Vladimír Strečko

Fragmenty z matematiky novoveku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 4, 11–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146638

Fragmenty z matematiky novoveku

Vladimír Strečko, FHPV PU Prešov

Abstract. The article presents fragments of the history of mathematics in Modern Ages.

Novovek v ľudských dejinách začína už vynájdením kníhtlače, resp. objavením Ameriky, no pri matematike by sme mohli polemizovať, či sa tak nestalo až objavením diferenciálneho a integrálneho počtu. Objavením diferenciálneho počtu roku 1665, resp. 1675 vzniká tzv. vyššia matematika. Obsahom tejto časti príspevku sú okrem novovekej matematiky aj fragmenty z matematiky moderných dejín. V moderných dejinách dochádza k tak prudkému rozvoju matematických vied, že akýkoľvek pokus o sumarizáciu nových objavov a výsledkov je len ťažko realizovateľný.

Nemecký coss (coß)

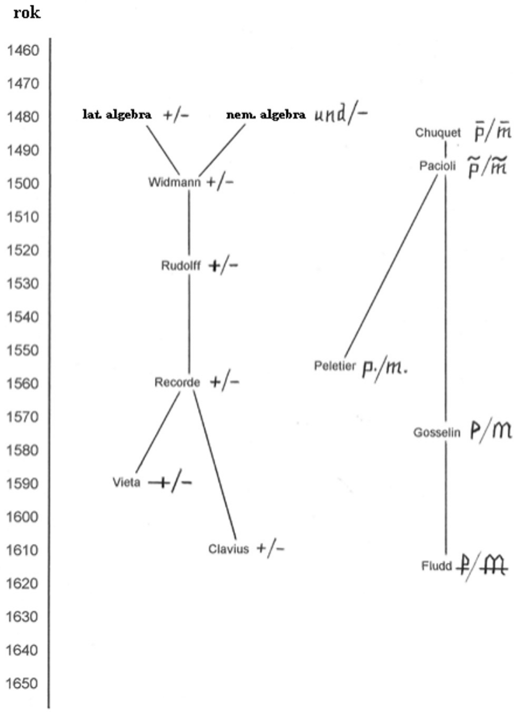
Časové obdobie medzi rokmi 1460 až 1550 sa v dejinách matematiky nazýva aj nemecký coss, pretože v popredí rozvoja matematiky stáli ľudia, ktorí žili a pôsobili v Rakúsku a v oblasti južného a stredného Nemecka, a ktorí si okrem iného dali aj za cieľ upustiť od písaného slova v matematickej terminológii.

Slovo coss a cossisti je odvodené z talianskeho označenia “cosa” (vec) pre neznámu. Coss sa tak stalo symbolom nielen pre neznámu, ale aj pre cossistami vyučované poznatky a vedomosti.

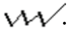
V Taliansku a Francúzsku sa už od konca 14. storočia začalo so skracovaním odborných matematických výrazov. Spomeňme si Nicolasa Chuqueta (asi 1445–1488), Lucu Pacioliho (asi 1445–1517) a Johanna Regiomontana (1436–1476), pričom práve posledne menovaný bol podľa našich doterajších vedomostí prvým, ktorý začal spomínané skratky používať. Neskôr sa jeho skratky rozšírili práve najmä medzi cossistami.

Autorom prvého po nemecky písaného spisu zaoberajúceho sa algebrou bol benediktínsky mních Fridericus Amman (?–1464/65), pôvodne nazývaný Friedericus Gerhart, z kláštora Sv. Emmerama pri Regensburgu. Tento spis z polovice 15. storočia je súčasťou zbierky rukopisov, známej ako *Mníchovský kódex* a okrem iného obsahuje aj riešenia šiestich typov lineárnych a kvadratických rovníc od arabského matematika al-Chwárizmího. Symboly používané Fridericom pritom pripomínajú tie, ktoré už používal Regiomontanus [5, s. 331].

