# 59. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 92 (2017), No. 3, 25–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146889

# 59. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)

## KATEGORIE A

### 1. Spotřeba automobilu

Automobil o hmotnosti $m = 1\,300$ kg používá palivo o hustotě $\rho = 720\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ s výhřevností $H = 42\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$. Celkovou účinnost automobilu $\eta = 15\ \%$ považujeme za konstantní. Účinností zde myslíme podíl práce potřebné k zajištění jízdy automobilu a energie získané spálením paliva. Při jízdě je potřeba překonávat odpor vzduchu a zajistit další funkce automobilu (výkon potřebný k zajištění těchto funkcí $P_1 = 1{,}0$ kW považujeme za konstantní).

Odporová síla proti pohybu automobilu je přímo úměrná druhé mocnině jeho rychlosti, $F_o = kv^2$, kde konstanta $k = 0{,}55\ \mathrm{N \cdot s^2 \cdot m^{-2}}$.

Spotřeba automobilu $\theta = \frac{V}{L}$, kde $V$ je objem spotřebovaného paliva a $L$ je ujetá vzdálenost. Spotřeba se udává v jednotkách $\frac{\mathrm{litr}}{100\ \mathrm{km}}$.

a) Určete spotřebu paliva při stálé rychlosti automobilu $v = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na přímé vodorovné silnici.

b) Určete, při jaké rychlosti automobilu bude jeho spotřeba minimální, a určete tuto spotřebu.

c) Jak se změní výsledky, když automobil pojede stejnou stálou rychlostí po přímé silnici s úhlem stoupání $\alpha = 3°$?

### 2. Přenos látky

Ve dvou nádobách A a B se nachází roztoky soli. Počáteční koncentrace je v první nádobě $c_{10}$, ve druhé nádobě $c_{20}$, počáteční objem $V$ obou roztoků je na počátku stejný. Z první nádoby do druhé nádoby přeneseme malý objem $v$ a po důkladném promíchání přeneseme stejný objem zase zpátky. Celý postup opakujeme.

a) Určete celkovou hmotnost $m$ soli v obou nádobách.

b) Jaké jsou koncentrace $c_{11}$ a $c_{21}$ v nádobách po prvním přenesení?

c) Jaký je rozdíl koncentrací $(c_{1k} - c_{2k})$ a jaké jsou koncentrace $c_{1k}$ a $c_{2k}$ po $k$-tém přenesení?

d) Kolikrát musíme přenést objem $v$, aby se koncentrace roztoků v nádobách lišily o méně než 1 % v porovnání s počátečním stavem?

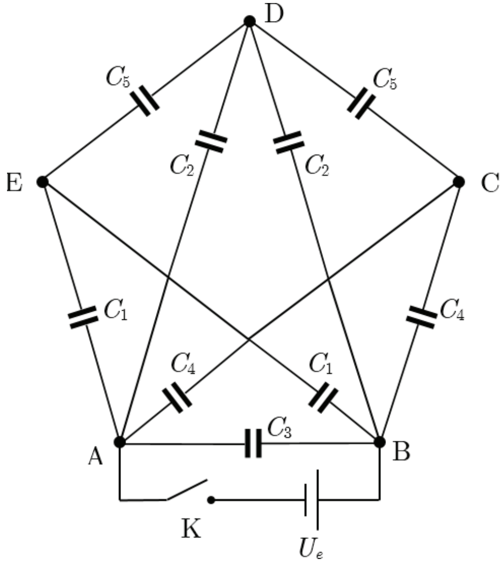
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $c_{10} = 10{,}0$ g/l, $c_{20} = 5{,}0$ g/l, $V = 2{,}50$ l, $v = 0{,}10$ l, $k = 10$.

### 3. Pětiúhelník s kondenzátory

Mezi vrcholy pětiúhelníka je zapojeno 9 nenabitých kondenzátorů o kapacitách $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 2$ μF, $C_3 = 3$ μF, $C_4 = 4$ μF a $C_5 = 5$ μF (obr. 1).

a) Určete výslednou kapacitu, náboje a napětí na každém kondenzátoru, připojíme-li mezi body A a B ideální zdroj s elektromotorickým napětím $U_e = 6$ V.

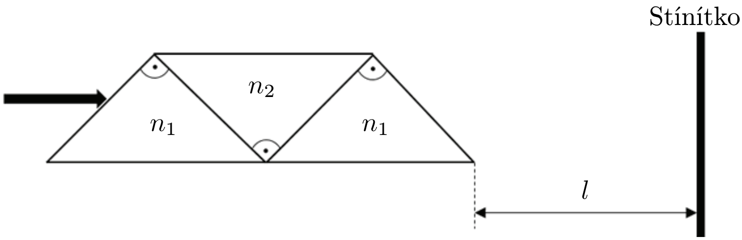
b) Při opakování pokusu se zjistilo, že spojení mezi body B a C je přerušené. Jaké budou náboje a napětí na každém kondenzátoru a jaká bude výsledná kapacita v tomto případě?




