Petr Šatný
Funkcionální rovnice z MMO 2015

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 4, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146683

Funkcionální rovnice z MMO 2015

Petr Šatný, Gymnázium Vídeňská, Brno

Abstract. The paper deals with Problem 5 of the 56th International Mathematical Olympiad in Thailand 2015. We attack the involved functional equation by an interesting and less usual method of considering the properties of fixed point's set of any satisfactory unknown function.

Na druhý soutěžní den 56. mezinárodní matematické olympiády (MMO), jež proběhla v červenci 2015 v thajském městě Chiang Mai (podrobnosti viz [1]), byly na dobu 4,5 hodiny jako obvykle účastníkům předloženy k řešení tři náročné původní úlohy. Jedna z nich spočívala v řešení zajímavé funkcionální rovnice, které se hodláme podrobně věnovat právě v našem článku. Nejprve uvedeme její zadání.

Úloha 5 z MMO 2015. *Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici*

$$f\bigl(x + f(x+y)\bigr) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x) \tag{1}$$

pro všechna reálná čísla x a y.

Poznamenejme nejdříve, že funkcionální rovnice bývají zařazovány do nejvyšších věkových kategorií středoškolských matematických soutěží u nás i ve světě. V kategorii A naší MO to byla v poslední době úloha 4 v domácím kole 62. ročníku a úloha 6 v ústředním kole 60. ročníku (viz [2]). Přestože se funkcionální rovnice ve školní výuce neprobírají, do zmíněných soutěží jsou vybírány takové jejich příklady, k jejichž řešení nejsou potřebné žádné teoretické poznatky. Řešitelům MO se tak v rámci přípravy doporučuje seznámení s příklady funkcionálních rovnic z minulých ročníků různých matematických soutěží, základní poučení o funkcionálních rovnicích mohou najít v brožuře [3] nebo knize [4]. Řešené příklady funkcionálních rovnic jsou obsaženy v poučném článku [5].

Žádný z šestice českých reprezentantů v Thajsku funkcionální rovnici (1) nevyřešil úplně. Některým se podařilo uhodnout obě její řešení, nedokázali však, že žádná jiná řešení neexistují. Různým dosazováním vhodně volených dvojic (x, y) do rovnice (1) kupříkladu zjistili, že každá vyhovující funkce f má v bodě 0 hodnotu 0 nebo 2. Žádné další významné vlastnosti vyhovujících funkcí f, které by vedly k nalezení všech jejich možných předpisů, však neobjevili.[1] Tento neúspěch našich matematických talentů měl zřejmě jasnou příčinu – malou zkušenost s úvahami o tzv. *pevných bodech* funkcí, bez kterých je řešení funkcionální rovnice (1) patrně neschůdné. Smyslem našeho článku je na tuto problematiku české čtenáře upozornit, a rozšířit tak „arzenál“ charakteristických vlastností funkcí, které při jejich zkoumání mohou využívat. Nejedná se pouze o oblast funkcionálních rovnic; ve vyšší matematice se totiž na hledání pevných bodů vhodně sestrojených zobrazení převádí řešení mnohých problémů spojených například s diferenciálními rovnicemi.

Termín *pevný bod* funkce f má zřejmý význam – nazýváme jím každé číslo $x_0 \in D_f$, pro něž platí $f(x_0) = x_0$. Najít kupříkladu všechny pevné body lineární funkce $f_1(x) = 2 - x$ znamená vyřešit rovnici $2 - x = x$; její řešení $x_0 = 1$ je tak jediným pevným bodem funkce f_1. Oproti tomu lineární funkce $f_2(x) = x$ má zřejmě za pevné body všechna reálná čísla, zatímco lineární funkce $f_3(x) = x + 1$ žádné pevné body nemá. Sami vymyslete příklady kvadratických funkcí s žádným, jedním či dvěma pevnými body.

V průběhu řešení funkcionální rovnice (1) budeme zkoumat, jaké vlastnosti plynoucí z (1) musí mít *množina všech pevných bodů* libovolné vyhovující funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pro výhodnější zápisy proto zavedeme její označení

$$P_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}.$$

Abychom náš výklad vlastního postupu koncentrovali na hlavní předmět našeho zájmu, totiž na množinu P_f, podejme nejdříve poněkud volnější komentář prvotních poznatků o rovnici (1), z nichž část by v zápisu úplného řešení neměla chybět (zejména zkouška obou nalezených řešení).

