{A}(G)$ l'ensemble des fonctions cuspidales sur G. On dit que G est *cuspidal* si ${}^0\mathcal{A}(G) \neq \{0\}$.

Dans la suite, tous les sous-groupes de Lévi M de G qu'on va les prendre sont supposés cuspidaux car sinon on a que $\Pi_2(M)$ est vide [7], Lemma 2.21. Aussi, on dit qu'un parabolique $P = MN$ de G est *cuspidal* si sa composante de Lévi M est cuspidale. Soit, en effet, $P = MN$ un parabolique cuspidal de G. On dit qu'un sous-groupe parabolique P' de G est *opposé* à P si on a $P \cap P' = M$. D'après le Lemme 2.6 et le Lemme 2.10 de [7] le sous-groupe parabolique P' est unique et il est cuspidal. Supposons, de plus, que le sous-groupe de Lévi minimal M_0 de G, qu'on vient de le fixer, est cuspidal.

Si M est un sous-groupe de Lévi cuspidal de G de composante déployée A_M, soit $\mathcal{L}_{\text{cusp}}^{G}(M) := \mathcal{L}_{\text{cusp}}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G contenant M et

$\mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(M) = \{L \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(M) \colon L \neq G\}$. Si $M = M_0$, on écrit $\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}} := \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(M_0)$ et $\mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}} := \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(M_0)$ et $A_0 := A_{M_0}$.

Soient (π, V) une représentation irréductible admissible de G et $P = MN$ un sous-groupe parabolique cuspidal de G. Soit Θ_π le caractère de π. Notons $(\pi_{\bar{N}}, V_{\bar{N}})$ le module de Jacquet normalisé de (π, V), [11], §2, qui correspond à $\bar{P}$ où $\bar{P} = M\bar{N}$ est le parabolique opposé à P. On introduit le *terme constant* $(\Theta_\pi)_P := \Theta_{\pi_{\bar{N}}}$ de Θ_π le long de P et le *terme constant faible* $(\Theta_\pi)_P^w := \Theta_{\pi_{\bar{N}}^w}$ de Θ_π le long de P où $\pi_{\bar{N}}^w$ est le quotient maximal tempéré de $\pi_{\bar{N}}$, [11], §5. On note souvent $(\Theta_\pi)_M := (\Theta_\pi)_P$ et $(\Theta_\pi)_M^w := (\Theta_\pi)_P^w$.

Soit V' le dual algébrique de V. Pour tout $x \in G$, posons $\pi(x)^t \colon V' \to V'$, l'application transposée de $\pi(x)$. Soit $P = MN$ un parabolique cuspidal de G. On définit δ_P la fonction modulaire de P. On dit qu'un quasi-caractère χ de A_M est un *exposant dual* de π par rapport à $P = MN$ s'il existe un vecteur non nul $v' \in V'$ tel que:

$$\pi(\bar{n})^t v' = v' \quad \text{et} \quad \pi(a)^t v' = \delta_{\bar{P}}(a)^{1/2}\chi(a)v'$$

pour tout $\bar{n} \in \bar{N}$ et $a \in A_M$. Notons $Y_\pi(P, A_M)$ l'ensemble des exposants dual de π par rapport à $P = MN$ et $Y_\pi^w(P, A_M) = Y_\pi(P, A_M) \cap \widehat{A}_M$. De ce fait le terme constant $(\Theta_\pi)_P$ et le terme constant faible $(\Theta_\pi)_P^w$ peuvent se décomposer comme suit:

$$(\Theta_\pi)_P = \sum_{\chi \in Y_\pi(P, A_M)} (\Theta_\pi)_{P,\chi} \quad \text{et} \quad (\Theta_\pi)_P^w = \sum_{\chi \in Y_\pi^w(P, A_M)} (\Theta_\pi)_{P,\chi}$$

où $(\Theta_\pi)_{P,\chi}$ est la restriction de $(\Theta_\pi)_P$ à $V_{\bar{N},\chi}$ vérifiant:

$$(\Theta_\pi)_{P,\chi}(ma) = \chi(a)(\Theta_\pi)_{P,\chi}(m) \quad \text{pour tout } m \in M \text{ et } a \in A_M.$$

On dit que Θ est *un caractère virtuel* de G et nous écrivons $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, s'il existe un nombre fini, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \in \Pi(G)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tels que:

$$\Theta := \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i \Theta_{\pi_i}.$$

A remarquer que les caractères $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ sont localement intégrables car les Θ_{π_i} le sont, [6].

Ainsi, on peut définir le terme constant Θ_P et le terme constant faible Θ_P^w de Θ le long d'un sous-groupe parabolique cuspidal $P = MN$ de G par:

$$\Theta_P = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P \quad \text{et} \quad \Theta_P^w = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P^w.$$

On note souvent:

$$\Theta_M := \Theta_P = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P \quad \text{et} \quad \Theta_M^w := \Theta_P^w = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P^w.$$

Un élément $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ est dit *supertempéré* si $\Theta_M^w = 0$ pour tout sous-groupe de Lévi cuspidal propre M de G. Notons $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$, le sous-ensemble de $\mathcal{V}(G)$ formé par les caractères virtuels supertempérés.

