Emil Calda

Dirichletův princip v geometrických úlohách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 2, 20–22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146664

Dirichletův princip v geometrických úlohách

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. In this article, Dirichlet's principle is explained and then used in five geometric problems.

Představme si, že čtyři osoby si mezi sebe mají rozdělit pět nějakých předmětů, a ptejme se, zda je možné, aby každá dostala nejvýše jeden. Snadno usoudíte, že to možné není – kdyby tento případ nastal, nebyl by počet rozdělených předmětů roven pěti, ale byl by nejvýše roven čtyřem. Znamená to, že mezi těmito čtyřmi osobami musí být aspoň jedna, která dostane více než jeden předmět, tj. aspoň dva.

Nahradíme-li osoby přihrádkami a tento výsledek zobecníme, dostaneme tvrzení, které se nazývá Dirichletův (nebo též přihrádkový) princip: *Je-li více než n předmětů rozmístěno do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce jsou aspoň dva předměty.*

Důkaz je velmi jednoduchý. Rozmístíme dané předměty, jejichž počet je větší než n, do n přihrádek a budeme předpokládat, že v i-té přihrádce je s_i předmětů, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kdyby v každé přihrádce byl nejvýše jeden předmět, bylo by každé číslo s_i menší nebo rovno jedné a pro počet předmětů by platilo

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n \leq 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

což je ve sporu s tím, že počet rozmisťovaných předmětů je větší než n.

Tvrzení, které jsme právě dokázali, je velmi jednoduché a téměř samozřejmé. V následujících příkladech si ukážeme, že jeho použitím můžeme dostat zajímavé výsledky.

Příklad 1. Ve čtverci o straně délky 10 cm je dáno 101 různých bodů. Dokažte, že se v něm dá nalézt trojúhelník s obsahem 1 cm^2, ve kterém jsou aspoň dva z daných bodů.

Řešení: Jestliže se podaří daný čtverec rozložit na sto trojúhelníků s obsahem 1 cm^2, potom podle Dirichletova principu budou aspoň v jednom z daných 101 bodů aspoň dva. Tento rozklad získáme tak, že každý z padesáti obdélníčků 2×1 pokrývajících daný čtverec rozdělíme úhlopříčkou na dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami o délkách 1 cm a 2 cm; protože těchto trojúhelníků je sto a každý má obsah 1 cm^2, jsou aspoň v jednom aspoň dva z daných 101 bodů.

Poznámka: Dirichletův princip sice umožnil dokázat existenci aspoň dvou bodů požadované vlastnosti, ale o tom, které dva to jsou, neříká nic.

Příklad 2. V obdélníku o rozměrech 3 cm a 4 cm je dáno 101 různých bodů. Dokažte, že aspoň dva z nich mají vzájemnou vzdálenost menší nebo rovnou 0,5 cm.

Řešení: Daný obdélník rozložíme na sto obdélníčků o rozměrech 0,3 cm a 0,4 cm. Podle Dirichletova principu jsou aspoň v jednom takovém obdélníčku z daných 101 bodů aspoň dva; pro jejich vzájemnou vzdálenost d (v cm) zřejmě platí $d \leq \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5$.

V následujících příkladech budeme používat obecnější znění Dirichletova principu, které lze formulovat takto: *Je-li více než kn předmětů rozmístěno do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce je více než k předmětů.*

Podobně jako při důkazu původní verze rozmístíme dané předměty, kterých je více než kn, do n přihrádek a budeme předpokládat, že v i-té přihrádce je s_i předmětů. Kdyby v každé přihrádce bylo předmětů nejvýše k, bylo by každé číslo s_i menší nebo rovno k, takže by pro počet rozmisťovaných předmětů platilo

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n \leq k + k + \cdots + k = kn,$$

což je však ve sporu s tím, že předmětů je více než kn.

Příklad 3. Ve čtverci o straně délky 5 cm je dáno 51 různých bodů. Dokažte, že

a) aspoň šest z nich leží v obdélníku s rozměry 5 cm a 0,5 cm,

b) aspoň tři z nich leží v kruhu o poloměru 0,75 cm.

Řešení: a) Čtverec o straně délky 5 cm rozložíme na deset obdélníčků o rozměrech 5 cm a 0,5 cm. Protože daných bodů je více než padesát, aspoň v jednom z těchto obdélníčků je jich více než pět, tj. aspoň šest.

b) Daný čtverec rozložíme na 25 čtverečků o straně délky 1 cm. Protože daných bodů je více než padesát, jsou aspoň v jednom z těchto čtverečků aspoň tři. Kružnice opsaná tomuto čtverečku má poloměr $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm, a vzhledem k tomu, že $\frac{\sqrt{2}}{2} < 0{,}75$, leží tyto tři body uvnitř kruhu s poloměrem 0,75 cm.

Příklad 4. V pravidelném šestiúhelníku o straně délky 3 cm je dáno 325 různých bodů. Dokažte, že aspoň sedm z nich lze pokrýt kruhem s poloměrem 0,6 cm.

Řešení: Zatímco v předešlém příkladu jsme na počet i tvar přihrádek přišli poměrně snadno, nyní to bude o málo složitější. Z rovnosti $325 = 6 \cdot 54 + 1$ je vidět: rozložíme-li daný pravidelný šestiúhelník na 54 shodných obrazců, bude aspoň v jednom aspoň sedm z daných bodů. Těchto $54 = 6 \cdot 9$ obrazců dostaneme tak, že každý ze šesti rovnostranných trojúhelníků o straně délky 3 cm, z nichž se daný pravidelný šestiúhelník skládá, rozložíme přímkami rovnoběžnými s jeho stranami na devět rovnostranných trojúhelníčků o straně délky 1 cm. Podle Dirichletova principu aspoň v jednom z těchto 54 trojúhelníčků leží aspoň sedm z daných 325 bodů. Kružnice opsaná tomuto trojúhelníčku má poloměr $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm, a protože $\frac{\sqrt{3}}{3} < 0{,}6$, leží tyto body i v kruhu s poloměrem 0,6 cm.

Příklad 5. V obdélníku o rozměrech 27 cm a 36 cm je dáno 1 945 různých bodů. Dokažte, že aspoň sedm z nich je možné pokrýt trojúhelníkem, jehož obsah je 3 cm^2.

Řešení: Z rovnosti $1\,945 = 6 \cdot 324 + 1$ je patrné, že v rozkladu daného obdélníku na 324 shodných obrazců bude aspoň v jednom z nich aspoň sedm z daných bodů. Těmito shodnými obrazci budou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délek 3 cm a 2 cm; jejich obsah je 3 cm^2 a bude jich vskutku 324, neboť $324 \cdot 3 = 972 = 27 \cdot 36$. Znamená to, že aspoň sedm z daných 1 945 bodů lze pokrýt trojúhelníkem s obsahem 3 cm^2.

Poznamenejme na závěr, že princip používaný v předcházejících příkladech má jméno podle německého matematika Dirichleta (1805–1859), který ho úspěšně používal zejména v teorii čísel.

Literatura

[1] Bukovský, L., Kluvánek, I.: *Dirichletov princíp.* Škola mladých matematiků, Mladá fronta, Praha, 1970.

[2] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[3] Calda, E.: Dirichletův princip v několika snadných úlohách. *MFI*, roč. 5 (1996), č. 10, s. 521–523.

[4] Calda, E.: Přihrádkový princip (Humory). *Rozhledy MF*, roč. 74, č. 5.