Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

III. Aplikace: Věta Cèvova, věta Menelaova a věta Routhova

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 3, 1–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146673

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

III. Aplikace: Věta Cèvova, věta Menelaova a věta Routhova

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. This is the last part of a series of three articles that deal with the barycetric coordinates on a line and in a plane. It contains several applications, inluding the theorems of Cèva, Menelaus and Routh.

Tento příspěvek je pokračováním článků [2] a [3]. Ukážeme v něm užitečnost barycentrických souřadnic při řešení geometrických úloh, přitom se soustředíme na rovinnou geometrii. Důležitým tématem bude výpočet obsahu daného trojúhelníku.

Začneme připomínkou barycentrických souřadnic, jak jsme je zavedli v předchozím článku [3]. Zdůrazněme to, že souřadnice bodů v rovině jsou trojice reálných čísel splňujících podmínku, že jejich součet se rovná jedné. Zdůrazněme též velmi úzkou souvislost s obecnými rovinnými souřadnicemi. K tomu nám může posloužit obr. 1. Souřadnicový systém zde definují body A, B, C a jednotlivé přímky popisují body roviny, jež mají jednu z barycentrických souřadnic konstantní. Porozumění tomuto obrázku ulehčí sledování dalších výpočtů.

Následující úloha je přípravou na další využití barycentrických souřadnic: Nalezněte barycentrické souřadnice průsečíku P dvou přímek $p = RS$ a $q = UV$, které jsou zadány barycentrickými souřadnicemi bodů R, S, U, V. Tyto souřadnice tedy splňují, pro jistá čísla t_1 a t_2, rovnice

$$\begin{aligned}(a_P =)\ (1-t_1)a_R + t_1 a_S &= (1-t_2)a_U + t_2 a_V,\\ (b_P =)\ (1-t_1)b_R + t_1 b_S &= (1-t_2)b_U + t_2 b_V,\\ (c_P =)\ (1-t_1)c_R + t_1 c_S &= (1-t_2)c_U + t_2 c_V.\end{aligned} \tag{1}$$

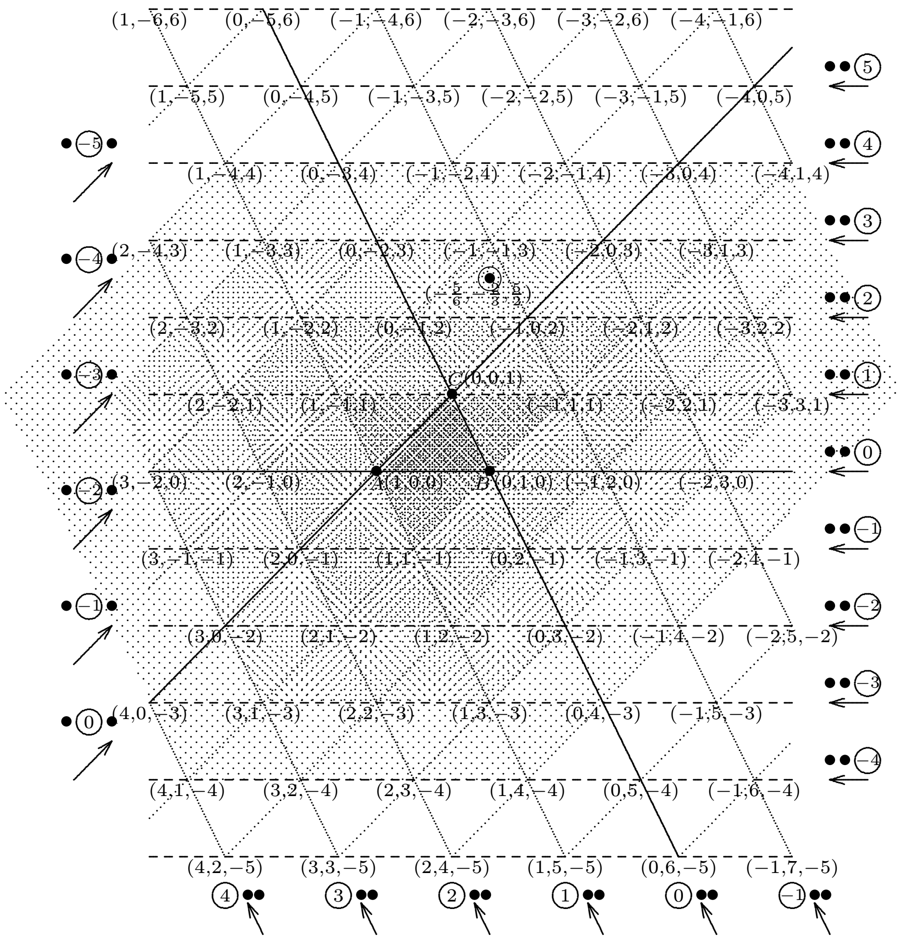
V důsledku podmínky $a_X + b_X + c_X = 1$ pro $X = R, S, U, V$ je každá z těchto tří rovnic důsledkem zbývajících dvou. Lineární systém (1) je tedy ekvivalentní např. systému