Théorème 1. *Soit $\pi \in \Pi(G)$. Alors son caractère Θ_π appartient à $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ si est seulement si $\pi \in \Pi_2(G)$.*

Démonstration. Soient $\pi \in \Pi_2(G)$ et $P = MN$ un sous-groupe parabolique cuspidal propre de G. Par définition, on a:

$$(\Theta_\pi)_P^w = \sum_{\chi \in Y_\pi^w(P, A_M)} (\Theta_\pi)_{P,\chi}.$$

Mais comme $Y_\pi^w(P, A_M) = Y_\pi(P, A_M) \cap \hat{A}_M = \emptyset$ ([7], Lemme 3.6), on aura $(\Theta_\pi)_P^w = 0$ donc $\Theta_\pi \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$. La réciproque se déduit du Lemme 2.21 et du Lemme 3.5 de [7]. $\square$

Soit $\pi \in \Pi(G)$. On dit qu'elle est *elliptique* si Θ_π^e, la restriction de son caractère Θ_π à G_{ell} est non nul. Notons $\Pi_{\mathrm{ell}}(G)$ le sous-ensemble de $\Pi(G)$ formé par les elliptiques de G. Aussi, soient $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et $\tau \in \Pi(L)$, on note $i_{G,L}(\tau)$ la classe de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{Q=LN_Q}(\tau)$. Le caractère de $i_{G,L}(\tau)$ est noté $i_{G,L}(\Theta_\tau)$.

Lemme 2. *Si $\Theta^0 \in \mathcal{V}(G^0)$ alors il existe $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ de façon à ce que Θ apparaît dans la décomposition de $i_{G,G^0}(\Theta^0)$.*

Démonstration. Supposons que $\Theta^0 := \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i \Theta_{\pi_i^0}$ où $\pi_1^0, \pi_2^0, \dots, \pi_k^0 \in \Pi(G^0)$ et $c_i \in \mathbb{C}$. D'après [7], Lemma 2.20, $\pi_i^0 \in \Pi(G^0)$ implique qu'il existe $\pi_i \in \Pi(G)$ tel que la restriction de π_i à G^0 contient π_i^0 ou encore π_i est une composante irréductible de $i_{G,G^0}(\pi_i^0)$. Cela revient à ce que (voir Lemma 2.13 et Lemma 2.14 de [7]):

$$i_{G,G^0}(\pi_i^0) = m_i \sum_{\eta \in X/X(\pi_i)} \pi_i \otimes \eta$$

où m_i est la multiplicité de π_i^0 dans la restriction de π_i à G^0, X le groupe des caractères unitaires de G/G^0 et $X(\pi_i) = \{\eta \in X\colon \pi_i \otimes \eta = \pi_i\}$. En terme de caractère, on a:

$$i_{G,G^0}(\Theta_{\pi_i^0}) = m_i \sum_{\eta \in X/X(\pi_i)} \Theta_{\pi_i \otimes \eta}$$

d'où:

$$i_{G,G^0}(\Theta^0) = i_{G,G^0}\Bigg(\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i \Theta_{\pi_i^0}\Bigg) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i m_i \Bigg(\sum_{\eta \in X/X(\pi_i)} \Theta_{\pi_i \otimes \eta}\Bigg).$$

Ainsi, il suffit de prendre $\Theta := \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} c_i m_i \Theta_{\pi_i}$. Il est clair que $\Theta \in \mathcal{V}(G)$. $\square$

Soit $\Theta \in \mathcal{V}(L)$, $L \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$, il existe $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q \in \Pi(L)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tels que: $\Theta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} c_i \Theta_{\tau_i}$. Si $t \in W_0^G$, on note ${}^t\Theta_{\tau_i}$ le caractère de la représentation ${}^t\tau_i \in \Pi({}^tL)$ et donc:

$$ {}^t\Theta := \sum_{\{1 \leqslant i \leqslant q\}} ({}^t\Theta_{\tau_i}) \quad \in \mathcal{V}({}^tL). $$

Soient $P_1 = L_1N_1$ et $P_2 = L_2N_2$ deux sous-groupes paraboliques cuspidales de G où $L_i \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ pour $i = 1, 2$. Notons:

$$ W^{L_1,L_2} = \{t \in W_0^G \colon {}^t(L_1 \cap P_0) \subset P_0 \quad \text{et} \quad {}^{t^{-1}}(L_2 \cap P_0) \subset P_0\}. $$

Lemme 3. *Soient L_1 et L_2 deux sous-groupes de Lévi cuspidaux de G et $\tau_1 \in \Pi(L_1)$, alors on a:*

$$ [i_{G,L_1}(\Theta_{\tau_1})]_{L_2} = \sum_{t \in W^{L_1,L_2}} i_{L_2,L_{2,t}}([{}^t\Theta_{\tau_1}]_{L_{2,t}}) \tag{2} $$

où $L_{2,t} = L_2 \cap {}^tL_1$.

Démonstration. Remarquons que l'expression (2) n'est autre que la formule (3.3) de Herb dans [9] prouvée à partir du Lemme géométrique de Bernstein et Zelevinsky [2], Theorem 2.12, car, lorsque le groupe G est connexe, l'ensemble W^{L_1,L_2} apparaît comme l'ensemble des représentants de:

$$ P_1 \setminus G/P_2 \cong W_{L_1} \setminus W_0^G/W_{L_2} $$

et cela est dû à la décomposition de Bruhat sur le groupe connexe G.

Ainsi, pour obtenir une formule similaire dans le cas d'un groupe non connexe, il suffit de décrire l'ensemble des représentants de $P_1 \setminus G/P_2$ et d'appliquer ensuite le Théorème 5.2 de [2].