Obr. 1

**4. Přímohledný hranol**

Přímohledný hranol se skládá ze tří pravoúhlých hranolů z materiálů o indexu lomu $n_1$ a $n_2$ (obr. 2). Monofrekvenční světlo o vlnové délce $\lambda = 589$ nm po průchodu hranolem nezmění svůj směr. Ve vzdálenosti $l = 1{,}50$ m za hranolem je postaveno stínítko, na které tento paprsek dopadá kolmo. Pro vlnovou délku $\lambda$ (žluté světlo) je index lomu prvního a třetího hranolu $n_1 = 1{,}506$. Pro vlnovou délku $\lambda_f = 397$ nm (fialové světlo) jsou indexy lomu prvního a druhého hranolu $n_{f1} = 1{,}525$ a $n_{f2} = 1{,}944$.




Obr. 2

a) Určete index lomu $n_2$ prostředního hranolu.

b) Určete indexy lomu hranolů pro červené světlo o vlnové délce $\lambda_č = 761$ nm. Pro výpočet závislosti indexu lomu na vlnové délce užijte vztah

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

kde $A$ a $B$ jsou konstanty.

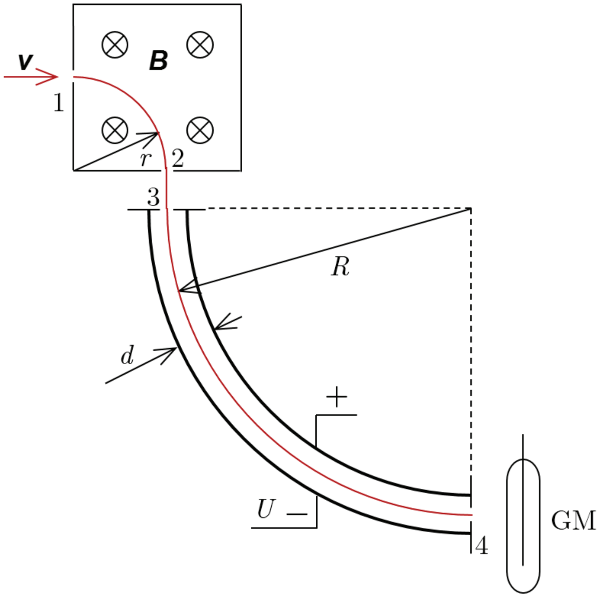
c) Určete úhly, o které se odchýlí od přímého směru paprsek fialového světla o vlnové délce 397 nm a paprsek červeného světla o vlnové délce 761 nm.

d) Určete šířku spektra na stínítku při použití bílého světla.

Rozměry hranolu jsou v porovnání se vzdáleností od stínítka zanedbatelné. Index lomu vzduchu $n_v = 1{,}000$.

**5. Měření hmotnosti elektronů**

Na obr. 3 je pokusné zařízení, kterým můžeme experimentálně určit rychlost a hmotnost elektronů. Elektrony prochází štěrbinou 1 do homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ kolmo k indukčním čarám, kde se při vhodně zvolené hodnotě $B$ pohybují po čtvrtkružnici s poloměrem $r = 0{,}500$ m a vylétají štěrbinou 2. Poté vlétají štěrbinou 3 mezi desky válcového kondenzátoru. Ten je tvořen dvěma čtvrtválcovými plochami se společnou osou, vzdálenými od sebe o $d = 2{,}0$ cm, nabitými na napětí $U$. Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ mezi deskami kondenzátoru je stále kolmá k trajektorii pohybu elektronů, které se tak při vhodně zvolené hodnotě $U$ pohybují po čtvrtkružnici s poloměrem $R = 2{,}000$ m. Elektrony, které vyletují z kondenzátoru štěrbinou 4, jsou registrovány Geigerovým–Müllerovým (GM) počítačem. Geigerův–Müllerův počítač zaznamenal dopady elektronů při $B = 7{,}76$ mT a $U = 10{,}68$ kV.




Obr. 3

a) Určete rychlost, kterou elektron vstupuje do magnetického pole.

b) Určete hmotnost elektronu registrovaného Geigerovým–Müllerovým počítačem, porovnejte ji s klidovou hmotností elektronu a ověřte platnost relativistického vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Odchylku určete v %.

c) Určete v elektronvoltech kinetickou energii elektronu registrovaného Geigerovým–Müllerovým počítačem.

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty. Klidová hmotnost elektronu $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

**6. Měření indexu lomu kapaliny**

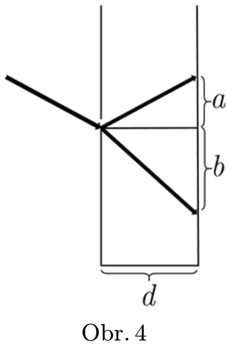
*Pomůcky:* Plastové láhve různých průměrů s hladkými stěnami a s otvorem v boční stěně, voda nebo jiná průhledná kapalina, laserové ukazovátko (nebo školní laser), posuvka, mm měřítko.

*Postup práce:* Do boční stěny širší plastové láhve s hladkými stěnami navrtáme otvor o průměru asi 3 mm. V úrovni otvoru změříme posuvkou průměr láhve $d$. Do láhve dáme kapalinu, jejíž index lomu chceme měřit tak, aby hladina byla právě v rovině otvoru. Do otvoru namíříme laserový paprsek a na protější stěně láhve změříme mm měřítkem vzdálenosti stop $a$ a $b$ odraženého a lomeného paprsku od hladiny kapaliny.

*Úkoly:*

a) Odvoďte vztah pro určení indexu lomu pomocí naměřených vzdáleností $a$, $b$ a $d$.