Skutočným centrom nemeckej algebry sa stala na konci 15. storočia univerzita v Lipsku, kde pôsobil rodák z českého Chebu Johann Widmann (asi 1460–1500). Widmann tam po získaní magisterskej hodnosti v roku 1485 uskutočnil v roku 1486 aj prvú prednášku z algebry v nemčine. Text jeho prvej prednášky sa zachoval až dodnes, nachádza sa v štátnej knižnici v Drážďanoch. V tomto texte sa už dokonca pre sčítanie a odčítanie používajú znaky + a −, takisto ako ich aj použil v svojom diele *Zručné a pekné počítanie pre všetkých kupcov* (v origináli: *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*). Odtiaľ sa znaky + a − všeobecne rozšírili spolu s Widmannovými znakmi pre mocniny a premenné (obr. 1). Z tých čias dokonca pochádza aj výraz koreň pre označenie riešenia rovnice [5, s. 332].



Obr. 1: Vývoj symbolov + a − [6]

Ďalší z cossistov, Christoph Rudolff (asi 1500–1545), pracoval vo Viedni ako súkromný učiteľ matematiky a svoje skúsenosti zhrnul v diele *Zručné a pekné počítanie pomocou umných pravidiel Algebry, obyčajne coss nazývané* (*Behend unnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden*). Svoje dielo vydal prvýkrát v Štrasburgu v roku 1525 a to dosiahlo také rozšírenie, že bolo opätovne vydávané až do roku 1615. Rudolffovo dielo obsahuje pozičný systém a pravidlá počítania. Druhú polovicu svojho diela venuje riešeniu algebraických rovníc, pričom na rozdiel od al-Chwárizmího rozlišuje 8 typov algebraických rovníc, ktorých riešenia boli slovne popísané. Nakoniec nasleduje niekoľko stoviek príkladov, ktoré sú na základe daných postupov aj vyriešené. Rudolff ďalej rozvíja dosiaľ používanú symboliku a v lineárnych rovniciach zavádza zvláštne označenie pre druhú neznámu, pričom používa gotické $\mathfrak{q}$ od slova quantitas – množstvo. Rudolff je taktiež autorom moderného symbolu pre odmocninu: √. Oproti dnešnému symbolu pre odmocninu, tu chýba iba vodorovná čiara. Symbol vznikol z prvého písmena slova radix, alebo latinského označenia pre koreň. Tretiu odmocninu označuje symbolom: . A štvrtú následne . V nemeckých rukopisoch z konca 15. storočia sa druhá odmocnina označovala bodkou pred číslom, tretia odmocnina troma bodkami, zatiaľ čo štvrtá odmocnina dvoma bodkami, čo znamenalo vlastne druhá odmocnina z druhej odmocniny. Pri rýchlom zápise sa bodky postupne zmenili na čiarky.

Aj pôvod iných cossistických termínov a symbolov je známy. Symbol konštanty, nazývanej drachma (po arabsky dirham) alebo číslo, je modifikácia začiatočného písmena tohto slova, ku ktorému je pridaný vlnkovitý ornament. Symbolom druhej mocniny je jednoducho prvé písmeno príslušného nemeckého slova, reprodukujúceho presne latinský termín. Podobne aj symbol neznámej, nazývanej aj Ding (vec), mohol vzniknúť deformáciou začiatočného písmena [4, s. 407–408].

Rudolffova kniha mala značný vplyv na ďalší vývoj algebry a obzvlášť na ďalšieho cossistu Michaela Stifela (1487–1567), ktorý v roku 1553 vydal jej rozšírené a vylepšené vydanie.

K ďalším významným cossistom patril Adam Ries (1492–1559), banský úradník z mesta Annaberg, ktorý dokonca založil aj veľmi úspešnú školu zameranú na počítanie. Vo svojom diele *Practica* stanovil cossistické symboly až po deviatu mocninu a v náväznosti na al-Chwárizmího sa zaoberá rovnicami prvého a druhého stupňa. Tu je nutné poznamenať, že Ries a ostatní cossisti sa zaoberali len rovnicami, ktoré mali pozitívne riešenie. Rovnice s negatívnymi a komplexnými koreňmi považovali za neriešiteľné. Ako cossisti pôsobili aj obaja synovia Adama Riesa, Abraham (1533–1604) a Jacob (?–1604) [5, s. 334–335].