En effet, à l'aide de l'expression (1) et de la décomposition de Bruhat sur G^0, ona cette double réunions disjointes:

$$ G = \bigcup_{w \in W_G} wG^0 = \bigcup_{w \in W_G} w\Bigg(\bigcup_{v \in W_0^{G^0}} P_0^0 v P_0^0\Bigg) = \bigcup_{w \in W_G} \bigcup_{v \in W_0^{G^0}} P_0^0 wv P_0^0. $$

Ce qui nous amène à avoir une bijection entre $P_1 \setminus G/P_2$ et $W_{L_1} \setminus W_G/W_{L_2}$ d'après le Lemme 3.8 et la preuve du Lemme 3.9 de [7]. De ce fait, décrire l'ensemble des représentants de $P_1 \setminus G/P_2$ revient à décrire l'ensemble des représentants de $W_{L_1} \setminus W_G/W_{L_2}$ qui n'est autre que W^{L_1,L_2}, d'après [2], §6. $\square$

Théorème 4. *Soit $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$; si $\Theta^e = 0$ alors $\Theta = 0$.*

Démonstration. La preuve de ce théorème va suivre, en grande partie, celle de la démonstration de [9], Theorem 3.2. Soit $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ si $\Theta^e = 0$ alors, par définition des éléments elliptiques de G et G^0, on aura $\Theta_{|(G^0)_{\mathrm{ell}}} = 0$. Ainsi, [10], [4], $\Theta_{|G^0}$ s'écrit comme combinaison linéaire des caractères induit proprement. Autrement dit il existe une famille $\{L_i^0\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ de sous-groupes de Lévi propres de G^0 et $\tau_i^0 \in \Pi(L_i^0)$ tels que:

$$\Theta_{|G^0} = \sum_{\{1\leqslant i\leqslant s\}} n_i \cdot i_{G^0,L_i^0}(\Theta_{\tau_i^0}), \quad n_i \in \mathbb{C}.$$

Mais, comme pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, il existe $\tau_i \in \Pi(L_i)$ avec la condition que L_i est un sous-groupe de Lévi cuspidal de G vérifiant $L_i^0 = L_i \cap G^0$ ([7], Proposition 2.10), tels que la restriction de τ_i à L_i^0 devrait contenir τ_i^0, ([7], Lemma 2.20). Ce qui revient à ce que τ_i apparaît dans la décomposition de $i_{L_i,L_i^0}(\tau_i^0)$. De plus comme L_i^0 est propre dans G^0 alors L_i est aussi propre dans G, ([7], Lemma 2.6). Pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, notons X le groupe des caractères unitaires de G/G^0, Y_i le groupe des caractères unitaires de L_i/L_i^0 et pour $\chi \in X$ on note χ_{L_i} la restriction de χ à L_i. Aussi notons:

$$\begin{gathered} X(\tau_i) = \{\chi \in X\colon\ \chi_{L_i} \otimes \tau_i = \tau_i\}, \\ X_1(\tau_i) = \{\chi \in X\colon\ i_{G,L_i}(\tau_i) \otimes \chi = i_{G,L_i}(\tau_i)\}, \\ Y(\tau_i) = \{\eta \in Y\colon\ \eta \otimes \tau_i = \tau_i\} \end{gathered}$$

et soit c_i la multiplicité de τ_i^0 dans la restriction de τ_i à L_i^0.

De ce fait ([7], Lemma 2.13), on a:

$$i_{L_i,L_i^0}(\tau_i^0) = c_i \cdot \sum_{\eta\in Y/Y(\tau_i)} \tau_i \otimes \eta.$$

Aussi, par induction:

$$i_{G,L_i^0}(\tau_i^0) = i_{G,L_i}(i_{L_i,L_i^0}(\tau_i^0)) = c_i \cdot \sum_{\eta\in Y/Y(\tau_i)} i_{G,L_i}(\tau_i \otimes \eta).$$

Mais, comme G/G^0 et L_i/L_i^0 sont commutatifs et finis, alors, l'application $\chi \mapsto \chi_{L_i}$ induit un isomorphisme entre $X/X(\tau_i)$ et $Y/Y(\tau_i)$. Ainsi, on aura:

$$\begin{aligned} i_{G,L_i^0}(\tau_i^0) &= c_i \cdot \sum_{\chi\in X/X(\tau_i)} i_{G,L_i}(\tau_i \otimes \chi_{L_i}), \\ i_{G,L_i^0}(\tau_i^0) &= c_i \cdot |X_1(\tau_i)/X(\tau_i)| \cdot \sum_{\chi\in X/X_1(\tau_i)} i_{G,L_i}(\tau_i) \otimes \chi. \end{aligned}$$

En terme de caractère, cette dernière expression, n'est autre que:

$$i_{G,L_i^0}(\Theta_{\tau_i^0}) = c_i \cdot |X_1(\tau_i)/X(\tau_i)| \cdot \sum_{\chi \in X/X_1(\tau_i)} i_{G,L_i}(\Theta_{\tau_i}) \otimes \chi.$$

Mais, comme:

$$i_{G,L_i^0}(\Theta_{\tau_i^0}) = i_{G,L_i}(i_{L_i,L_i^0}(\Theta_{\tau_i^0})) = i_{G,G^0}(i_{G^0,L_i^0}(\Theta_{\tau_i^0}))$$

on aura:

$$i_{G,G^0}(\Theta_{|G^0}) = \sum_{\{1 \leqslant i \leqslant s\}} c_i \cdot n_i \cdot |X_1(\tau_i)/X(\tau_i)| \cdot \sum_{\chi \in X/X_1(\tau_i)} i_{G,L_i}(\Theta_{\tau_i}) \otimes \chi.$$

Or, d'après le Lemme 2, Θ apparaît dans la décomposition de $i_{G,G^0}(\Theta_{|G^0})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que:

$$\Theta = \sum_{\{1 \leqslant i \leqslant s\}} k_i \cdot i_{G,L_i}(\Theta_{\tau_i})$$

où $k_i = c_i \cdot n_i \cdot |X_1(\tau_i)/X(\tau_i)|$. Posons l_i la dimension de L_i et soit l le maximum des l_i. L'expression de Θ n'est pas unique, mais on peut supposer que les L_i, Θ_{τ_i} et l sont choisis les plus petit possible et que L_i n'est pas conjugué à L_j pour $i \neq j$. Supposons que $l = l_1$, ainsi, d'après le Lemme 3, on a:

$$(2') \qquad [i_{G,L_i}(\Theta_{\tau_i})]_{L_1} = \sum_{t \in W^{L_i,L_1}} i_{L_1,L_{i,t}}([{}^t\Theta_{\tau_i}]_{L_{1,t}})$$