Začneme konstatováním, že při řešení téměř každé funkcionální rovnice se vyplatí nejdříve uhodnout (alespoň) některá její řešení, neboť jejich tvar může napovědět, jaké vlastnosti lze od jakéhokoliv řešení očekávat. V případě rovnice (1) je hned patrné, že jedním jejím řešením je funkce s předpisem $f(x) = x$ – když totiž „zrušíme“ všechna f na obou stranách (1), zůstane na nich po úpravě stejný výraz $2x + y + xy$. Objevit druhé řešení rovnice (1), totiž funkci $f(x) = 2 - x$, už tak snadné

---

[1] Čtenářům doporučujeme, aby se o důkaz tvrzení $f(0) \in \{0, 2\}$ pokusili sami. Dalším vhodným námětem k samostatné práci je snazší varianta původní úlohy, a to najít pouze všechny *liché* funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici (1).

není. Podaří se nám to, když se rozhodneme předem najít všechny lineární funkce $f(x) = ax + b$, které dané rovnici (1) vyhovují.[2] Dosaďme proto takovou funkci (s dosud neurčenými koeficienty a, b) do obou stran rovnice (1) a jejich hodnoty pak porovnejme rozdílem:

$$L = f\bigl(x + a(x + y) + b\bigr) + axy + b = a(x + ax + ay + b) + b + \\ + axy + b = axy + (a^2 + a)x + a^2y + ab + 2b$$

$$P = x + a(x + y) + b + y(ax + b) = axy + (a + 1)x + (a + b)y + b$$

$$L - P = \bigl(a^2 - 1\bigr)x + \bigl(a^2 - a - b\bigr)y + b(a + 1)$$

Odtud vyplývá, že rovnost $L - P = 0$ platí pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}$, právě když poslední odvozený výraz má všechny tři koeficienty $a^2 - 1$, $a^2 - a - b$ a $b(a + 1)$ rovny nule.[3] Této podmínce zřejmě vyhovují pouze dvě dvojice čísel (a, b) rovné $(-1, 2)$ a $(1, 0)$. Tak jsme ověřili, že funkcionální rovnici (1) vyhovují právě dvě lineární funkce f, totiž funkce $f_1(x) = 2 - x$ a $f_2(x) = x$ (zkoušku dosazením už dělat nemusíme). Zmínili jsme je obě záměrně již v odstavci o pevných bodech jako příklady funkcí, jejichž pevné body tvoří množiny

$$P_{f_1} = \{1\} \quad \text{a} \quad P_{f_2} = \mathbb{R}.$$

Bude poučné mít tyto dvě množiny na paměti při čtení řešení úlohy z MMO 2015, ke kterému se konečně dostáváme a v němž se soustředíme, jak jsme slíbili, na množinu P_f pevných bodů libovolného řešení f rovnice (1). Jak se ukáže, *jiná řešení než dvě uvedené lineární funkce f_1 a f_2 neexistují ani v oboru všech funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Řešení. Předpokládejme, že f je libovolná funkce, která splňuje rovnost (1) pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Volbou $y = 1$ z ní dostaneme

$$f\bigl(x + f(x + 1)\bigr) + f(x) = x + f(x + 1) + f(x),$$

$$f\bigl(x + f(x + 1)\bigr) = x + f(x + 1).$$

Poslední rovnost vnímavě přečteme tak, že hodnota $x + f(x + 1)$ je pevným bodem funkce f, ať je samo $x \in \mathbb{R}$ zvoleno jakkoliv. Zaměníme-li

[2] V matematických soutěžích se často zadávají jen takové funkcionální rovnice, jejichž všechna řešení jsou lineární či kvadratické funkce, zkušenější řešitelé to podle tvaru rovnice obvykle rychle poznají.

[3] Proč jsou koeficienty nutně rovny nule, vysvětlíme tak, že do výrazu za dvojici (x, y) postupně dosadíme $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

přitom x za $x - 1$, získáme následující poznatek o množině P_f všech pevných bodů funkce f:

$$x - 1 + f(x) \in P_f \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Víme tak, že množina P_f je neprázdná. Podívejme se, zda lze všechny pevné body hledané funkce f snadno zjistit. Vezmeme-li libovolný prvek $y_0 \in P_f$, tedy libovolné číslo $y_0 \in \mathbb{R}$ s vlastností $f(y_0) = y_0$, pak volbou $x = 0$ a $y = y_0$ v (1) postupně získáme

$$\begin{aligned} f\big(f(y_0)\big) + f(0) &= f(y_0) + y_0 f(0), \\ y_0 + f(0) &= y_0 + y_0 f(0), \\ f(0)(1 - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Vše o množině P_f je tedy jasné za podmínky $f(0) \neq 0$, kdy z poslední rovnosti vychází $1 - y_0 = 0$, takže hledaná funkce f má jediný pevný bod $y_0 = 1$, neboli $P_f = \{1\}$. Tedy podle (2) musí platit

$$x - 1 + f(x) = 1,$$

čili

$$f(x) = 2 - x \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

což je předpis pro jedno z obou řešení f_1 zadané úlohy, která jsme objevili dříve. Proto se v celém dalším řešení budeme zabývat zbývajícím případem, kdy naopak platí $f(0) = 0$ a předchozí úvaha o obecném bodě $y_0 \in P_f$ nevede k žádnému závěru.

Volbou $y = -x$ v (1) díky rovnosti $f(0) = 0$ obdržíme

$$f(x) + f(-x^2) = x - xf(x). \tag{3}$$

Pro $x = -1$ tak zjistíme, že platí

$$f(-1) + f(-1) = -1 + f(-1), \text{ neboli } f(-1) = -1.$$

S ohledem na tuto skutečnost nyní z rovnosti (3) pro $x = 1$ máme $f(1) + f(-1) = 1 - f(1)$ neboli $f(1) = 1$.[4)]

[4)] Zjistili jsme tak, že pevnými body funkce f jsou – vedle předpokládané nuly – i čísla -1 a 1. Další jednotlivé prvky P_f však už hledat nebudeme.

Druhý významný důsledek předpokladu $f(0) = 0$ získáme, když v rovnosti (1) zvolíme $y = 0$. Dostaneme vztah

$$f(x + f(x)) = x + f(x),$$

podle kterého rovněž hodnoty $x + f(x)$ patří k pevným bodům funkce f:

$$x + f(x) \in P_f \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Porovnejme nyní závěry (2) a (4): pevný bod $x + f(x)$ funkce f je o 1 větší než její pevný bod $x - 1 + f(x)$. Ukažme, že platí (poněkud překvapivý) závěr: je-li pro nějaké $y_0 \in P_f$ rovněž $y_0 + 1 \in P_f$, pak také $y_0 + 2 \in P_f$. Skutečně, z rovností $f(y_0) = y_0$ a $f(y_0 + 1) = y_0 + 1$ při volbě $x = 1$ a $y = y_0$ v (1) obdržíme (s ohledem na výše dokázaný výsledek $f(1) = 1$)

$$\begin{gathered} f\bigl(1 + f(1 + y_0)\bigr) + f(y_0) = 1 + f(1 + y_0) + y_0 f(1), \\ f(1 + 1 + y_0) + y_0 = 1 + (1 + y_0) + y_0, \\ f(y_0 + 2) = y_0 + 2, \end{gathered}$$

jak jsme chtěli ukázat.

Právě dokázaná vlastnost vede k následujícímu důsledku závěrů (2) a (4): rovněž hodnota $x + 1 + f(x)$ je pevným bodem funkce f. Po nahrazení x za $x - 1$ dostaneme

$$x + f(x - 1) \in P_f \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

To je výsledný poznatek o množině P_f, který k dokončení řešení v případě $f(0) = 0$ budeme potřebovat. Uplatníme ho tak, že odpovídající rovnost

$$f\bigl(x + f(x - 1)\bigr) = x + f(x - 1)$$

využijeme při úpravě výsledku po dosazení $y = -1$ do rovnosti (1). Dostaneme

$$\begin{gathered} f\bigl(x + f(x - 1)\bigr) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x), \\ x + f(x - 1) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x), \\ f(-x) = -f(x). \end{gathered} \tag{5}$$

Protože (5) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, odvodili jsme (cestou úvah o množině P_f) rozhodující vlastnost hledané funkce f, kterou je lichost. Nalezení jejího předpisu už bude poměrně snadné.

Nahrazením x opačnou hodnotou $-x$ v rovnosti (3) obdržíme s ohledem na (5) rovnost

$$f(-x) + f(-x^2) = -x + xf(-x),$$
$$-f(x) + f(-x^2) = -x - xf(x).$$

Odečtením právě získané rovnosti od (3) dostaneme $2f(x) = 2x$, neboli $f(x) = x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. To je, jak víme z předchozího textu, druhé řešení f_2 zadané úlohy. Protože podle našeho postupu žádná jiná vyhovující funkce f neexistuje, je tím celé řešení úlohy u konce.

Literatura

[1] *International Mathematical Olympiad*: `https://www.imo-official.org`
[2] *Matematická olympiáda pro ZŠ a SŠ*: `http://mo.webcentrum.muni.cz`
[3] Davidov, L.: *Funkcionální rovnice.* Mladá fronta, Praha, 1984. `http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404099`
[4] Neuman, F.: *Funkcionální rovnice.* SNTL, Praha, 1986.
[5] Calábek, P., Švrček, J.: Abeceda řešení funkcionálních rovnic. *MFI*, roč. 22 (2013), č. 4. `http://mfi.upol.cz/files/2205/mfi_2205_321_329.pdf`

Elementární vlastnosti Fibonacciho čísel

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the basic properties of Fibonacci numbers.

Fibonacciho posloupnost

Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský, žil údajně v letech 1170–1250. V jeho sbírce úloh vydané v Pise roku 1202 je úloha o králících vedoucí na číselnou posloupnost, která byla později nazvána posloupností Fibonacciho. Jde o následující úlohu (viz [1]):