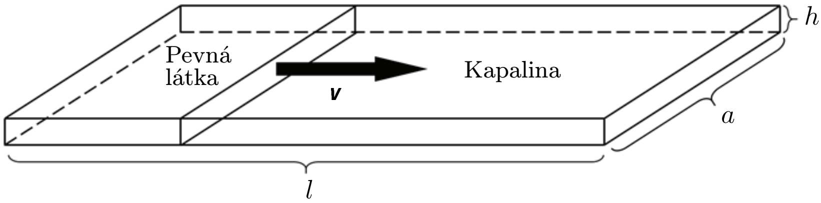
b) Vypočtěte index lomu a určete odchylky měření.




Obr. 4

**7. Hřejivé polštářky**

V záchranné lékařské praxi se užívají hřejivé polštářky, které využívají tepla uvolněného při krystalizaci kapaliny, nacházející se uvnitř polštářku. Iniciace se provádí pomocí katalyzátoru, takže k ní může dojít v poměrně širokém rozsahu teplot. Vnitřní objem polštářku si můžeme představit jako kvádr o rozměrech $a \times l \times h$ (obr. 5). Krystalizace začíná u stěny kvádru s rozměry $a$, $h$, rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou se pohybuje ve směru hrany $l$ malou stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$.




Obr. 5

a) Najděte závislost teploty polštářku $t$ na čase $\tau$.
b) Najděte závislost časové změny teploty polštářku $\frac{dt}{d\tau}$ na čase $\tau$.
c) Jaká bude nejvyšší teplota polštářku $t_{\max}$?
d) Správnost výsledku c) ověřte porovnáním uvolněného tepla $Q_{\text{celk}}$ se skupenským teplem tání $L_t = ml_t$.

Měrné skupenské teplo tání pracovní látky je $l_t$, měrná tepelná kapacita pracovní látky v kapalném stavu je $c_0$, v pevném stavu je měrná tepelná kapacita pracovní látky o $k = 10\ \%$ menší. Počáteční teplota látky je $t_0$. Změnu hustoty pracovní látky a ztráty tepla do okolí během krystalizace zanedbejte. Pracovní látka je dokonale tepelně vodivá, takže teplota látky je v každém okamžiku stejná v celém objemu kvádru. Při řešení použijte vztah

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x,$$

který je pro $x \leq 0{,}1$ splněn s odchylkou menší než 1 %.

## KATEGORIE B

### 1. Galileiho pokusy

V 17. století prováděl Galileo Galilei pokusy na důkaz toho, že pohyb kuličky po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený. Použil k tomu žlab o délce $L = 5$ m, který na jednom konci podepřel ve výšce $h$, kterou postupně měnil. K měření času použil kyvadélko, závažíčko na niti, a měřil závislost dráhy kuličky na počtu $n$ kyvů kyvadélka. Naměřené hodnoty jsou v následující tabulce.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h = 20$ cm | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | $s/\mathrm{m}$ | 0,19 | 0,39 | 0,77 | 1,18 | 1,59 | 2,29 | 2,92 | 3,43 | 4,37 |
| $h = 30$ cm | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | $s/\mathrm{m}$ | 0,27 | 0,64 | 1,17 | 1,79 | 2,47 | 3,51 | 4,31 | – | – |
| $h = 40$ cm | $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | $s/\mathrm{m}$ | 0,37 | 0,90 | 1,54 | 2,31 | 3,01 | 4,60 | – | – | – |

a) Sestrojte graf závislosti dráhy $s$ kuličky na druhé mocnině počtu kyvů kyvadélka $n^2$ a ukažte, že pohyb kuličky ve žlabu je opravdu rovnoměrně zrychlený. Využijte EXCEL nebo jiný tabulkový kalkulátor.

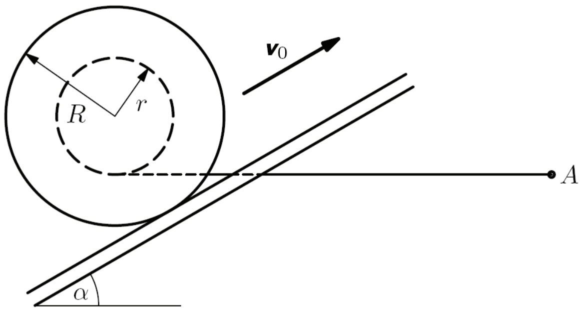
b) Jak závisí zrychlení kuličky $A$ na výšce $h$? Sestrojte graf závislosti zrychlení $A$ v jednotkách $\frac{\mathrm{m}}{(\text{počet kyvů})^2}$ na výšce $h$. Využijte výsledků části a).

c) Jakou dráhu by urazila kulička během 5 kyvů kyvadélka, kdyby výška nakloněné roviny byla 50 cm?

d) Odvoďte vztah pro zrychlení kuličky na nakloněné rovině. Jaká je velikost tíhového zrychlení $g*$ v jednotkách $\frac{\mathrm{m}}{(\text{počet kyvů})^2}$? Jakou délku $l$ má nit kyvadélka? Kyvadélko považujte za matematické.

## 2. Valení cívky

Těžkou cívku, jejíž čela o poloměru $R$ jsou spojena válcem o poloměru $r$, valíme bez prokluzování vzhůru po nakloněných kolejnicích se sklonem $\alpha = 30°$ stálou rychlostí o velikosti $v_0 = 0{,}18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Na konci $A$ lanka namotaného na válec cívky přitom působí síla, která je dvakrát větší než tíha cívky. Volná část lanka je udržována ve vodorovné poloze (obr. 1).