$$t_1(a_R - a_S) + t_2(a_V - a_U) = a_R - a_U,$$
$$t_1(b_R - b_S) + t_2(b_V - b_U) = b_R - b_U,$$

a tedy

$$t_1 = \frac{(a_R - a_U)(b_U - b_V) - (b_R - b_U)(a_U - a_V)}{(a_R - a_S)(b_U - b_V) - (b_R - b_S)(a_U - a_V)},$$

$$t_2 = \frac{(a_R - a_U)(b_R - b_S) - (b_R - b_U)(a_R - a_S)}{(a_U - a_V)(b_R - b_S) - (b_U - b_V)(a_R - a_S)}.$$



Obr. 1

Aplikujme nyní tuto metodu při studiu některých vlastností trojúhelníku. Ten je zadán třemi body A, B, C, jejichž barycentrické souřadnice jsou postupně $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Na straně AB zvolme bod F, jehož barycentrické souřadnice jsou $(a_F, b_F, 0)$, na straně BC bod D o souřadnicích $(0, b_D, c_D)$ a na straně CA bod E o souřadnicích $(a_E, 0, c_E)$. Označme P průsečík přímek AD a BE, Q průsečík přímek BE a CF a R průsečík přímek CF a AD. Připomeňme, že

$$a_F = \frac{|FB|}{|AB|},\ b_F = \frac{|AF|}{|AB|},\ b_D = \frac{|DC|}{|BC|},$$
$$c_D = \frac{|BD|}{|BC|},\ a_E = \frac{|CE|}{|CA|},\ c_E = \frac{|EA|}{|CA|}.$$

Určeme barycentrické souřadnice průsečíku P. Ty splňují pro parametry t_1 a t_2 systém jednoduchých lineárních rovnic

$$1 - t_1 = t_2 a_E, \quad t_1 b_D = 1 - t_2, \quad t_1 c_D = t_2 c_E.$$

Užitím poslední rovnice dostáváme $t_2 = \frac{c_D}{c_E} t_1$ a dosazením do první rovnice máme

$$t_1 = \frac{c_E}{c_E + a_E c_D} = \frac{c_E}{c_E + (1 - c_E) c_D} = \frac{c_E}{c_D + c_E - c_D c_E}.$$

Barycentrické souřadnice průsečíku P jsou tedy

$$a_P = \frac{c_D - c_D c_E}{c_D + c_E - c_D c_E} = \frac{(1 - c_E) c_D}{c_D + 1 - a_E - (1 - b_D)(1 - a_E)} = \frac{a_E c_D}{1 - b_D a_E},$$
$$b_P = \frac{b_D c_E}{1 - b_D a_E}, \quad c_P = \frac{c_D c_E}{1 - b_D a_E}. \tag{2}$$

Podobně barycentrické souřadnice bodů Q a R jsou

$$a_Q = \frac{a_E\ a_F}{a_E + a_F - a_E a_F} = \frac{a_E\ a_F}{1 - c_E b_F},$$
$$b_Q = \frac{a_E\ b_F}{1 - c_E b_F}, \quad c_Q = \frac{a_F\ c_E}{1 - c_E b_F}, \tag{3}$$

$$a_R = \frac{b_D - b_D b_F}{b_D + b_F - b_D b_F} = \frac{b_D a_F}{1 - c_D a_F},$$
$$b_R = \frac{b_D b_F}{1 - c_D a_F}, \quad c_R = \frac{b_F c_D}{1 - c_D a_F}. \tag{4}$$

