Rozhledy matematicko-fyzikální

Jiří Fabián; Přemysl Šedivý

Kde je les nejhlubší? Lyricko-matematické pojednání

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 4, 30–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146639

Kde je les nejhlubší? Lyricko-matematické pojednání

Jiří Fabián a Přemysl Šedivý, Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové

Motto: *Křišťálová studánka*

Znám křišťálovou studánku, kde nejhlubší je les.
Tam roste tmavé kapradí a vůkol rudý vřes.
Tam ptáci, laně chodí pít pod javorový kmen;
ti ptáci za dne bílého, ty laně v noci jen.

J. V. Sládek

Abstract. A quotation is from a Czech lyrical poem by J. V. Sladek: "I know a crystalline fountain on the deepest spot of a forest" ("where there is the deepest forest").

This article conduces to the mathematisation of the problem of the forest depth (i.e. the central point of a forest). It defines this depth (the central point) in a konvex polygon and introduces the term "enteron" for this "deepest" point.

Zadání úlohy

Lyrický verš „Znám křišťálovou studánku, kde nejhlubší je les." od J. V. Sládka vedl k matematizaci problému hloubky lesa. V článku je definice hloubky bodu v konvexním mnohoúhelníku a zavádí se termín enteron (jádro) pro jeho nejhlubší bod. Podle básníka je takové místo u křišťálové studánky pod javorem.

V přírodě bývá obvod lesa velmi nepravidelný. Omezíme se na případy, kdy jej lze nahradit *konvexním* mnohoúhelníkem (s jistou dávkou nepřesnosti). Například hranici lesa na obr. 1 můžeme dosti přesně vymezit šestiúhelníkem $ABCDEF$.

Definujme:

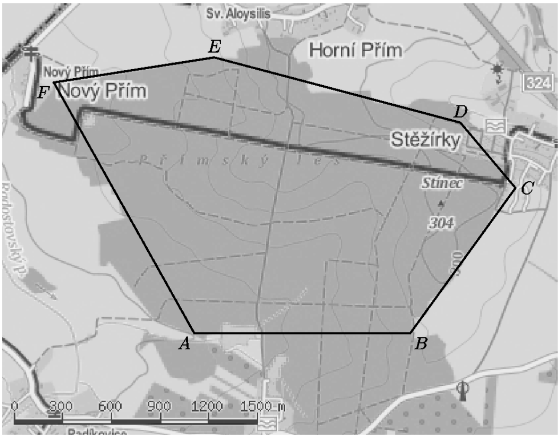
Hloubka vnitřního bodu konvexního mnohoúhelníku je jeho *nejmenší vzdálenost* od obvodu (vzdálenost od nejbližší strany).

Jádro – ENTERON – *nejhlubší místo* konvexního mnohoúhelníku je bod nebo množina bodů s největší hloubkou.

Jak nalézt tohle místo? Rozvineme pátrací akci po předmětu (poklad, osoba) ukrytém v hlubinách lesa: Na strany mnohoúhelníku rozmístíme pátrače čelem dovnitř. Ti vytvoří *pátrací mnohoúhelník*. Všichni pátrači vykročí zároveň stejnou rychlostí ve směru kolmém na výchozí stranu. Pátrací mnohoúhelník se bude zmenšovat.

Konstrukce enteronu konvexního mnohoúhelníku, který *nemá* žádné dvě rovnoběžné strany

Řešení úlohy si ukážeme na konkrétním šestiúhelníku, který modeluje les na obr. 1.

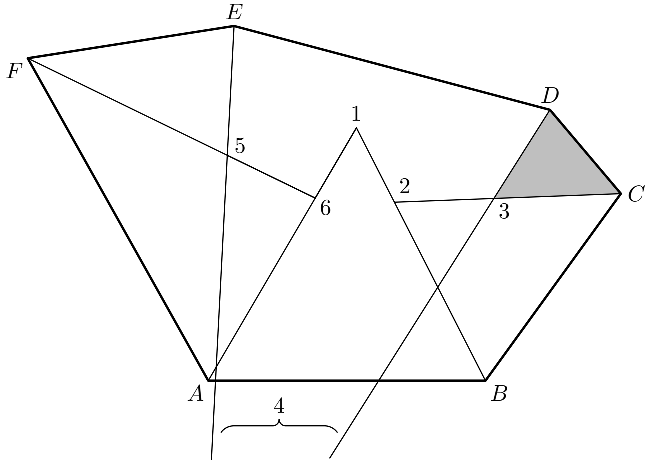


Obr. 1

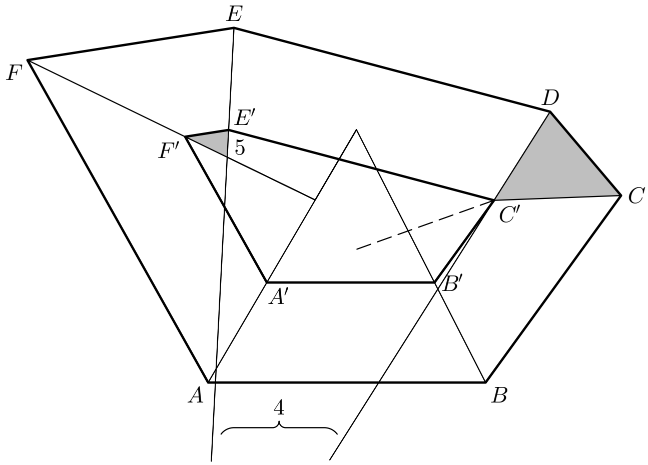
Narýsujeme osy všech úhlů. Vzniká 6 *pátracích trojúhelníků* (obr. 2), které mají za základnu stranu daného mnohoúhelníku. Tu použijeme jako *pátrací linii.*