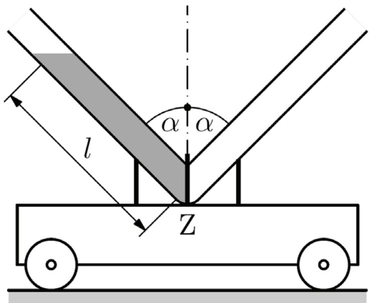



Obr. 1

a) Jaký je poměr $\frac{r}{R}$ poloměrů válce a čel cívky?
b) Jakou rychlostí $\boldsymbol{v}$ se vzhledem k vodorovné podložce pohybuje konec lanka $A$?

### 3. Vozík s trubicemi

Na vozíku je symetricky připevněna trubice tvaru V, jejíž ramena jsou odchýlena od svislého směru o úhel $\alpha$ (obr. 2). V nejnižším bodě je trubice přepažena záklopkou. Hmotnost vozíku i s trubicemi je $M$. Do levého ramene trubice nalijeme rtuť o hmotnosti $m$, která vytvoří sloupec délky $l$. Záklopku uvolníme.




Obr. 2

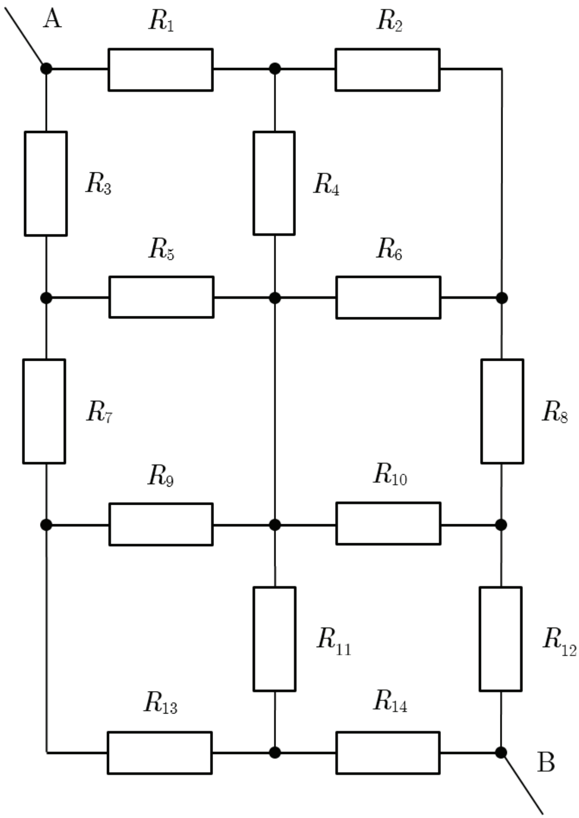
a) Jaká bude největší rychlost $w$, kterou se vozík s trubicemi bude pohybovat vzhledem k podložce?
b) V jaké vzdálenosti od původní polohy a po jaké době se vozík poprvé zastaví?

Tření a kapilární jevy můžeme zanedbat. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $M = 500$ g, $m = 180$ g, $l = 20$ cm, $\alpha = 45°$.

### 4. Obvod s rezistory

Čtrnáct stejných rezistorů s odporem $R = 100\ \Omega$ je zapojeno podle obr. 3. K bodům A a B je připojen ideální zdroj s elektromotorickým napětím $U_e = 25$ V. Určete

a) celkový odpor mezi body A a B,
b) napětí a proud v každém rezistoru.




Obr. 3

**5. Žárovka s cívkou a kondenzátorem**

Žárovka se jmenovitým příkonem $P_0 = 15$ W a se jmenovitým napětím $U_0 = 24$ V je připojena ke zdroji střídavého napětí s efektivní hodnotou $U_1 = 60$ V a s frekvencí $f = 50$ Hz a v sérii s cívkou svítí s předepsanými jmenovitými hodnotami.

a) Určete indukčnost cívky.

b) Určete kapacitu kondenzátoru, který musíme sériově k žárovce s cívkou připojit, aby svítila stejně po připojení ke zdroji střídavého napětí s efektivní hodnotou $U_2 = 40$ V.

c) Pro obě zapojení určete fázové posunutí mezi proudem a napětím.

d) Pro dané hodnoty obou zapojení sestrojte do jednoho obrázku fázorový diagram impedancí a jejich složek.

Úlohy a), b), c) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Elektrický odpor vodiče cívky zanedbejte.

## 6. Měření modulu pružnosti v tahu tyče

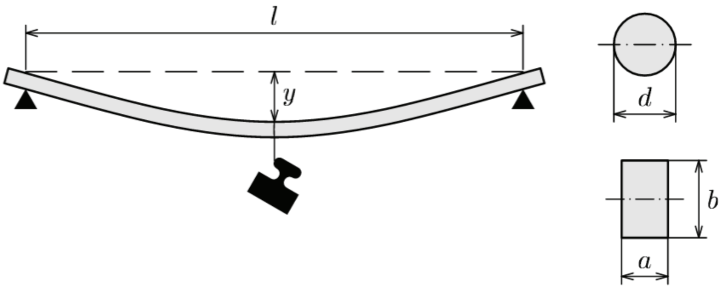
*Teorie:* Tyč délky $l$ podepřenou na koncích zatížíme uprostřed silou o velikosti $F$ realizovanou pomocí závaží (obr. 4). Velikost průhybu je určena vztahem

$$y = \frac{Fl^3}{48EJ},$$

kde $E$ je *Youngův modul pružnosti v tahu* materiálu tyče a $J$ je *plošný moment setrvačnosti průřezu tyče*, který vypočítáme jako

$J = \frac{\pi d^4}{64}$ u tyče kruhového průřezu,

$J = \frac{ab^3}{12}$ u tyče obdélníkového průřezu ($b$ je výška tyče).