Nyní je jasné, že $P = Q$ právě tehdy, když $P = R$ a $Q = R$, a to je právě tehdy, když $P = Q = R$. Porovnáním souřadnic bodů P a Q tedy snadno dostáváme nutnou a postačující podmínku pro souřadnice a_F a b_F, jestliže jsou dány body D a E, tj. hodnoty b_D, c_D, a_E, c_E. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$a_F = \frac{a_E c_D}{a_E c_D + b_D c_E} \quad \text{a} \quad b_F = \frac{b_D c_E}{a_E c_D + b_D c_E}.$$

Tedy spojnice AD, BE a CF se protínají v jednom bodě právě tehdy, když barycentrické souřadnice bodů D, E, F jsou

$$(0, b_D, c_D), \quad (a_E, 0, c_E), \quad \left(\frac{a_E c_D}{a_E c_D + b_D c_E}, \frac{b_D c_E}{a_E c_D + b_D c_E}, 0\right).$$

Odtud vyplývá bezprostředně věta Cèvova, kterou jsme už dokázali za pomocí metody těžišť v [2]; tam jsme

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{b_F}{a_F} = \frac{b_D\ c_E}{a_E c_D}$$

značili jednoduše

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}.$$

Připomeňme, že zde a v následujících úvahách jsou úsečky orientovány, a tedy to, zda jejich délky jsou kladné či záporné, závisí na orientaci.

Věta Cèvova. *Nechť body D, E a F leží postupně na (prodloužených) stranách BC, CA a AB trojúhelníku ABC. Potom*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

právě tehdy, když se spojnice AD, BE a CF protínají v jednom bodě.

Důkaz. Jelikož

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{b_D c_E}{a_E c_D} \cdot \frac{c_D}{b_D} \cdot \frac{a_E}{c_E} = 1,$$

věta je dokázána.

V [2] jsme formulovali některé jednoduché důsledky této věty týkající se těžnic, os úhlů a výšek trojúhelníku. Doplňme zde ještě několik dalších informací.

Označme S střed kružnice vepsané, tj. společný bod os úhlu daného trojúhelníku. Užijeme-li předchozí výpočet souřadnic průsečíku R přímek CF a AD pro

$$(a_F, b_F, c_F) = \left(\frac{|BC|}{|CA| + |BC|}, \frac{|CA|}{|CA| + |BC|}, 0\right)$$

a

$$(a_D, b_D, c_D) = \left(0, \frac{|CA|}{|AB| + |CA|}, \frac{|AB|}{|AB| + |CA|}\right),$$

vidíme ihned, že barycentrické souřadnice středu S jsou

$$\left(\frac{|BC|}{|AB| + |BC| + |CA|}, \frac{|CA|}{|AB| + |BC| + |CA|}, \frac{|AB|}{|AB| + |BC| + |CA|}\right).$$

Jestliže podobně označíme V společný bod výšek daného trojúhelníku a opět užijeme předchozí výpočet souřadnic průsečíku R přímek CF a AD tentokrát pro

$$(a_F, b_F, c_F) = \left(\frac{|BC|\cos\beta}{|CA|\cos\alpha + |BC|\cos\beta}, \frac{|CA|\cos\alpha}{|CA|\cos\alpha + |BC|\cos\beta}, 0\right)$$

a

$$(a_D, b_D, c_D) = \left(0, \frac{|CA|\cos\gamma}{|AB|\cos\beta + |CA|\cos\gamma}, \frac{|AB|\cos\beta}{|AB|\cos\beta + |CA|\cos\gamma}\right),$$

dostáváme barycentrické souřadnice bodu V ve tvaru

$$(a_V, b_V, c_V) = \left(\frac{|BC|\cos\beta\cos\gamma}{s}, \frac{|CA|\cos\gamma\cos\alpha}{s}, \frac{|AB|\cos\alpha\cos\beta}{s}\right),$$

kde $s = |BC|\cos\beta\cos\gamma + |CA|\cos\gamma\cos\alpha + |AB|\cos\alpha\cos\beta$. Jednoduchou úpravou zjistíme, že pro poměry souřadnic platí