Ako vlastne vyzerali rovnice, ktorých riešeniami sa zaoberali cossisti? Pár ich tu uvádzame, pričom prvé dva príklady pochádzajú od Adama Riesa a ďalšie dva od Michaela Stifela.

Jeden pán povedal: Pozdrav Boh našich tovarišov, všetkých tridsiatich. Jeden z tovarišov odpovedal: Keby nás ešte raz toľko bolo a polovica z nás k tomu, tak by nás bolo tridsať. Otázka je: Koľko ich (tovarišov) bolo?

Dnes by sme príklad vyriešili pomocou rovnice $x + x + \frac{x}{2} = 30$, z čoho by sme dostali riešenie, že tovarišov bolo 12.

Obchodník s dobytkom
Jeden pán mal 100 florénov. Za to chcel kúpiť 100 kusov dobytka, a to oslov, prasiat, teliat a kôz. Jeden osol stál 4 florény, jedno prasa 1 a pol floréna, jedno teľa polovicu floréna a jedna koza štvrť floréna. Koľko jedntolivých zvierat mohol kúpiť za 100 florénov?

Táto úloha má pôvod v čínskej matematike a patrí k úlohám s viacero celočíselnými riešeniami. Ries uvádza ako riešenie 12 oslov, 20 prasiat, 20 teliat a 48 kôz. Iné riešenie je napríklad 14 oslov, 12 prasiat, 30 teliat a 44 kôz. Celkovo má úloha 222 riešení.

Niekoľko tovarišov sediacich v jednom cechu si delilo 75 pfennigov. Daj každému toľko pfennigov, koľko je tretia časť (tretina) tovarišov. Koľko je tovarišov?

Riešenie: Pomocou jednoduchej rovnice zistíme, že tovarišov bolo 15.

Niekoľko vojvodcov vytiahlo do poľa. Každý jeden mal pod sebou toľko vlajkonosičov, koľko bolo vojvodcov. Pod každým vlajkonosičom bolo 30krát viac sedliakov ako bolo vlajkonosičov v poli. Každý vojvodca mal mesačný žold 150 florénov. A každý sedliak mal toľko florénov mesačný žold, koľko vojvodcov bolo. Vychádzalo, že sedliaci mali spolu mesačný žold 125krát väčší ako vojvodcovia. Koľko bolo vojvodcov? [5, s. 344–345]

Na prvý pohľad ťažkopádne zadanie sa dá jednoducho zapísať pomocou rovnice $30x^2 \cdot x = 125 \cdot 150x$, kde x je počet vojvodcov, ktorý po vyriešení rovnice vychádza 25.

Ako vidno, cossisti sa venovali riešeniu problémov každodenného života, pričom sa väčšinou jednalo hlavne o lineárne, kvadratické a kubické rovnice. Aj keď cossisti okrem zavádzania matematickej symboliky neprišli s ničím prevratným, majú veľkú zásluhu na priblížení matematiky širším vrstvám obyvateľstva strednej Európy. Umožnilo to hlavne používanie materinského jazyka a nie príliš akademickej latinčiny, ako bolo dovtedy zvykom.

Del Ferrov/ Tartagliov/Cardanov vzorec. Bombelliho pravidlá

Pri riešení rovníc tretieho stupňa sa stretávame s tzv. Cardanovými vzorcami. Okolnosti vzniku týchto vzorcov a pátranie po všeobecnom riešení kubických rovníc okrem iného viedli aj k tomu, že algebra sa stala samostatnou matematickou disciplínou.

V roku 1516 Scipione del Ferro (1463?–1526), profesor matematiky v Bologni, pravdepodobne našiel algebraické riešenie rovníc tretieho stupňa typu

$$x^3 + ax = b.$$

Keďže del Ferro toto svoje riešenie nezverejnil, nemohlo sa šíriť ďalej. Nepriamo avšak predsa len sa tieto poznatky dočkali rozšírenia. Jeden z jeho žiakov, matematik Antonio Maria Fiori, pri svojej návšteve Benátok v roku 1535 vyzval, tak ako bolo v tých časoch bežné, tunajšieho počtárskeho majstra, pokladníka a matematika Niccola Tartaglia, k verejnej súťaži. Predložil pred Tartagliu 30 úloh a ten ich mal za určitú dobu vypočítať.

Na ukážku teraz uvedieme znenia troch príkladov, ktoré patrili medzi súťažných tridsať:

1. Nájdi mi číslo také, že keď k nemu jeho kocku pridáme, výsledok šesť je, to znamená 6.
2. Nájdi mi dve čísla, jedno je dvojnásobok druhého, keď mocnina väčšieho čísla bude s malým vynásobená, a keď produkt toho k dvom pôvodným číslam pripočítaný bude, výsledok štyridsať bude, to znamená 40.
3. Jeden muž predal zafír za 500 dukátov, a jeho zisk tak činil tretiu mocninu svojho kapitálu. Aký veľký bol tento zisk?

Dnes by sme prvú rovnicu zapísali ako

$$x^3 + x = 6.$$

Konkrétnym riešeniam sa pri tomto ani pri nasledujúcich príkladoch nebudeme venovať.

Druhá úloha je vlastne sústava rovníc s dvoma neznámymi, pričom priamo v prvej rovnici máme vyjadrenú jednu neznámu pomocou druhej

$$y = 2x$$
$$y^2x + y + x = 40$$

a následne po dosadení sa úloha transformuje na kubickú rovnicu

$$4x^3 + 3x = 40.$$

Poslednú úlohu by sme dnes zapísali ako

$$x^3 + x = 500.$$

Ako sa však vlastne skončila spomínaná súťaž? Pár minút pred uplynutím lehoty Tartaglia odovzdal riešenia všetkých úloh, a tým tak splnil podmienky pre výhru v súťaži. Stalo sa tak krátko pred polnocou 12. februára 1535.

A práve Niccolo Tartaglia (1506–1559) bol ďalším, kto asi najviac prispel k poznaniu všeobecného riešenia kubických rovníc. Tento rodák z Brescie sa pôvodne volal Fontana, avšak keď bol malý chlapec, jeho rodné mesto vyplienili francúzski vojaci, následkom čoho utrpel takú traumu, že začal koktať a získal meno Tartaglia, čo znamenalo koktavý. S týmto svojím handicapom sa nevyrovnal až do konca svojho života. Skôr, ako sa stal známym učencom, zažil ťažkú mladosť. Keď mal 16 rokov, zaumienil si dovtedy negramotný Tartaglia, že sa naučí abecedu. Bohužiaľ, našetrené peniaze na školné mu vystačili len po písmeno K, a tak bol nútený odísť zo školy. Našťastie sa mu však podarilo ukradnúť učebnicu, a doučiť sa tak abecedu svojpomocne, pričom sa následne dokonca naučil aj po latinsky. Po získaní náležitého vzdelania začal pôsobiť v Benátkach, kde v taliančine verejne prednášal o Euklidovej matematike a Archimedových plávajúcich telesách. Okrem iného pri skúšobných výstreloch zistil, že strela doletí do najväčšej vzdialenosti, keď je hlaveň pušky zamierená pod uhlom 45°. Pri spomínanej súťaži, nezávisle od del Ferra, našiel všeobecné riešenie rovnice tretieho stupňa [5, s. 387–388].

V tom čase žil a pôsobil v Miláne lekár a matematik Girolamo Cardano (1501–1576), ktorému sa aj cez všetko jeho úsilie nedarilo nájsť počtárske riešenie kubických rovníc. Keď sa dopočul o Tartagliovom úspechu, začal naňho naliehať, aby mu ho prezradil. Nakoniec sa stretli v Miláne a Tartaglia dal Cardanovi vzorec pre riešenie špeciálnych prípadov kubických rovníc a zaprisahal ho, aby ho nikomu neukazoval.