où $L_{i,t} = L_1 \cap {}^tL_i$. Supposons que $L_{i,t} = L_1 \cap {}^tL_i = L_1$ alors $L_1 \subset {}^tL_i$ et par suite $L_1 = {}^tL_i$ car $\dim(l_1) \geqslant \dim({}^tL_i)$. Cést une contradiction car on a supposé que L_1 n'est conjugué à aucun des L_i pour tout $i \neq 1$. D'où, pour tout $i \neq 1$ et $t \in W^{L_i,L_1}$ on a que $L_{i,t}$ est un sous-groupe de Lévi propre de L_1. Ainsi, pour $m_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}$ dans l'expression $(2')$, on a:

$$\Theta_{L_1}(m_1) = \sum_{\{1 \leqslant i \leqslant s\}} \sum_{t \in W^{L_i,L_1}} k_i \cdot i_{L_1,L_{i,t}}([{}^t\Theta_{\tau_i}]_{L_{1,t}})(m_1) = \sum_{t \in W^{L_1,L_1}} k_1 \cdot {}^t\Theta_{\tau_1}(m_1).$$

Se qui veut dire que $\Theta' := |W^{L_1,L_1}|^{-1} \sum_{t \in W^{L_1,L_1}} k_1 \cdot {}^t\Theta_{\tau_1} \in \mathcal{V}(L_1)$ est non elliptique sur L_1 car $\Theta_{L_1} = 0$ ($\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$). Donc, il existe $(M_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ des sous-groupes de Lévi propres de L_1 et $\delta_j \in \Pi(M_j)$ tels que:

$$\Theta' = \sum_{\{1 \leqslant j \leqslant q\}} h_j \cdot i_{L_1,M_j}(\Theta_{\delta_j}), \quad h_i \in \mathbb{C}.$$

D'où: $i_{G,L_1}(\Theta_{\tau_1}) = i_{G,L_1}(\Theta') = \sum\limits_{\{1\leqslant j\leqslant q\}} h_j \cdot i_{G,M_j}(\Theta_{\delta_j})$. Ce qui veut dire que $i_{G,L_1}(\Theta_{\tau_1})$ s'écrit, aussi, comme combinaison linéaire des induites à partir des sous-groupes Lévi cuspidaux dont le dimension est strictement plus petite que celle de L_1. Contradiction, d'où $\Theta = 0$. $\square$

On dit que (M,σ) est une *paire discrète-cuspidale* de G si $M \in \mathcal{L}_{\text{cusp}}$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. Soit (M,σ) une telle paire. Notons $i_{G,M}(\sigma)$ la classe de la représentation induite $\text{Ind}_{P=MN}(\sigma)$ et $\Re_\sigma := \Re_\sigma^G$, le $\Re_\sigma$-groupe correspondant, ([7], §5). Soit $\widetilde{\Re}_\sigma := \widetilde{\Re}_\sigma^G$ l'extension centrale du $\Re_\sigma$-groupe comme dans ([7], §5):

$$1 \to Z_\sigma \to \widetilde{\Re}_\sigma \to \Re_\sigma \to 1.$$

Il existe un caractère central χ_σ de Z_σ tel que l'ensemble $\Pi_\sigma(G)$ des constituants irréductibles de $i_{G,M}(\sigma)$ soit paramétré par l'ensemble $\Pi(\widetilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)$ des classes d'équivalence des représentations irréductibles ϱ de $\widetilde{\Re}_\sigma$ ayant χ_σ comme Z_σ-caractère central, ([7], Theorem 5.21).

La paramétrisation de $\Pi_\sigma(G)$ nous permet de classifier l'ensemble $\Pi(G)$, qui est réunion disjointe des W_0^G-paires discrètes-cuspidales (M,σ) des ensembles $\Pi_\sigma(G)$, ([7], Theorem 2.22 et Corollary 3.2).

Un triplet (M,σ,r) est appelé *triplet virtuel cuspidal* de G si (M,σ) est une paire discrète-cuspidale de G et $r \in \widetilde{\Re}_\sigma$. A chaque triplet virtuel cuspidal de G, J. Arthur ([1], §2), fait correspondre une distribution-caractère $\Theta^G(M,\sigma,r) := \Theta(M,\sigma,r)$ appelé *caractère virtuel cuspidal* de G qui se décompose sous la forme:

$$\Theta(M,\sigma,r) = \sum_{\pi\in\Pi_\sigma(G)} \theta_{\varrho_\pi^\vee}(r)\Theta_\pi \tag{3}$$

où $\theta_{\varrho_\pi^\vee}$ est le caractère de la contragrédiente de $\varrho_\pi \in \Pi(\widetilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)$ associée à $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. De plus, on a:

$$\Theta^G(wM, w\sigma, wrw^{-1}) = \Theta^G(M,\sigma,r) \quad \forall\, w \in W_0^G.$$

En inversant (3) on aura, pour tout $\pi \in \Pi_\sigma(G)$:

$$\Theta_\pi = |\widetilde{\Re}_\sigma|^{-1} \sum_{r\in\widetilde{\Re}_\sigma} \theta_{\varrho_\pi}(r)\Theta^G(M,\sigma,r)$$

ou encore, ([1], §6):

$$\Theta_\pi = |\Re_\sigma|^{-1} \sum_{r\in\Re_\sigma} \theta_{\varrho_\pi}(r)\Theta^G(M,\sigma,r). \tag{4}$$

Notons $\mathfrak{a}_M$ (resp. $\mathfrak{a}_G$), l'algèbre de Lie réelle de la composante déployée de M (resp. G). Le groupe $\Re_\sigma$ agit sur $\mathfrak{a}_M$. Pour $r \in \Re_\sigma$, posons:

$$\mathfrak{a}_M^r := \{H \in \mathfrak{a}_M : rH = H\}, \quad \mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} := \bigcap_{r\in\Re_\sigma} \mathfrak{a}_M^r,$$

et

$$\Re_{\sigma,\mathrm{ell}} := \Re_{\sigma,\mathrm{ell}}^G = \{r \in \Re_\sigma\,;\ \mathfrak{a}_M^r = \mathfrak{a}_G\}.$$

