Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 4, 52–57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146643

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. března 2016* na adresu redakce.

Úloha 51. Najděte všechny čtyřmístné palindromy, tj. čísla, která se čtou stejně zepředu i zezadu, které když vydělíme prvočísly 2, 3 a 7, dostaneme opět palindromy. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 52. Ocelová koule o objemu V a hustotě ϱ_1 plave ve rtuti o hustotě ϱ_2.

a) Určete poměr $p_1 = \frac{V_1}{V}$, kde V_1 je objem části koule ponořené ve rtuti.
b) Nad rtuť nalijeme do nádoby takový objem vody o hustotě ϱ_3, aby celá koule byla ponořena pod povrchem vody. Určete poměr $p_2 = \frac{V_2}{V}$, kde V_2 je objem části koule ponořené ve rtuti.
c) Určete v procentech poměr $p_3 = \frac{V_3}{V}$, kde V_3 je objem části koule, která se vynoří ze rtuti po dolití vody.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $\varrho_1 = 7{,}70 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\varrho_2 = 13{,}60 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\varrho_3 = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. (*Radmila Horáková*)

Řešení úloh z čísla 4/2014

Úloha 45. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, která jsou řešením rovnice
$$\lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor^2 - \lfloor \lfloor x \rfloor - y \rfloor^2 = 2015.$$

Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí tzv. dolní celou část čísla x; takže je např. $\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}7 \rfloor = -3$. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Obě strany rovnice rozložíme na součin

$$\big(\lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor - y \rfloor\big)\big(\lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor - \lfloor \lfloor x \rfloor - y \rfloor\big) = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

a využijeme vlastnosti

$$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$$

platné pro každé celé číslo a a každé reálné číslo b, takže postupně dostaneme

$$\big(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor -y \rfloor\big)\big(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor -y \rfloor\big) = 5 \cdot 13 \cdot 31,$$
$$\big(2\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor\big)\big(\lfloor y \rfloor - \lfloor -y \rfloor\big) = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Uvažujme $x \in \langle k; k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \langle l; l+1)$, $l \in \mathbb{Z}$. Potom je $-y \in (-l-1; -l\rangle$. Je-li $y = l$, je $\lfloor y \rfloor - \lfloor -y \rfloor = 2l$, což je sudé číslo, je-li $y \in (l; l+1)$, je $\lfloor y \rfloor - \lfloor -y \rfloor = 2l+1$, což je liché číslo. Jelikož je $5 \cdot 13 \cdot 31$ liché číslo, musí být $y \in (l; l+1)$. Potom je také $\lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -1$.

Rozlišíme jednotlivé případy:

$$\begin{array}{ll}
2\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = 1 & 2\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -1 \\
\lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = 2\,015 & \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -2\,015 \\
\hline
2k - 1 = 1 & 2k - 1 = -1 \\
2l + 1 = 2\,015 & 2l + 1 = -2\,015 \\
\hline
k = 1 & k = 0 \\
l = 1\,007 & l = -1\,008 \\
\hline
x \in \langle 1; 2) & x \in \langle 0; 1) \\
y \in (1\,007; 1\,008) & y \in (-1\,008; -1\,007)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
2k - 1 = 2\,015 & 2k - 1 = -2\,015 \\
2l + 1 = 1 & 2l + 1 = -1 \\
\hline
k = 1\,008 & k = -1\,007 \\
l = 0 & l = -1 \\
\hline
x \in \langle 1\,008; 1\,009) & x \in \langle -1\,007; -1\,006) \\
y \in (0; 1) & y \in (-1; 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=5 \\ 2l+1=403 \\ \hline k=3 \\ l=201 \\ \hline x\in\langle 3;4) \\ y\in(201;202) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=403 \\ 2l+1=5 \\ \hline k=202 \\ l=2 \\ \hline x\in\langle 202;203) \\ y\in(2;3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=13 \\ 2l+1=155 \\ \hline k=7 \\ l=77 \\ \hline x\in\langle 7;8) \\ y\in(77;78) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=155 \\ 2l+1=13 \\ \hline k=78 \\ l=6 \\ \hline x\in\langle 78;79) \\ y\in(6;7) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=31 \\ 2l+1=65 \\ \hline k=16 \\ l=32 \\ \hline x\in\langle 16;17) \\ y\in(32;33) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=-5 \\ 2l+1=-403 \\ \hline k=-2 \\ l=-202 \\ \hline x\in\langle -2;-1) \\ y\in(-202;-201) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=-403 \\ 2l+1=-5 \\ \hline k=-201 \\ l=-3 \\ \hline x\in\langle -201;-200) \\ y\in(-3;-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=-13 \\ 2l+1=-155 \\ \hline k=-6 \\ l=-78 \\ \hline x\in\langle -6;-5) \\ y\in(-78;-77) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=-155 \\ 2l+1=-13 \\ \hline k=-77 \\ l=-7 \\ \hline x\in\langle -77;-76) \\ y\in(-7;-6) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2k-1=-31 \\ 2l+1=-65 \\ \hline k=-15 \\ l=-33 \\ \hline x\in\langle -15;-14) \\ y\in(-33;-32) \end{array}$$