$$a_V : b_V : c_V = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma,$$

a tedy barycentrické souřadnice průsečíku výšek v trojúhelníku jsou

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}\right).$$

Zde jsme využili rovnost $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Následující věta se připisuje Menelaovi, ačkoliv ve (volně přeložené) formě …*jestliže přímka protíná tři strany trojúhelníku (jedna ze stran je prodloužena mimo trojúhelník), potom součin tří nesousedících úseček, které obdržíme, se rovná součinu tří zbývajících úseček trojúhelníku.* byla známa již dříve. V třetí knize svého souboru *Sphaerica* Menelaus Alexandrijský dokázal tuto větu pro sférické trojúhelníky. Podejme zde jednoduchý důkaz užitím barycentrických souřadnic.

Věta Menelaova. *Nechť body D, E a F leží postupně na (prodloužených) stranách BC, CA a AB trojúhelníku ABC. Potom*

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|} = -1$$

právě tehdy, když body D, E a F leží na přímce.

Důkaz. Jelikož

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{b_F}{a_F}\cdot\frac{c_D}{b_D}\cdot\frac{a_E}{c_E},$$

je tento součin roven -1, právě když $a_E = (1-t)a_F$, $0 = (1-t)b_F + tb_D$ a $c_E = tc_D$. Ale to je právě tehdy, když bod E leží na přímce určené body D a F.

Menelaovu větu je snadné přeformulovat do řady ekvivalentních tvrzení. Uveďme zde jednou takovou jednoduchou formulaci pro případ, kdy všechny tři body Menelaovy přímky leží vně trojúhelníku, a uveďme ji ve tvaru následující úlohy:

Nechť ABC je libovolný trojúhelník a r, s dvě libovolná kladná čísla. Nechť F je bod strany AB takový, že $|FB| = r|AF|$, a P bod na přímce určené body F a C takový, že $|PC| = s|FP|$. Nechť E leží na přímce určené body A a P tak, že $|PE| = t|AP|$. Potom E leží na straně BC právě tehdy, když

$$t = \frac{rs}{r+s+1}.$$

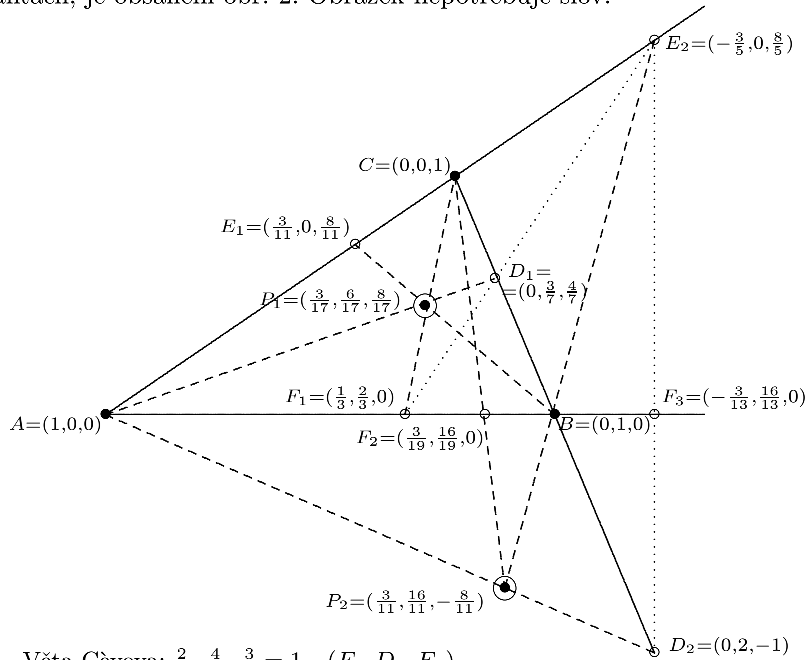
Zvolíme-li barycentrickou soustavu tak, že $A = (1, 0, 0)$, $F = (0, 1, 0)$ a $P = (0, 0, 1)$, máme $B = (-r, r{+}1, 0)$, $C = (0, -s, s_1)$ a $E = (-t, 0, t{+}1)$. Podmínka, aby E byl průsečíkem přímky AP a strany BC, je ekvivalentní rovnosti

$$\frac{r+1}{-r} \cdot \frac{s+1}{-s} \cdot \frac{-t}{t+1} = -1,$$

a tedy $t = \frac{rs}{r+s+1}$. Pro $r = 1$, tj. v případě, že F je půlicím bodem strany AB, je

$$|PE| = \frac{s}{s+2}|AP|.$$

Ilustrace věty Cèvovy a věty Menelaovy, každé ve dvou různých variantách, je obsahem obr. 2. Obrázek nepotřebuje slov.