Bude-li se pátrací linie pohybovat ve směru výšky tohoto trojúhelníku, bude se protínat se sousedními liniemi v bodech na osách vnitřních úhlů mnohoúhelníku. Délky jednotlivých linií se budou zmenšovat. Také obvod pátracího mnohoúhelníku se bude zmenšovat. Jeho úhly jsou zatím stejné, není však podobný původnímu mnohoúhelníku.

Postoupí-li pátrací linie o délku nejkratší výšky pátracích trojúhelníků (v našem případě je to výška v trojúhelníku $3CD$), linie rovnoběžná se stranou CD zanikne (obr. 3). Zbývající mnohoúhelník má o jednu stranu a jeden úhel méně. Vznikl pětiúhelník. Jeden z jeho úhlů změní velikost (úhel $E'C'B'$). Sestrojíme jeho osu.

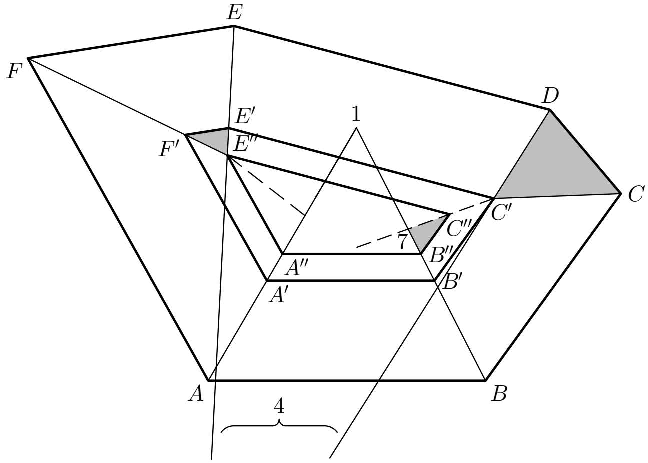


Obr. 2

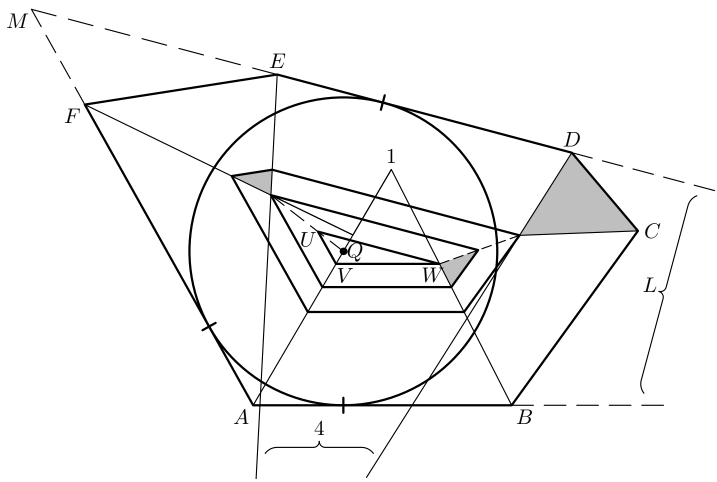


Obr. 3

V novém pětiúhelníku je pět pátracích trojúhelníků. Vybereme ten s nejkratší výškou (trojúhelník $5F'E'$) a jeho vrcholem opět vedeme rovnoběžky se stranami. Vznikne čtyřúhelník $A''B''C''E''$ (obr. 4) a po dalším kroku (obr. 5) trojúhelník UVW, který nazveme *jádrový*. Střed Q jemu vepsané kružnice je nejhlubší hledané místo – enteron – jádro mnohoúhelníku.



Obr. 4



Obr. 5

Prodloužíme-li v původním mnohoúhelníku strany, které jsou rovnoběžné se stranami jádrového trojúhelníku, vznikne trojúhelník AML stejnolehlý s trojúhelníkem jádrovým. Oba mají společný střed Q vepsaných kružnic. Nejkratší cestu z obvodu lesa k jeho nejhlubšímu místu lze uskutečnit z jednoho ze tří bodů dotyků kružnice vepsané do prodlouženého trojúhelníku ALM.

Konstrukce enteronu konvexního mnohoúhelníku, který *má* některé strany rovnoběžné

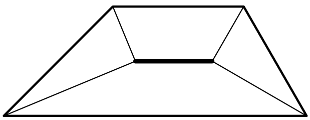
Postupujeme obdobně jako v případě mnohoúhelníku, který neměl rovnoběžné strany. Při snižování počtu vrcholů může však vzniknout lichoběžník, obdélník, kosodélník, čtverec nebo kosočtverec.

V lichoběžníku sestrojíme osy všech úhlů. Vzniknou čtyři pátrací trojúhelníky. Trojúhelníky nad rameny jsou pravoúhlé. Jejich vrcholy při pravých úhlech leží na střední příčce lichoběžníku. Může nastat jedna ze tří možností:

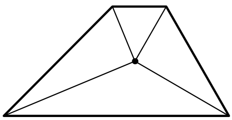
a) Vrcholy při pravých úhlech těchto trojúhelníků jsou krajními body úsečky. Ta je enteronem lichoběžníku (obr. 6a).

b) Vrcholy obou pravoúhlých trojúhelníků splývají (obr. 6b). Tento bod má stejnou vzdálenost od všech stran, je středem kružnice vepsané tomuto tečnovému čtyřúhelníku, je tedy jeho enteronem Q.

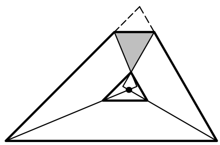
c) Pátrací trojúhelníky nad rameny se překrývají (obr. 6c). V tomto případě vybereme ze všech čtyř pátracích trojúhelníků ten s nejmenší výškou. Jeho vrcholem vedeme rovnoběžky se stranami lichoběžníku a sestrojíme *jádrový* trojúhelník. Střed kružnice jemu vepsané je enteronem Q daného lichoběžníku.



Obr. 6a



Obr. 6b

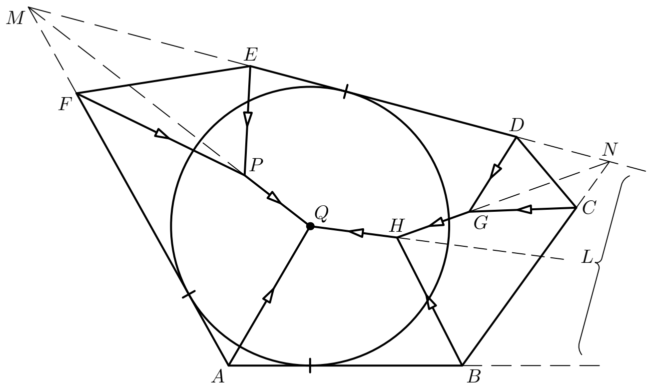


Obr. 6c

V obdélníku a kosodélníku je enteronem část střední příčky rovnoběžné s delšími stranami. Čtverec a kosočtverec jsou tečnové čtyřúhelníky. Enteronem je jejich střed.

Alternativní řešení úlohy

Do každého z šesti vrcholů mnohoúhelníku umístíme průzkumníka vybaveného kompasem. Průzkumníci změří azimuty stran mnohoúhelníku, které sousedí s jejich výchozí pozicí, a vydají se na průzkum po osách vnitřních úhlů mnohoúhelníku (obr. 7). V místech, kde se osy úhlů protínají, se průzkumníci setkají, vyhodnotí situaci a zvolí společný další směr postupu. V našem případě se nejdříve setkají průzkumníci C a D v bodě G. Dále postupují po ose úhlu určeného přímkami CB a DE. Azimut postupu stanoví na základě měření provedených na začátku průzkumu. Vzdalují se od průsečíku N obou přímek, a tedy i od okraje lesa.



Obr. 7

Po určité době se průzkumníci C a D setkají v bodě H s průzkumníkem B. Opět dají hlavy dohromady a stanoví další postup po ose úhlu určeného přímkami BA a DE. Budou se vzdalovat od průsečíku L obou přímek a jejich vzdálenost od okraje lesa dál poroste.

Mezitím se setkali průzkumníci E a F v bodě P a stanovili další postup v ose úhlu určeného přímkami FA a ED. Vzdalují se od průsečíku M těchto přímek, a tedy také postupují hlouběji do lesa. Nakonec se všichni průzkumníci setkají v enteronu Q, který je středem kružnice vepsané trojúhelníku LMA.

Zdalipak jsme nalezli ono básníkovo místo,
kam ptáci, laně chodí pít pod javorový kmen;
ti ptáci za dne bílého, ty laně v noci jen.
Když usnou lesy hluboké a vůkol ticho jest,
tu nebesa i studánka jsou plny zlatých hvězd. (??)

Kontrolní úloha: Určete graficky i početně enteron čtyřúhelníku $ABCD$, kde $A[0;0]$, $B[6;0]$, $C[3;4]$, $D[0;5{,}5]$.

Literatura

[1] Kuřina, F.: *Deset pohledů na geometrii.* MÚ AV, Praha, 1996.

[2] Sládek, J. V.: *Křišťálová studánka.* Sbírka básní Zvony a zvonky.

[3] Surynková, P.: *Geometrické vyhledávání.* www.surynkova.info/dokumenty/mff/PG/Prednasky/prednaska7.pdf.

[4] Švrček J., Vanžura J.: *Geometrie trojúhelníka.* SNTL, Praha, 1988.