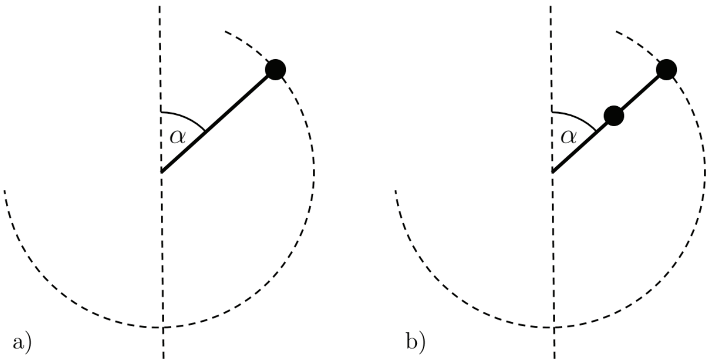



Obr. 4

*Úkol:* Navrhněte a prakticky realizujte měření modulu pružnosti v tahu na základě uvedených vztahů. Jako tyče použijte silnější ocelové dráty různého průměru a délky. Měření případně opakujte i pro dráty z jiného materiálu. Zhodnoťte přesnost měření. Získané výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

## 7. Otáčení tyče se závažím

Homogenní pevná tyč o délce $l$ a hmotnosti $m$ se může volně otáčet kolem vodorovné osy, která prochází jedním jejím koncem. Na druhém konci tyče je připevněno závaží malých rozměrů o stejné hmotnosti. Tyč vychýlíme z rovnovážné polohy tak, že svírá se svislým směrem úhel $\alpha$ (obr. 5a).




Obr. 5

a) Jakou úhlovou rychlostí $\omega$ bude tyč procházet stálou rovnovážnou polohou po jejím uvolnění?
b) Jaká bude doba kmitu $T$ tohoto fyzického kyvadla při malých výchylkách?
c) Jak se změní výsledky, přidáme-li do středu tyče druhé závaží stejné hmotnosti (obr. 5b)?

## KATEGORIE C

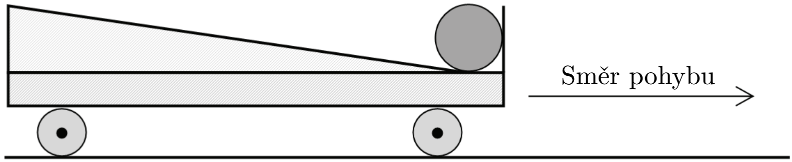
### 1. Rozjíždějící se cyklista

Cyklista se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po rovné silnici, na jejímž kraji jsou pravidelně rozmístěné značky. Čas jízdy od první ke druhé značce je $t_1 = 2{,}0$ s, od druhé ke třetí značce $t_2 = 1{,}0$ s.

a) Jaká bude doba jízdy cyklisty $t_3$ od třetí ke čtvrté značce?
b) S jakým zrychlením se pohyboval cyklista a jaká byla jeho rychlost u páté značky, bylo-li dodatečně zjištěno, že vzdálenost mezi značkami je $s = 6{,}0$ m?

### 2. Válec na nakloněné rovině ve vagónu

Plošinu vagónu tvoří nakloněná rovina se sklonem $\alpha = 5{,}0°$, rovina stoupá od předního konce vagónu k zadnímu konci. V nejnižším místě plošiny se nachází plný homogenní válec, jeho geometrická osa je kolmá k bočním stěnám vagónu. Vagón je tažen lokomotivou po přímých vodorovných kolejích.




Obr. 1

a) Určete maximální velikost $a_m$ zrychlení, s nímž se může vagón při rozjíždění pohybovat, aby se válec neuvedl do pohybu.

Vagón se pohybuje z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti $a = 1{,}6a_m$, od okamžiku dosažení rychlosti o velikosti $v = 11{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ se dále pohybuje rovnoměrně.

b) Určete minimální délku $l$ nakloněné roviny, při níž válec z vagónu nevypadne.

c) Určete celkovou dráhu $s$ vagónu, na které je válec ve vagónu mimo svoji počáteční polohu.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

### 3. Kruhový děj

S jednoatomovým ideálním plynem provedeme následující cyklický děj: Nejprve za stálého tlaku $p_1$ zvýšíme jeho objem z objemu $V_1 = 2{,}00$ l na objem $V_2 = 16{,}0$ l, pak zmenšíme tlak plynu za stálého objemu na $p_2 = 50{,}0$ kPa a nakonec plyn adiabaticky stlačíme na počáteční objem a tlak.

a) Nakreslete p–V diagram s obecným vyznačením tlaků $p_1$ a $p_2$ a objemů $V_1$ a $V_2$ a určete počáteční tlak plynu $p_1$.

b) Určete celkovou práci vykonanou plynem během kruhového děje a teplo, které během kruhového děje musíme plynu dodat.

c) Určete účinnost kruhového děje.