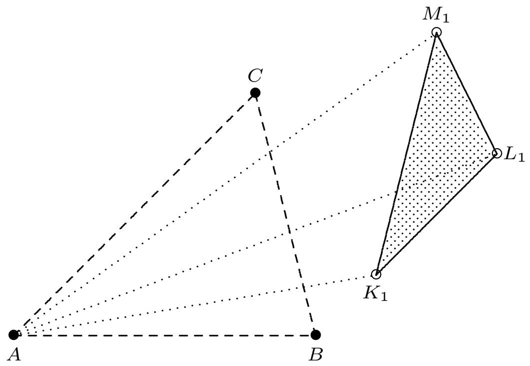
Věta Cèvova: $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = 1 \quad (F_1, D_1, E_1)$
Věta Cèvova: $\frac{16}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{8}) = 1 \quad (F_2, D_2, E_2)$
Věta Menelaova: $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot (-\frac{3}{8}) = -1 \quad (F_1, D_1, E_2)$
Věta Menelaova: $(-\frac{16}{3}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{8}) = -1 \quad (F_3, D_2, E_2)$

Obr. 2

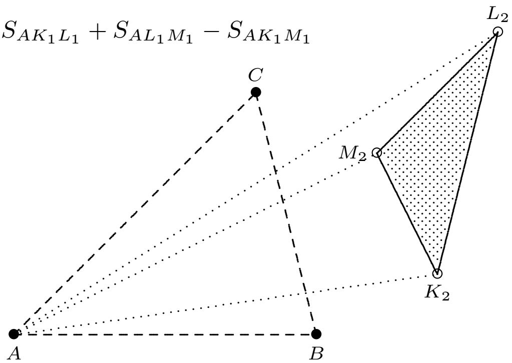
Obraťme nyní pozornost na výpočet obsahu S_{KLM} daného trojúhelníku KLM, přesněji řečeno na výpočet poměru obsahů

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}}, \tag{5}$$

kde jeden z trojúhelníku, totiž trojúhelník ABC, zvolíme za bázi barycentrických souřadnic. Poznamenejme, že stejně jako v případě dvou délek, i zde poměr (5) může být záporný. Naše definice obsahu trojúhelníku závisí na orientaci trojúhelníků: $S_{KLM} = -S_{KML}$. Cesta k výpočtu poměru (5) je naznačena na obr. 3, 4 a 5. Zde je $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $K = (a_K, b_K, c_K)$, $L = (a_L, b_L, c_L)$, $M = (a_M, b_M, c_M)$.