Soit $r \in \Re_\sigma$. On sait qu'il existe un sous-groupe de Lévi L_r de G contenant M tel que $\mathfrak{a}_M^r = \mathfrak{a}_{L_r}$, [3], Lemme 3. A priori, rien n'indique que L_r est cuspidal. Mais, on peut s'arranger pour qu'il le soit. En effet, soit σ^0 une composante irréductible de la restriction de σ à M^0 où M^0 est un sous-groupe de Lévi de G^0 tel que $M^0 = G^0 \cap M$. Comme $\sigma^0 \in \Pi_2(M^0)$ ([7], Lemme 2.21), on peut définir le $\Re_{\sigma^0}^{G^0}$-groupe de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{P^0=M^0N^0}^{G^0}(\sigma^0)$ ([7], §4). Soit, donc, $r^0 \in \Re_{\sigma^0}^{G^0}$ tel que $\mathfrak{a}_{M^0}^{r^0} = \mathfrak{a}_{L^0_{r^0}}$ où $L^0_{r^0}$ est un sous-groupe de Lévi de G^0 contenant M^0. On pourra vérifier que $L^0_{r^0} = L_r \cap G^0$ pour un certain $r \in \Re_\sigma$ et $r^0 \in \Re_{\sigma^0}^{G^0}$. Par suite L_r serait un sous-groupe de Lévi cuspidal dans G ([7], Proposition 2.10). Notons:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma) := \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}^G(\Re_\sigma) = \{S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(M)\,;\ \mathfrak{a}_S = \mathfrak{a}_M^r \quad \text{pour un } r \in \Re_\sigma\}$$

On dit que le $\Re$-groupe $\Re_\sigma$ est *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$. Le triplet virtuel cuspidal (M, σ, r) est dit *elliptique* si (M, σ) est une paire discrète-cuspidale de G et $r \in \Re_{\sigma,\mathrm{ell}}$.

Proposition 5. *Les caractères des triplets virtuels cuspidaux et elliptiques de G sont supertempérés.*

Démonstration. On refait presque la même démonstration que celle de Herb, ([9], Theorem 3.1), dans le cas connexe tout en utilisant le Théorème 4. $\square$

Dans ([1], §3), Artur a montré que lorsque le groupe G est connexe alors les caractères $\Theta^G(M, \sigma, r)$ des W_0^G-triplets virtuels (M, σ, r) de G forment une base de l'espace $\mathcal{V}(G)$. On s'apperçoit que son résultat s'étend, aussi, au groupe non connexe. On se propose, dans la suite, de munir l'espace $\mathcal{V}(G)$ d'une autre base faisant intervenir les caractères virtuels cuspidaux supertempérés.

Théorème 6. *Tout élément dans $\mathcal{V}(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels cuspidaux supertempérés.*

Démonstration. Soit $\Theta \in \mathcal{V}(G)$. Par définition, il existe $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \in \Pi(G)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tel que: $\Theta = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} c_i \Theta_{\pi_i}$. Le théorème sera démontré si on montre que le caractère Θ_π, $\pi \in \Pi(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels cuspidaux supertempérés. En effet, soit $\pi \in \Pi(G)$. On sait que, modulo la conjugaison par W_0^G, il existe une paire discrète cuspidale unique (M,σ) de G telle que $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. Or, l'égalité (4) nous donne l'expression de son caractère:

$$\Theta_\pi = |\Re_\sigma|^{-1} \sum_{r \in \Re_\sigma} \theta_{\varrho_\pi}(r) \Theta^G(M,\sigma,r) \tag{5}$$

$$\Theta_\pi = \sum_{S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} |\Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}|^{-1} \sum_{r \in \Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}} \theta_{\varrho_\pi}(r) \Theta^G(M,\sigma,r)$$

d'après ([3], Lemme 3). Par ailleurs, pour $r \in \widetilde{\Re}^S_{\sigma,\mathrm{ell}}$, le triplet (M,σ,r) est un triplet de S et si $r \in \widetilde{\Re}^S_{\sigma,\mathrm{ell}}$ on a:

$$\begin{aligned}\Theta^G(M,\sigma,r) &= \sum_{\tau \in \Pi_\sigma(S)} \theta_{\varrho^\vee_\tau}(r) i_{G,S}(\Theta_\tau) = i_{G,S}\Big[\sum_{\tau \in \Pi_\sigma(S)} \theta_{\varrho^\vee_\tau}(r)\Theta_\tau\Big] \\ &= i_{G,S}[\Theta^S(M,\sigma,r)].\end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (5) est équivalente à:

$$\begin{aligned}\Theta_\pi &= \sum_{S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} |\Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}|^{-1} \sum_{r \in \Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}} \theta_{\varrho_\pi}(r) i_{G,S}\big(\Theta^S(M,\sigma,r)\big) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} i_{G,S}\Big[|\Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}|^{-1} \sum_{r \in \Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}} \theta_{\varrho_\pi}(r)\Theta^S(M,\sigma,r)\Big] \\ &= \sum_{S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} i_{G,S}(\Theta_{\pi,S})\end{aligned} \tag{6}$$

où:

$$\Theta_{\pi,S} := |\Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}|^{-1} \sum_{r \in \Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}} \theta_{\varrho_\pi}(r)\Theta^S(M,\sigma,r).$$

Or, si $r \in \Re^S_{\sigma,\mathrm{ell}}$, le caractère virtuel cuspidal $\Theta^S(M,\sigma,r)$ est dans $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(S)$ (Proposition 5). Donc $\Theta_{\pi,S} \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(S)$. Comme $\Re_\sigma$ est fini, les $S \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)$ sont en nombre fini. Ceci montre que le caractère d'une représentation irréductible tempéré de G est une combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés. D'où le théorème. □

Définition 7. (1) On dit que (L,Θ) est une paire cuspidale-supertempérée de G si $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L)$.