$2k - 1 = 65$ $2l + 1 = 31$	$2k - 1 = -65$ $2l + 1 = -31$
$k = 33$ $l = 15$	$k = -32$ $l = -16$
$x \in \langle 33; 34)$ $y \in (15; 16)$	$x \in \langle -32; -31)$ $y \in (-16; -15)$

Úloha 46. *Zjišťování teploty krup*

V létě, když byla bouřka, padaly na zem kroupy. V meteorologické stanici se rozhodli změřit jejich teplotu. K měření použili směšovací kalorimetr o tepelné kapacitě $C_\mathrm{k} = 400\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$. V kalorimetru byla původně jen nalita voda o hmotnosti $m_1 = 1{,}5$ kg a teplotě $t_1 = 30$ °C. Potom do kalorimetru s vodou nasypali kroupy o hmotnosti $m_2 = 0{,}5$ kg a teplotě t_2 a nechali vše ustálit. Po ustálení byla naměřena teplota $t = 4$ °C. Určete, jaká byla teplota krup t_2 bezprostředně před tím, než byly kroupy nasypány do kalorimetru.

Měrná tepelná kapacita vody je $c_1 = 4\,200\ \mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, měrná tepelná kapacita ledu je $c_2 = 2\,100\ \mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 330\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty. Vzhledem k tomu, že celý děj probíhá v kalorimetru, tepelné ztráty do okolí zanedbejte.

(*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

Voda o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 v kalorimetru tím, že se ochladila na teplotu t, odevzdala kroupám teplo

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t).$$

Také kalorimetr svým ochlazením na teplotu t předal kroupám teplo

$$Q_\mathrm{k} = C_\mathrm{k}(t_1 - t).$$

Toto teplo

$$Q = Q_1 + Q_\mathrm{k}$$

přijaly kroupy o hmotnosti m_2 a teplotě t_2. Kroupy nejprve přijaly teplo $Q_2 = c_2 m_2 (0 - t_2)$, aby se zahřály na teplotu tání 0 °C; pak se dále přeměnily po přijetí tepla $L_\mathrm{t} = m_2 l_\mathrm{t}$ na vodu téže teploty 0 °C. Nakonec po dodání tepla $Q_3 = c_1 m_2 (t - 0)$ vzrostla teplota této vody na hodnotu t.

Protože se celý děj uskutečňuje v kalorimetru, je možno tepelné ztráty do okolí považovat za zanedbatelně malé, takže můžeme psát

$$Q_1 + Q_\mathrm{k} = Q_2 + L_\mathrm{t} + Q_3.$$

Po dosazení dostaneme

$$c_1 m_1 (t_1 - t) + C_\mathrm{k}(t_1 - t) = c_2 m_2 (0 - t_2) + m_2 l_\mathrm{t} + c_1 m_2 (t - 0),$$

z čehož

$$t_2 = \frac{m_2 l_\mathrm{t} + c_1 m_2 (t - 0) - c_1 m_1 (t_1 - t) - C_\mathrm{k}(t_1 - t)}{c_2 m_2}.$$

Pro dané hodnoty:

$$t_2 = \frac{0{,}5 \cdot 330\,000 + 4\,200 \cdot 0{,}5 \cdot (4 - 0) - 4\,200 \cdot 1{,}5 \cdot (30 - 4) - 400 \cdot (30 - 4)}{2\,100 \cdot 0{,}5}\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$t_2 \doteq -0{,}8\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Stav soutěže po 46 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD Zborovská, Praha 5) – 38 bodů
Matyáš Grof (GChD Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Zuzana Procházková (GChD Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 27 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Daniel Pišťák (GChD Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Daniel Borák (GChD Zborovská, Praha 5) – 20 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Vladimír Boček (GChD Zborovská, Praha 5) – 19 bodů
Jiří Braný (GChD Zborovská, Praha 5) – 17 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů

Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Daniel Borák (GChD Zborovská, Praha 5) – 15 bodů
Oskar Marelja (GChD Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 8 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Ester Sgallová (GChD Zborovská, Praha 5) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD Zborovská, Praha 5) – 3 body
Stanislav Gackowski (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod