Martin Malý

Řešení školní kombinatorické úlohy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 4, 34–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146689`

Řešení školní kombinatorické úlohy

Martin Malý, Brno

Abstract. The article describes one of the possible approaches to the solution of a general combinatorial problem adjusted to high school or even middle school level. The readers can try to solve the concluding exercise to test their understanding of the subject matter.

> . . . nestaneme se kupříkladu nikdy matematiky, byť bychom podrželi v paměti důkazy všech ostatních matematiků, pokud nejsme schopni vyřešit některé příklady také rozumem. . .
>
> *René Descartes* (Pravidla pro vedení rozumu)

Když jsem ve druhé polovině svých dvacátých let začínal brát matematiku vážněji, než jsem ji brával dříve, dostal se mi do ruky výtisk čísla 20/97 časopisu *100+1 zahraniční zajímavost*, kde mě zaujal článek *Netradiční matematika*. Článek pojednává o tehdejší reformě ve výuce matematiky v USA. Jako ilustrace nových metod zaváděných do výuky je v článku uveden problém, který řešily děti z 5. třídy základní školy v kalifornském Sun Valley. Otázka zní (cituji z [1]):

„Jestliže si každý z přítomných v této místnosti s každým podá ruku, kolik to bude podání rukou?“

Protože jsem chtěl znát řešení a v článku nebylo řešení uvedeno, pokusil jsem se je najít sám. Řešení jsem našel až v obecné rovině, a protože mi i dnes, po více než patnácti letech, připadá postup jeho získání zajímavý, vznikl tento článek.

Nejdříve přeformulujeme uvedený problém na obecnou kombinatorickou úlohu. Tuto úlohu následně vyřešíme a odpovíme na otázku z [1].

Školní úloha

Urči pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, počet p_n všech dvouprvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Řešení.

Úlohu budeme řešit tak, že užitím obecného konstrukčního postupu sestrojíme všechny dvouprvkové podmnožiny malé konečné množiny a na základě názorného vyjádření „vhodného“ speciálního případu konstrukce pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ větší než 1 určíme číslo p_n. Malou konečnou množinou bude množina U tvořená libovolnými pěti objekty $x_1, \ldots, x_5$. Symbolem I budeme značit množinu $\{1, \ldots, 5\}$.

Dříve, než přikročíme k prvnímu kroku, objasněme si princip konstrukce: Všechny dvouprvkové podmnožiny libovolné konečné množiny M tvořené aspoň dvěma prvky můžeme sestrojit tak, že vezmeme libovolný prvek $x \in \mathrm{M}$ a utvoříme všechny dvojice $\{x, y\} \subset \mathrm{M}$, zřejmě právě tehdy, když $|\mathrm{M}| = 2$. V případě, kdy $|\mathrm{M}| > 2$, nám po provedení tohoto postupu zbude v množině $\mathrm{M}\setminus\{x\}$ aspoň jedna další dvojice; jiné dvojice než dvouprvkové podmnožiny množiny $\mathrm{M}\setminus\{x\}$ již utvořit nemůžeme. Je-li tedy $\mathrm{M}\setminus\{x\}$ dvouprvková, máme hotovo; jinak aplikujeme postup, který jsme užili u množiny M, na množinu $\mathrm{M}\setminus\{x\}$. A tak dále, dokud neutvoříme všechny dvouprvkové podmnožiny množiny M a současně tuto množinu nezredukujeme na některou z jejích dvouprvkových podmnožin.

Přistupme nyní k formulaci konstrukčního předpisu:

Konstrukce

1. $\{x_i, x\}$, $i \in \mathrm{I}$, $x \in \mathrm{U}\setminus\{x_i\}$
2. $\{x_j, x\}$, $j \in \mathrm{I}\setminus\{i\}$, $x \in \mathrm{U}\setminus\{x_i, x_j\}$
3. $\{x_k, x\}$, $k \in \mathrm{I}\setminus\{i, j\}$, $x \in \mathrm{U}\setminus\{x_i, x_j, x_k\}$
4. $\mathrm{U}\setminus\{x_i, x_j, x_k\}$

$\boldsymbol{x}_5$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	$\boldsymbol{x}_4$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	x_4	$\boldsymbol{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	x_4	x_3	$\boldsymbol{x}_2$	$\underline{x}_1$

Tab. 1: Výčet všech dvouprvkových podmnožin množiny U; utvoříme-li pro každé $i \in \mathrm{I}\setminus\{1\}$ všechny dvojice tvaru $\{x_i, x_j\}$, $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, dostaneme množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny U.

Jednu z řady možných podob uvedené konstrukce přehledně zachycuje tab. 1.[1] Z ní vyčteme, že $p_5 = 4+3+2+1 = 10$, a nejen to. Všimněme si, že označíme-li p_5', p_5'' přirozená čísla udávající, kolikrát se v části tabulky

[1] Pro získání názorné představy si můžete konstrukční postup i modelovat jako reálnou činnost na vhodných předmětech, které máte právě po ruce.

tvořené po řadě podtrženými a nepodtrženými symboly prvků množiny U vyskytuje symbol prvku množiny U, potom $p_5 = p'_5 = p''_5$. Je tedy $p_5 = \frac{1}{2}(p'_5 + p''_5) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4$. Obraťme nyní pozornost k tab. 2. Dovedeme-li se podívat na jí znázorněnou rozložitelnost tab. 1 o pěti sloupcích a čtyřech řádcích jako na speciální případ rozložitelnosti zobecnění tab. 1 o n sloupcích a $n-1$ řádcích, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, můžeme ihned uzavřít, že pro každé přirozené číslo větší než 1 je $p_n = p'_n = p''_n$, odkud $p_n = \frac{1}{2}(p'_n + p''_n)$, neboli $p_n = \frac{1}{2}n(n-1)$.

$\boldsymbol{x}_5$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	$\boldsymbol{x}_4$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	x_4	$\boldsymbol{x}_3$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_1$
x_5	x_4	x_3	$\boldsymbol{x}_2$	$\underline{x}_1$

Tab. 2: Výčet všech dvouprvkových podmnožin množiny U; „zezipované“ rámečky znázorňují rozložitelnost tab. 1

Cvičení.

1. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ určete součet s_n prvních n celých nezáporných čísel.
2. Najděte vztah mezi s_n a p_n, kde $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné číslo.
3. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ určete počet r_n všech uspořádaných dvojic sestrojitelných z n objektů, má-li se každý v kterékoli z nich vyskytovat nejvýš jednou. Návod: Vyjděte ze vztahu pro p_n, kde $n > 1$. Zkuste to ale i jinak, např. pomocí „vhodné“ tabulky.
4. Vyjádřete vztah mezi p_n a r_n, kde $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné číslo.
5. Dosaďme v konstrukčním předpisu uvedeném výše za proměnné i, j, k konstanty z množiny I, např. po řadě 3, 4, 1. Dostaneme tak konkrétní podobu konstrukce. Kolik takovýchto podob existuje?

Literatura

[1] Netradiční matematika. *100+1 zahraniční zajímavost*, roč. 34 (1997), č. 20, s. 43.

[2] Calda, E. – Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.