(2) Soient (L_i,Θ_i), $i = 1,2$ deux paires cuspidales-supertempérées de G. On dit que (L_1,Θ_1) et (L_2,Θ_2) sont conjuguées sous G s'il existe $t \in W_0^G$ tel que ${}^tL_1 = L_2$ et ${}^t\Theta_1 = \Theta_2$.

Proposition 8. *Soient* (L_1, Θ_1) *et* (L_2, Θ_2) *deux paires cuspidales-supertempérées de* G. *Alors:* $i_{G,L_1}(\Theta_1) = i_{G,L_2}(\Theta_2)$ *si est seulement si les paires* (L_1, Θ_1) *et* (L_2, Θ_2) *sont conjuguées sous* G.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Théorème 4 de [6] sur les caractères d'induites cuspidales. En effet, pour tout $l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}$, on a:

$$[i_{G,L_1}(\Theta_1)]_{L_1}(l_1) = [i_{G,L_2}(\Theta_2)]_{L_1}(l_1). \tag{7}$$

En utilisant le Théorème 4, l'expression (2) et le fait que ${}^t\Theta_1 = \Theta_1$ pour tout $t \in W^{L_1,L_1}$ tel que ${}^tL_1 = L_1$, l'expression (7) est équivalente à:

$$|\{t \in W^{L_1,L_1} :\ {}^tL_1 = L_1\}|\Theta_1(l_1) = \sum_{\{t \in W^{L_2,L_1} :\ {}^tL_1 = L_2\}} ({}^t\Theta_2)(l_1) l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}.$$

Si L_1 n'est pas conjugué à L_2, on aura $\Theta_1 = 0$ car il est nul sur $(L_1)_{\mathrm{ell}}$ d'après le Théorème 4. Contradiction. D'où L_1 est conjugué à L_2. Supposons que $L_2 = {}^sL_1$ pour un certain $s \in W_0^G$; pour tout $l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}$, l'égalité (7) est équivalente à:

$$|\{t \in W^{L_1,L_1} :\ {}^tL_1 = L_1\}|(\Theta_1)(l_1) = |\{t \in W^{L_1,L_1} :\ {}^tL_1 = L_1\}|({}^{s^{-1}}\Theta_2)(l_1)$$

ce qui implique, en utilisant de nouveau le Théorème 4, que: $\Theta_2 = {}^s\Theta_1$.

La réciproque est claire. □

Corollaire 9. *Soit* $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, *il existe, modulo la conjugaison par* G, *une famille finie* $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant k}$ *de paires cuspidales-supertempérées de* G, *non conjuguées deux à deux, tel que:*

$$\Theta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} i_{G,L_i}(\Theta_i).$$

Démonstration. Se déduit de la Proposition 8 et du Théorème 6. □

Soient $\pi \in \Pi(G)$ et (L, Θ) une paire cuspidale supertempérée de G. On écrit $\Theta_\pi \hookrightarrow i_{G,L}(\Theta)$ si Θ_π apparaît dans la décomposition de $i_{G,L}(\Theta)$.

Théorème 10. *Soient* (L_i, Θ_i), $i = 1, 2$ *deux paires cuspidales-supertempérées de* G *et* $\pi \in \Pi(G)$. *Si* Θ_π *apparaît dans la décomposition de* $i_{G,L_1}(\Theta_1)$ *et* $i_{G,L_2}(\Theta_2)$ *alors il existe* $t \in G$ *tel que* ${}^tL_1 = L_2$. *De plus* ${}^t\Theta_1$ *apparaît dans la décomposition de* Θ_2.

Démonstration. Si $\Theta_\pi \hookrightarrow i_{G,L_2}(\Theta_2)$ alors, il est clair que ${}^w\Theta_2 \hookrightarrow r_{L_2,G}(\Theta_\pi)$, pour un certain $w \in W_0^{L_2,}$. Ainsi:

$${}^w\Theta_2 \hookrightarrow r_{L_2,G}(\Theta_\pi) \hookrightarrow r_{L_2,G} \circ i_{G,L_1}(\Theta_1).$$

En appliquant l'expression (2), on retrouve qu'il existe $t \in W_0^G$ vérifiant ${}^tL_1 \subset L_2$ tel que: ${}^w\Theta_2 \hookrightarrow i_{L_2,{}^tL_1}({}^t\Theta_1)$, or ceci implique que ${}^t\Theta_1 \hookrightarrow r_{{}^tL_1,L_2}({}^w\Theta_2) = r_{{}^tL_1,L_2}(\Theta_2)$. Comme $\Theta_2 \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_2)$, on déduit qu'il existe $t \in G$ tel que ${}^tL_1 = L_2$ et ${}^t\Theta_1 \hookrightarrow \Theta_2$. Mais ceci implique que: ${}^t\Theta_1$ apparaît dans la décomposition de Θ_2. $\square$

Corollaire 11 ([7], Theorem 2.22 et Corollary 3.2)**.** *Soient (M_1, σ_1) et (M_2, σ_2) deux paires cuspidales-discrètes de G. Si $\Pi_{\sigma_1}(G)$ et $\Pi_{\sigma_2}(G)$ possèdent un constituant en commun alors il existe $t \in G$ tel que ${}^tM_1 = M_2$ et ${}^t\sigma_1 = \sigma_2$. Réciproquement s'il existe $t \in G$ tel que ${}^tM_1 = M_2$ et ${}^t\sigma_1 = \sigma_2$ alors $\Pi_{\sigma_1}(G) = \Pi_{\sigma_2}(G)$.*

Démonstration. Comme $\Theta_\sigma \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ si est seulement si $\sigma \in \Pi_2(G)$ (Théorème 1), le résultat se déduit du Théorème 10. La réciproque est claire. $\square$

3. Classification de $\Pi(G)$

Soit (M, σ) une paire discrète-cuspidale de G. Le paramétrage de $\Pi_\sigma(G)$ à travers $\Pi(\widetilde{\mathfrak{R}}_\sigma, \chi_\sigma)$ fait par Goldberg et Herb ([7], Theorem 5.21), qui ont d'ailleurs suivi celle de Arthur [1] dans le cas connexe, fait intervenir beaucoup de choix, pour cela on se propose de classifier, dans ce paragraphe, $\Pi(G)$ à travers les limites de séries discrètes.