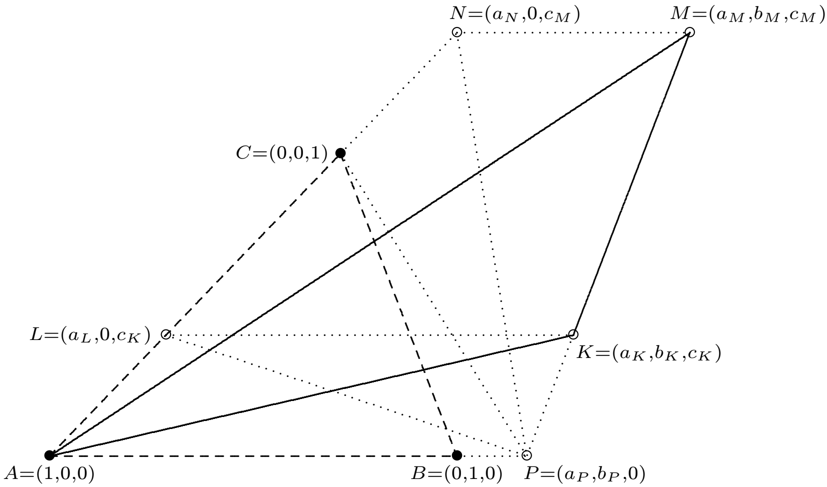


$$S_{K_1L_1M_1} = S_{AK_1L_1} + S_{AL_1M_1} - S_{AK_1M_1}$$



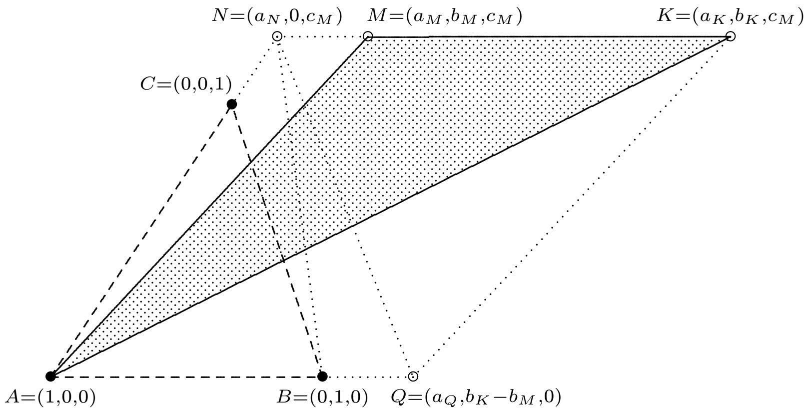
$$S_{K_2L_2M_2} = S_{AK_2L_2} - S_{AK_2M_2} - S_{AM_2L_2} = S_{AK_2L_2} + S_{AL_2M_2} - S_{AK_2M_2}$$

Obr. 3



$$S_{AKM} = S_{APM} - S_{APK} = S_{APN} - S_{APL}$$

Obr. 4



$$S_{AKM} = S_{AQN} = c_M(b_K - b_M) \cdot S_{ABC}$$

Obr. 5

Předpokládejme (viz obrázky), že trojúhelník KLM leží v oblasti, kde první barycentrická souřadnice je záporná a zbylé dvě jsou kladné. Do takové polohy je možno vhodným posunutím (translací) umístit každý trojúhelník. Přitom, jak uvidíme, posunutí nebude mít na poměr (5) žádný vliv.

Obr. 3 ukazuje, jak vyjádřit S_{KLM} pomocí obsahů tří trojúhelníků, jejichž jedním vrcholem je bod A. Pro takové trojúhelníky, které splňují podmínku $c_K \neq c_M$, je výpočet uveden na obr. 4, pro trojúhelníky splňující $c_K = c_M$ na obr. 5.

Tedy: Jestliže $c_K \neq c_M$ (obr. 4), označíme N průsečík (prodloužené) strany AC trojúhelníku ABC a přímky bodem M rovnoběžné se stranou AB; jasně $c_N = c_M$. Poté jsou barycentrické souřadnice $(a_P, b_P, 0)$ průsečíku P (prodloužené) strany AB a přímky určené body K a M

$$a_P = \frac{a_M c_K - a_K c_M}{c_K - c_M} \quad \text{a} \quad b_P = 1 - a_P = \frac{b_M c_K - b_K c_M}{c_K - c_M}.$$

Nyní postačí využít buď poměr délek výšek či délek základen, abychom odvodili, že

$$S_{APM} = S_{APN} = c_M S_{APC} = \frac{b_M c_K - b_K c_M}{c_K - c_M} c_M \, S_{ABC}.$$

Stejným způsobem odvodíme, že

$$S_{APK} = S_{APL} = c_K S_{APC} = \frac{b_M c_K - b_K c_M}{c_K - c_M} c_K \, S_{ABC},$$

a tedy

$$S_{AKM} = -(b_M c_K - b_K c_M) S_{ABC}. \tag{6}$$

Jestliže $c_K = c_M$ (obr. 5), označme Q průsečík (prodloužené) strany AB a přímky rovnoběžné s AM bodem K. Barycentrické souřadnice bodu Q jsou tedy $(1 - b_Q, b_K - b_M, 0)$. Odtud ihned vidíme, že

$$S_{AKM} = S_{AQN} = (b_K - b_M) S_{ABN} = c_M (b_K - b_M) S_{ABC},$$

což je právě výraz (6) pro $c_K = c_M$. Odtud už bezprostředně plyne (obr. 3)

$$S_{KLM} = [(b_K c_L - b_L c_K) + (b_L c_M - b_M c_L) - (b_K c_M - b_M c_K)] \, S_{ABC},$$

což můžeme zapsat jednoduše ve tvaru determinantu

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_K & b_L & b_M \\ c_K & c_L & c_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_K & a_L & a_M \\ b_K & b_L & b_M \\ c_K & c_L & c_M \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Rovnost dvou determinantů vyplývá samozřejmě z toho, že součet barycentrických souřadnic každého bodu se rovná jedné. Posunutí trojúhelníku KLM do libovolné polohy $K'L'M'$, tj. do bodů

$$\begin{aligned} K' &= (a_K + x, b_K + y, c_K + z), \\ L' &= (a_L + x, b_L + y, c_L + z), \\ M' &= (a_M + x, b_M + y, c_M + z), \end{aligned}$$

samozřejmě hodnotu (7) zachová. Tím je důkaz poměru obsahů (7) zakončen.

Nyní je snadné dokázat Routhovu větu. Nechť ABC je daný trojúhelník. Nechť body D, E a F leží postupně na (prodloužených) stranách BC, CA a AB trojúhelníku ABC tak, že žádné dvě z přímek AD, BE a CF nejsou rovnoběžné. Označme P průsečík přímek AD a BE, Q průsečík přímek BE a CF a R průsečík přímek CF a AD.

Zvolme v rovině trojúhelníku ABC barycentrické souřadnice tak, že $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ a $C = (0,0,1)$. Nechť $D = (0, b_D, c_D)$, $E = (a_E, 0, c_E)$ a $F = (a_F, b_F, 0)$. Potom je poměr obsahu trojúhelníku PQR k obsahu trojúhelníku ABC dán následujícím předpisem (8).

Věta Routhova.

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{(a_E b_F c_D - a_F b_D c_E)^2}{(1 - a_E b_D)(1 - b_F c_E)(1 - c_D a_F)}. \tag{8}$$

Důkaz rovnosti (8) je snadný. Souřadnice bodů P, Q a R jsou dány vztahy (2), (3) a (4). Užijeme-li nyní pro poměr $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}$ rovnost (7), tj.

$$a_P b_Q + a_Q b_R + a_R b_P - a_P b_R - a_Q b_P - a_R b_Q,$$

obdržíme (8).

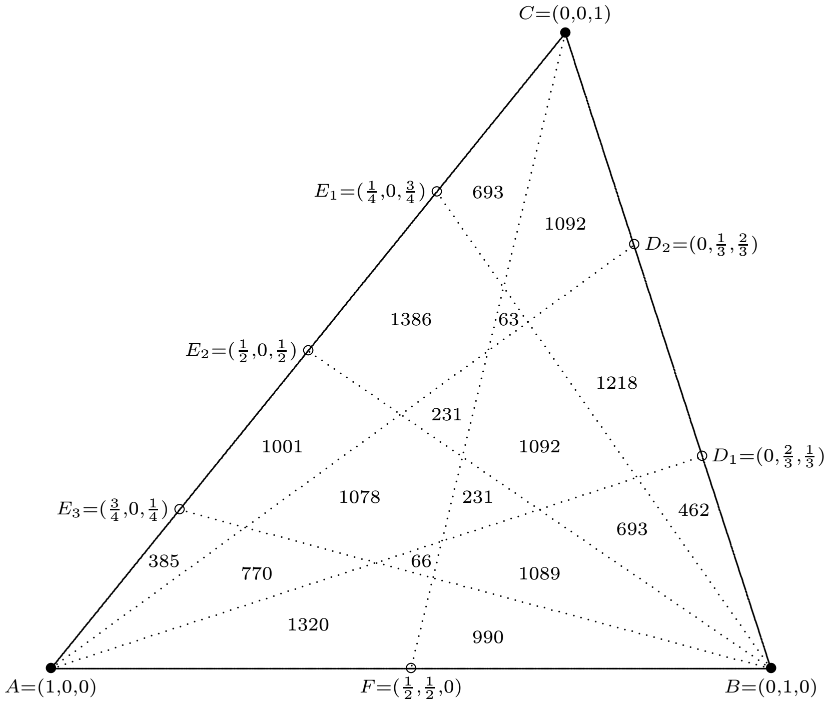
Poznámka. Poznamenejme, že tento poměr je kladné či záporné číslo v závislosti na orientacích trojúhelníků ABC a PQR. Zvolíme-li např.