Úlohy a) a b) řešte obecně, pak pro dané hodnoty. Vnitřní energie plynu s jednoatomovými molekulami $U = \frac{3}{2}nRT$, $\kappa = 1{,}67$.

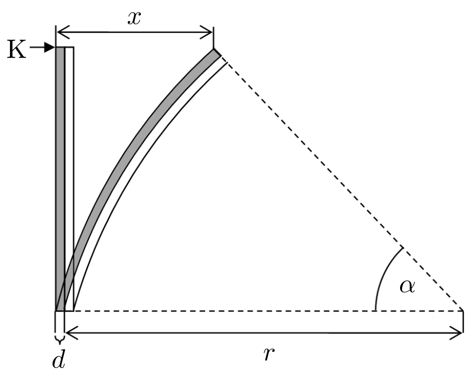
### 4. Bimetalový pásek

Bimetalový pásek má v přímém tvaru délku $l_0 = 12$ cm a skládá se ze dvou částí, měděné a zinkové. Tloušťka obou částí je $d = 1{,}0$ mm. Součinitel teplotní délkové roztažnosti zinku je $\alpha_{\mathrm{Zn}} = 3{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, mědi $\alpha_{\mathrm{Cu}} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$. Pásek rovnoměrně zahřejeme o $\Delta t = 60\ °\mathrm{C}$. Určete:

a) Rozdíl délek měděné a zinkové části po zahřátí,

b) poloměr křivosti $r$ prohnutého pásku po zahřátí a odpovídající středový úhel $\alpha$.

c) O jakou vzdálenost $x$ se při zahřátí posunul bod, dotýkající se kontaktu na konci pásku?




Obr. 2

### 5. Kalorimetry a součástky

Tepelně izolovaná nádoba – kalorimetr – je až po okraj plná vody o teplotě $t_1 = 19{,}0\ °\mathrm{C}$. Když do kalorimetru vhodíme jednu kovovou součástku o hustotě $\rho = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a teplotě $t = 99{,}0\ °\mathrm{C}$, část vody přeteče a teplota vody po ustavení rovnováhy stoupne na $t_2 = 32{,}2\ °\mathrm{C}$. Když pokus opakujeme se stejným množstvím stejně teplé vody, ale do kalorimetru vhodíme dvě stejné a stejně zahřáté součástky, bude výsledná teplota v kalorimetru $t_3 = 48{,}8\ °\mathrm{C}$.

a) Jaká je měrná tepelná kapacita $c$ materiálu, z něhož jsou zhotoveny součástky?

b) Jaký je poměr hmotnosti vody v kalorimetru před vhozením součástky a hmotnosti kovové součástky?

c) Jaká by byla výsledná teplota $t_4$, kdybychom do kalorimetru místo dvou vhodili tři stejné a stejně zahřáté součástky?

Úlohy a) a b) řešte nejprve obecně, část c) řešte číselně s použitím výsledku části a). Hustota vody je $\rho_v = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, měrná tepelná kapacita vody je $c_v = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Ztráty tepla do okolí jsou zanedbatelné.

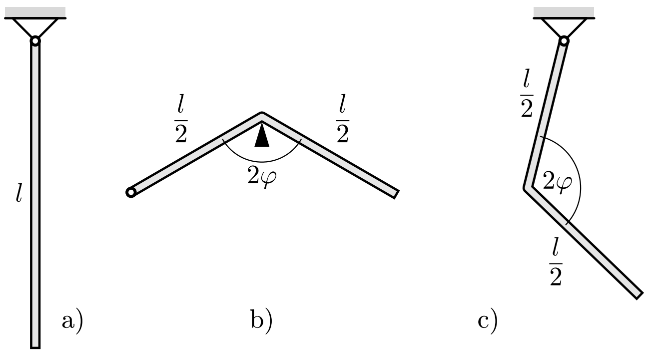
## 6. Kyvadla

*Teoretické úkoly:*

a) Určete délku $l$ tenké tyče kývající okolo osy umístěné na jejím konci, aby doba kmitu byla přesně $T_1 = 1$ s (obr. 3a).

b) Stejnou tyč uprostřed ostře ohneme a v místě ohybu položíme na tenký břit (obr. 3b). Určete úhel ohybu $2\varphi$, aby doba kmitu byla opět přesně $T_2 = 1$ s.

c) Ohnutou tyč z úlohy b) upevníme otáčivě na konci (obr. 3c). Určete dobu kmitu tohoto kyvadla $T_3$.




Obr. 3

*Praktické úkoly:*

Zhotovte kyvadla popsaná v teoretické části, změřte jejich doby kyvu a naměřené hodnoty porovnejte s teoretickými předpoklady.

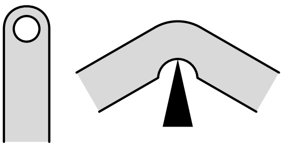
*Pokyny k provedení:*

a) Kyvadla zhotovíme z drátu o průměru asi 2 mm z hliníku, mědi nebo oceli. Konec rozklepáme a vyvrtáme do něj otvor o průměru asi 1 mm a přebytečný materiál opilujeme tak, že vznikne malé očko (obr. 4a).

Od jeho středu naměříme délku kyvadla vypočtenou v teoretickém úkolu a), drát přestřihneme a kyvadlo vyrovnáme. Jako osu kyvadla použijeme špendlík zabodnutý kolmo do svislé desky.

b) Nalezneme střed drátu a drát ohneme podle výsledku výpočtu v teoretickém úkolu b). Místo ohybu mírně propilujeme, aby vznikl žlábek (obr. 4b). Tím zabráníme vychylování kyvadla z roviny kolmé k ose. Jako břit použijeme nůž upnutý do svěráku.

c) Ohnutý drát z úlohy b) necháme kývat okolo osy tvořené špendlíkem jako v úloze a).

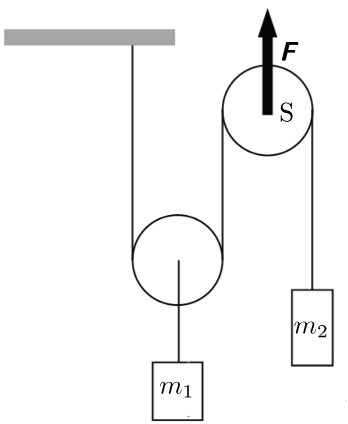


a) b)

Obr. 4

**7. Dvě závaží na kladkách**

V soustavě dvou těles o hmotnostech $m_1$ a $m_2$ a dvou kladek jsou hmotnosti nití a kladek zanedbatelné. Nit je pevná a neroztažitelná. Na horní kladku působí v jejím středu S síla $\boldsymbol{F}$ (obr. 5).




Obr. 5

Určete

a) velikosti sil napínajících nitě, na kterých visí závaží,
b) velikosti zrychlení těles $a_1$ a $a_2$,
c) velikost zrychlení středu S horní kladky.

## KATEGORIE D

### 1. Plavci v řece

Adam a Zbyněk se na břehu řeky šířky $d = 130$ m domluvili, že jejich společný cíl je nejbližší místo na protějším břehu a že poplavou svojí stejnou obvyklou rychlostí, jak ji mají natrénovanou ve sportovním oddíle. Adam plaval kolmo ke směru toku řeky, doplaval ke břehu za čas $t_1 = 1$ min 32 s, proud ho však současně unesl do vzdálenosti $l = 80$ m od plánovaného cíle, do kterého poté doplaval podél břehu proti proudu řeky. Zbyněk se dostal do cíle přímo.

a) Pod jakým úhlem $\alpha$ vzhledem ke spojnici start cíl plaval Zbyněk?
b) Určete celkovou dobu $t_A$ plavby Adama a dobu $t_Z$ plavby Zbyňka.
c) Proveďte diskuzi o řešitelnosti úlohy v závislosti na vztahu mezi $d$ a $l$.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

### 2. Míček a diabolka

Měkčený míček o hmotnosti $m_1 = 19$ g padal volným pádem, když jej po uražené dráze $h = 70$ cm zasáhla diabolka o hmotnosti $m_0 = 0{,}54$ g letící rychlostí o velikosti $v_0 = 170\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ vystřelená ze vzduchovky. Po zásahu diabolka v míčku uvázla v ose procházející středem míčku.

a) Určete velikost a směr rychlosti $\boldsymbol{u}$ míčku bezprostředně po zásahu, jestliže diabolka přiletěla ve svislém směru odspoda.
b) Určete velikost a směr rychlosti $\boldsymbol{w}$ míčku bezprostředně po zásahu, jestliže diabolka přiletěla z vodorovného směru.

### 3. Dva kvádry

Dva homogenní kvádry mají shodnou hustotu, délku a šířku. Výška prvního kvádru je $h_1$, výška druhého $h_2$, přičemž $h_1 < h_2$. První kvádr má hmotnost $m_1$. Kvádry položíme na sebe, nižší na vyšší. Součinitel smykového tření mezi kvádry je $f$. Působíme-li na horní kvádr postupně rostoucí vodorovnou silou, začne v jednom okamžiku klouzat horní kvádr po spodním a spodní zůstane v klidu. Nyní vyměníme pořadí kvádrů, vyšší položíme na nižší. Působíme-li tentokrát na horní kvádr postupně rostoucí vodorovnou silou, začne v jednom okamžiku klouzat celá soustava obou kvádrů po podložce.

a) Určete hmotnost $m_2$ druhého kvádru.
b) Určete možné hodnoty součinitele $f'$ smykového tření mezi kvádrem a podložkou.
c) Určete maximální velikost zrychlení, s nímž se může dolní kvádr po podložce pohybovat, aby se horní kvádr po něm nesmýkal.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $h_1 = 6{,}0$ cm, $h_2 = 8{,}0$ cm, $m_1 = 570$ cm, $f = 0{,}35$.

### 4. Tři řetězy

Tři řetězy jsou vyrobeny ze shodných článků. První má délku $l_1 = 80$ cm a hmotnost $m_1 = 0{,}60$ kg, druhý má délku $l_2 = 140$ cm, hmotnost třetího je $m_3 = 1{,}95$ kg. Každý řetěz postupně uchopíme za krajní článek a vytáhneme do výšky $h_0 = 2{,}00$ m, kde jej zavěsíme.

a) Určete hmotnost $m_2$ druhého řetězu a délku $l_3$ třetího řetězu.
b) Sestrojte graf závislosti velikosti síly potřebné ke zdvíhání na okamžité výšce horního konce řetězu.
c) Vypočtěte obsah plochy pod každým grafem a určete fyzikální význam tohoto obsahu.
d) Každý řetěz uvolníme a necháme padat. Určete velikost rychlosti dopadu horního konce každého řetězu.

Úlohy a) a d) řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tření mezi řetězy a podložkou je zanedbatelné.

### 5. Rozjezd automobilu

Automobil o hmotnosti $m = 1\,400$ kg se pohybuje po vodorovné silnici s konstantním výkonem tahové síly $P_0 = 22$ kW rychlostí o velikosti $v_0 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Přitom proti pohybu působí síla valivého odporu o stálé velikosti $F_v = 280$ N a síla odporu vzduchu, jejíž velikost je přímo úměrná druhé mocnině velikosti rychlosti $F_o = kv^2$, kde $k$ je konstanta.

a) Určete obecně i číselně konstantu $k$.

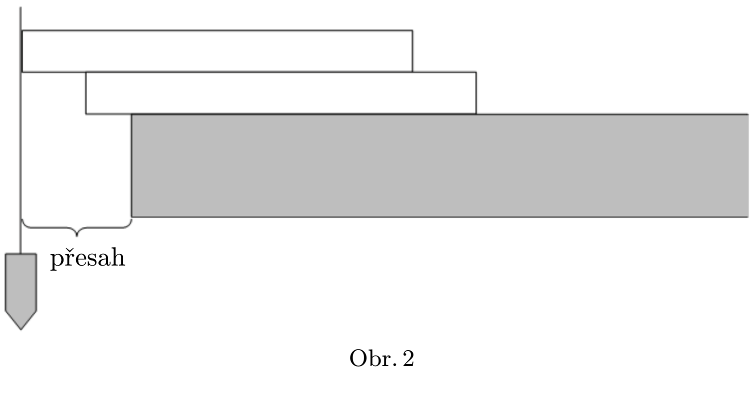
b) Automobil jede do kopce se stoupáním $h/s = 0{,}087$, kde $h$ je výška a $s$ je dráha. Sestrojte graf závislosti potřebného okamžitého výkonu na okamžité rychlosti při rovnoměrném pohybu do kopce v intervalu $\langle 0\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}; 120\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\rangle$. V grafu ponechte jednotku rychlosti $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Do obrázku přidejte graf téže závislosti při zanedbání odporu vzduchu a graf téže závislosti při zanedbání obou odporových sil.

c) Z grafu určete velikost maximální rychlosti $v_{\max}$, s níž se může automobil do uvedeného kopce rovnoměrně pohybovat, jestliže maximální možný výkon jeho tahové síly je $P_{\max} = 66\ \mathrm{kW}$.

**6. Stavba šikmé věže z kvádrů**

Ze shodných homogenních kvádrů postavíme extrémní šikmou věž podle daných pravidel. Kvádry v poloze naležato klademe na vodorovnou rovinu na sebe tak, aby v každé vrstvě byl právě jeden kvádr a jejich vzájemné posunutí bylo pouze v podélném směru. Vhodný kvádr má nejdelší hranu mnohem delší než nejkratší hranu (obr. 1).

Obr. 1




Obr. 2

*Pomůcky:*

Shodné homogenní kvádry, olovnice, délkové měřidlo.

*Úkoly:*

a) Položte na sebe dva kvádry a vysuňte každý z nich přes hranu stolu tak, aby horní kvádr co nejvíce přesahoval přes hranu stolu. Změřte a teoreticky zdůvodněte maximální délku přesahu horního kvádru přes hranu stolu tak, aby se stavba ještě nezvrátila. Délku přesahu vyjádřete zlomkem jako násobek délky $l$ jednoho kvádru.

b) Podle předchozího vzoru sestavte z minimálního počtu kvádrů šikmou věž tak, aby horní kvádr přesahoval přes hranu stolu aspoň o svoji vlastní délku $l$. Kolik kvádrů jste použili?

c) Vypočtěte pro použitý počet kvádrů teoreticky maximální přesah, výsledek vyjádřete zlomkem jako násobek délky $l$ jednoho kvádru.

**7. Setkání automobilů**

Automobil jedoucí rychlostí o velikosti $21{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ začne v nulovém čase brzdit a zastavuje s konstantním zrychlením o velikosti $1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V nulovém čase v protisměru ve vzdálenosti 150 m stojí druhý automobil a v čase 3,0 s se začíná rozjíždět se stálým zrychlením o velikosti $2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Sestrojte graf závislosti souřadnice $x$ polohy každého automobilu na čase na časovém intervalu 0 s až 15 s. Kladný směr osy $x$ přiřaďte směru pohybu prvního automobilu. Potřebné výpočty proveďte po časovém intervalu 1 s a časy společně se souřadnicemi každého automobilu zapište do vhodné tabulky.

b) Z grafu zjistěte čas $t_s$ a souřadnici $x_s$ setkání obou automobilů.

c) Ke každému grafu sestrojte co nejpřesněji tečnu v bodě, který odpovídá setkání automobilů. U každé tečny určete její směrnici (tj. poměr změny souřadnice $\Delta x$ a odpovídající změny času $\Delta t$), která udává souřadnici okamžité rychlosti v okamžiku setkání.

d) Pomocí vzorců pro velikost rychlosti rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu ověřte správnost výsledků c).