Définition 12. Une représentation dans $\Pi(G)$ est dite essentielle (ou limite de série discrète [5]) si elle n'est pas proprement irréductiblement induite par induction parabolique cuspidal. Notons:

$$\Pi_{\mathrm{ess}}(G) := \{\pi \in \Pi(G)\colon\ \pi \ \text{ est essentielle}\}$$

A l'aide du Corollaire 11, $\Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ est une réunion disjointe, modulo la conjugaison par un élément de G, des paires discrètes-cuspidales (M, σ) des ensembles:

$$\Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G) := \Pi_\sigma(G) \cap \Pi_{\mathrm{ess}}(G).$$

On dit que le $\mathfrak{R}_\sigma$-groupe de $i_{G,M}(\sigma)$ est *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\mathfrak{R}_\sigma} = \mathfrak{a}_G$.

Théorème 13. *Soient (M, σ) une paire discrète-cuspidale de G et $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. Alors $\pi \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G)$ si et seulement si le groupe $\mathfrak{R}_\sigma$ est essentiel.*

Démonstration. Si le groupe $\mathfrak{R}_\sigma$ n'est pas essentiel, alors il existe $L \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(M)$ tel que $\mathfrak{a}_M^{\mathfrak{R}_\sigma} = \mathfrak{a}_L$ et donc tout élément de $\mathfrak{R}_\sigma$ laisse invariant point par point $\mathfrak{a}_L$, or cela implique que $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}_\sigma^L$. Mais $|\Pi(\widetilde{\mathfrak{R}}_\sigma, \chi_\sigma)| = |\Pi_\sigma(G)|$ et $|\Pi(\widetilde{\mathfrak{R}}_\sigma^L, \chi_\sigma)| = |\Pi_\sigma(L)|$. Ainsi $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}_\sigma^L$ implique $|\Pi_\sigma(G)| = |\Pi_\sigma(L)|$ et donc chaque composante irréductible de $i_{G,M}(\sigma)$ est de la forme $i_{G,L}(\tau)$ pour $\tau \in \Pi_\sigma(L)$.

Réciproquement. Supposons que $\Pi_\sigma(G)$ a un élément proprement irréductiblement induit. Cest-à-dire qu'il existe $\pi \in \Pi_\sigma(G)$ tel que $\pi = i_{G,L}(\tau)$ où $\tau \in \Pi(L)$ et $L \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}$. Or, $\tau \in \Pi(L)$ implique qu'il existe, modulo conjugaison par un élément de L, une unique paire discrète cuspidale (M_1, σ_1) de L tel que $\tau \in \Pi_{\sigma_1}(L)$. Dans ce cas, $\pi \in \Pi_\sigma(G) \cap \Pi_{\sigma_1}(G)$ et alors il existe $t \in G$ tel que $(M, \sigma) = ({}^tM_1, {}^t\sigma_1)$ (Corollaire 11). Si on suppose que $(M, \sigma) = (M_1, \sigma_1)$, alors $L \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(M)$ et $\tau \in \Pi_\sigma(L)$. De ce fait le Théorème 6 et l'expression (6) impliquent que le caractère de $\pi = \pi_\varrho$, $\varrho \in \Pi(\widetilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels cuspidales supertempérés:

$$\Theta_\pi = \sum_{S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} i_{G,S}(\Theta_{\pi,S})$$

où, pour $S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)$, la paire $(S, \Theta_{\pi,S})$ est une paire cuspidale-supertempérée de G. De même, le caractère de $\tau = \tau_{\varrho_L}$, $\varrho_L \in \Pi(\widetilde{\Re}^L_\sigma, \chi_\sigma)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés:

$$\Theta_\tau = \sum_{T \in \mathcal{L}^L_{0,\mathrm{cusp}}(\Re^L_\sigma)} i_{L,T}(\Theta_{\tau,T})$$

où, pour $T \in \mathcal{L}^L_{0,\mathrm{cusp}}(\Re^L_\sigma)$, la paire $(T, \Theta_{\tau,T})$ est une paire cuspidale-supertempérée de L. Ce qui implique, par transitivitée de l'induction, que:

$$\Theta_\pi = i_{G,L}(\Theta_\tau) = \sum_{T \in \mathcal{L}^L_{0,\mathrm{cusp}}(\Re^L_\sigma)} i_{G,T}(\Theta_{\tau,T}).$$

Mais le Corollaire 9, implique que la famille $\{(S, \Theta_{\pi,S})\}_{S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)}$ est conjuguée à la famille $\{(T, \Theta_{\tau,T})\}_{T \in \mathcal{L}^L_{0,\mathrm{cusp}}(\Re^L_\sigma)}$.

En particulier, la famille $\{S;\ \ S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)\}$ est conjuguée à la famille $\{T;\ \ T \in \mathcal{L}^L_{0,\mathrm{cusp}}(\Re^L_\sigma)\}$. Ainsi, si on suppose que ces deux familles sont égales, on obtient:

$\mathfrak{a}_G \neq \mathfrak{a}_L \subset \mathfrak{a}_S$ pour tout $S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)$ et alors:

$$\mathfrak{a}_G \neq \mathfrak{a}_L \subset \bigcap_{S \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(\Re_\sigma)} \mathfrak{a}_S = \bigcap_{r \in \Re_\sigma} \mathfrak{a}^r_M \subset \mathfrak{a}^{\Re_\sigma}_M$$

D'où le théorème. □

Corollaire 14. *Soit (M, σ) une paire discrète-cuspidale de G. Supposons que:*

$$i_{G,M}(\sigma) = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \oplus \pi_n$$

Si $\pi_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ alors tous les $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{ess}}(G)$.

Démonstration. Se déduit du Théorème 13. □

Proposition 15. *Toute représent irréductible tempérée de G est irréductiblement induite d'une essentielle.*

Démonstration. Soit $\pi \in \Pi(G)$, on sait qu'il existe, modulo conjugaison par par un élément de G, une unique paire discrète-cuspidale (M, σ) de G telle que $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. On va distinguer deux cas:

Si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$, alors, le Théorème 13 implique que, $\pi \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G)$.

Si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} \neq \mathfrak{a}_G$, alors, aussi le Théorème 13 implique qu'il existe $L \in \mathcal{L}_{0,\mathrm{cusp}}(M)$ et $\tau \in \Pi_\sigma(L)$ tel que π est proprement irréductiblement induite de τ.

Mais $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_L$ implique que $\Re_\sigma = \Re_\sigma^L$ et alors $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma^L} = \mathfrak{a}_L$, ce qui signifie que $\Re_\sigma^L$ est essentiel est donc, le Théorème 13 appliqué à L implique $\tau \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(L)$. D'où la Proposition. □

Corollaire 16. *Soit $\pi \in \Pi(G)$, si: $\pi = i_{G,L_1}(\delta_1)$ $\delta_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_1)$ $L_1 \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ et $\pi = i_{G,L_2}(\delta_2)$ $\delta_2 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_2)$ $L_2 \in \mathcal{L}_{\mathrm{cusp}}$ alors il existe $t \in G$ tel que ${}^tL_1 = L_2$ et ${}^t\delta_1 = \delta_2$.*

Démonstration. Si $\delta_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_1)$ alors le Théorème 13, implique qu'il existe une paire discrète-cuspidale (M_1, σ_1) de L_1 vérifiant $\mathfrak{a}_{M_1}^{\Re_{\sigma_1}^{L_1}} = \mathfrak{a}_{L_1}$ tel que $\delta_1 \in \Pi_{\sigma_1}(L_1)$. Mais comme π est irréductiblement induite de δ_1, on aura $\Re_{\sigma_1} = \Re_{\sigma_1}^{L_1}$, ce qui revient à ce que $\mathfrak{a}_{M_1}^{\Re_{\sigma_1}} = \mathfrak{a}_{L_1}$. De même $\delta_2 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_2)$, implique qu'il existe une paire discrète-cuspidale (M_2, σ_2) de L_2 vérifiant $\mathfrak{a}_{M_2}^{\Re_{\sigma_2}} = \mathfrak{a}_{L_2}$ tel que $\delta_2 \in \Pi_{\sigma_2}(L_2)$. Ainsi $\pi = i_{G,L_1}(\delta_1) = i_{G,L_2}(\delta_2)$ implique $\pi \in \Pi_{\sigma_1}(G) \cap \Pi_{\sigma_2}(G)$ et donc il existe $t \in G$ tel que $(M_1, \sigma_1) = ({}^tM_2, {}^t\sigma_2)$ d'après le Corollaire 11. Supposons que $(M, \sigma) := (M_1, \sigma_1) = (M_2, \sigma_2)$, alors on aura $\mathfrak{a}_L := \mathfrak{a}_{L_1} = \mathfrak{a}_{L_2}$ et donc $\delta_1 = \delta_2$ car $|\Pi_\sigma(G)| = |\Pi_\sigma(L)|$. □

References

[1] *J. Arthur*: On elliptic tempered characters. Acta Math. *171* (1993), 73–138.

[2] *I. N. Bernstein, A. V. Zelevinsky*: Induced representations of reductive p-adic groups I. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) *10* (1977), 441–472.

[3] *K. Bettaïeb*: On the tempered representations of a p-adic reductive group. C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. *26* (2004), 1–3 (in French).

[4] *K. Bettaïeb*: Classification of tempered representations of a p-adic group. Can. J. Math. *55* (2003), 1121–1133 (in French).

[5] *L. Clozel*: Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group. Harmonic Analysis on Reductive Groups. Proc. Conf., Bowdoin College, Brunswick, 1989. Progress in Mathematics. Vol 101 (W. Barker et al., eds). Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 101–121.

[6] *L. Clozel*: Characters of non-connected reductive p-adic groups. Can. J. Math. *39* (1987), 149–167.

[7] *D. Goldberg, R. Herb*: Some results on the admissible representations of non-connected p-adic groups. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) *30* (1997), 97–146.

[8] *Harish-Chandra*: Supertempered distributions on real reductive groups. Adv. Math., Suppl. Stud. *8* (1983), 139–158.
[9] *R. A. Herb*: Supertempered virtual characters. Compos. Math. *93* (1994), 139–154.
[10] *D. Kazhdan*: Cuspidal geometry of p-adic groups. J. Anal. Math. *47* (1986), 1–36.
[11] *A. J. Silberger*: Introduction to Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups. Based on lectures by Harish-Chandra at the Institute for Advanced Study, 1971–1973. Mathematical Notes 23. Princeton University Press, Princeton, and University of Tokyo Press, Tokyo, 1979.

Author's address: *Karem Bettaïeb*, Département de mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Taief, Taief – Royaume d'Arabie Saoudite, et Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris VII., Paris Rive Gauche, UMR 7586, Projet "Groupes, Représentations et Géométrie", Bâtiment Sophie Germain, case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France, e-mail: `bettaieb.karem@yahoo.fr`.