body D, E, F na stranách trojúhelníku ABC, tj. D mezi B a C, E mezi C a A a F mezi A a B, potom jsou orientace obou trojúhelníků shodné a poměr je kladný.

Routhova věta je obyčejně formulována pro případ, kdy body D, E, F leží na stranách trojúhelníku ABC a dělí je v poměrech $d:1$, $e:1$, $f:1$. Tedy $d = \frac{c_D}{b_D}$, $e = \frac{a_E}{c_E}$, $f = \frac{b_F}{a_F}$. Užitím těchto výrazů snadno přepíšeme vzorec (8) do tvaru

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{(def-1)^2}{(de+d+1)(ef+e+1)(fd+f+1)}.$$

Užijte Routhovu větu k výpočtu obsahů naznačených 18 oblastí trojúhelníku ABC na obr. 6; zde je strana AB rozdělena na 2 díly, strana BC na 3 díly a strana CA na 4 díly. Jinými slovy, přesvědčete se, že obsahy jednotlivých oblastí jsou $(S_{ABC}/13\,860)$-násobky vepsaných čísel.



Obr. 6

Poznamenejme ještě, že rovnost (8) v sobě zahrnuje větu Cèvovu. Triviálně, $P = Q = R$ právě tehdy, když $S_{PQR} = 0$, a to nastává právě tehdy, když

$$a_E b_F c_D - a_F b_D c_E = 0,$$

tj. když

$$\frac{a_E b_F c_D}{a_F b_D c_E} = 1, \quad \text{neboli} \quad \frac{c_D}{b_D} \cdot \frac{a_E}{c_E} \cdot \frac{b_F}{a_F} = 1.$$

Závěrem uvedeme ve formě úlohy ještě jednu zajímavou geometrickou konstrukci, totiž konstrukci těžiště ohodnocených bodů (A, h_A^2) a (B, h_B^2), známe-li těžiště bodů (A, h_A) a (B, h_B). Tato úloha může čtenáři posloužit k hlubšímu porozumění barycentrickým souřadnicím.

Barycentrické souřadnice tří různých bodů A, B, C na přímce p jsou postupně $(1, 0)$, $(0, 1)$, (a_C, b_C), kde $a_C \neq b_C$. Píšeme $a_C = a$, $b_C = b$. Tedy $a + b = 1$. V prostoru zvolme libovolný bod X, který neleží na přímce p. V rovině definované body A, B, X sestrojme trojúhelník BCY, který je podobný trojúhelníku ACX. Body X, Y, C jsou tedy kolineární. Sestrojme bod Z tak, že středem úsečky YZ je bod B a označme průsečík přímky určené body X a Z a přímky p písmenem D a střed úsečky CD písmenem E.

1. Dokažte, že barycentrické souřadnice bodu D jsou $(\frac{a}{a-b}, \frac{-b}{a-b})$.
2. Dokažte, že barycentrické souřadnice bodu E jsou $(\frac{a^2}{a-b}, \frac{-b^2}{a-b})$.
3. Sestrojte bez výpočtu, tj. užitím pravítka a kružítka, bod F, jehož barycentrické souřadnice jsou $(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2})$.

Důkaz zjednodušíme vnořením přímky p do roviny, ve které zvolíme vhodné barycentrické souřadnice: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $X = (0, 0, 1)$.

Literatura

[1] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* Druhé vydání, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 1969.

[2] Dlab, V.: I. Barycentrické souřadnice na přímce. *Rozhledy MF*, roč. 91 (2016), č. 1, s. 1–7.

[3] Dlab, V.: II. Barycentrické souřadnice v rovině. *Rozhledy MF*, roč. 91 (2016), č. 2, s. 1–10.