Aj napriek danému sľubu Cardano zverejnil Tartagliove výsledky v svojej najvýznamnejšej knihe *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (*Veľké umenie, alebo o algebraických pravidlách*). Cardano síce v prvej kapitole tejto knihy uvádza a uznáva, že výsledky prebral od Tartagliu. Ten však, rozzúrený porušením daného sľubu, obvinil Cardana z plagiátorstva a následne vzniknutý spor zasiahol akademickú obec celého vtedajšieho Talianska [5, s. 389].

Tartaglia vo svojej čiastočne autobiografickej knihe *Quesiti et inventioni divers* (*Rôzne otázky a vynálezy*, 1546), uvádza, že vzorec prezradený Cardanovi, mal formu 25veršovej básne, ktorá neobsahovala dôkaz a týkala sa riešenia rovníc typu $x^3 + ax = b$, prípadne $x^3 = ax + b$. Hlavná myšlienka riešenia spočívala pritom v substitúciach $t^3 - s^3 = b$ a $t \cdot s = \frac{a}{3}$, čo viedlo k riešeniu rovnice $x = t - s$. Zo substitúcie dostávame vzorec, o ktorom história nakoniec rozhodla, že ho poznáme pod prívlastkom Cardanov:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}$$

Tento vzorec, však v prípade riešenia rovnice typu $x^3 + b = ax$, ktorá má tri rôzne reálne korene, vedie k tomu, že potrebujeme vypočítať

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

ale výraz pod odmocninou je záporný. Cardano zostal pri riešení tohto problému bezradný, a vznikol tak slávny *casus irreducibilis* (nerozložiteľný prípad).

Za následok zverejnenia riešenia kubickej rovnice môžeme považovať aj vznik imaginárnych alebo komplexných čísel. Najväčší podiel na ich vzniku mal inžinier Rafael Bombelli.

Bombelli (1526–1572), ktorý sa najmä zaoberal odvodňovaním močiarov, zistil, že matematici dosiaľ neprenikli príliš hlboko do problematiky druhých odmocnín zo záporného čísla. Skonštatoval, že obzvlášť Cardano mal v tejto oblasti chybné predstavy. Následne publikoval svoje výsledky v trojzväzkovom diele *L'Algebra* (*Algebra*, 1572).

Bombelli považoval za potrebné zaviesť nové označenie pre odmocninu z negatívneho čísla. Tie, ktoré boli pozitívne, označil ako *piu di*, skrátene p.d., a tie negatívne ako *meno di*, alebo m.d. V praxi potom písal p.d.m.11 pre $+\sqrt{-121}$ a m.d.m.11 pre $-\sqrt{-121}$. Bombelli takisto zaviedol aj pravidlá pre počítanie s týmito novými výrazmi, ktoré by sme dnes zapísali ako:

$$(+1)(\mathrm{i}) = +\mathrm{i}, \quad (-1)(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}, \quad (+1)(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}, \quad (-1)(-\mathrm{i}) = +\mathrm{i},$$
$$(+\mathrm{i})(+\mathrm{i}) = -1, \quad (-\mathrm{i})(+\mathrm{i}) = +1, \quad (+\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = +1, \quad (-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = -1.$$

Bombelli tiež zistil, že jeho imaginárne zložky sú použiteľné aj pre Cardanov vzorec [5, s. 392–394].

S Bombellim končí obdobie, kedy najviac noviniek prinášali talianski matematici, čo súviselo najmä s protireformáciou a obmedzovaním myšlienkovej slobody. Aj preto sa ťažisko pokroku v matematike presunulo do západnej a strednej Európy.

Tabuľka násobenia Johna Napiera

V minulosti mala matematická negramotnosť oveľa väčšie rozmery ako teraz a niektorí matematici sa ju pokúšali odstrániť rôznymi pomôckami a spôsobmi. Jedným z nich bol aj škótsky šľachtic John Napier.

Meno matematika Johna Napiera (1550–1617), známeho aj ako John Neper, sa nám vo všeobecnosti spája s logaritmami a so zostavením prvých logaritmických tabuliek. Málokto však už vie, že patril medzi tých matematikov, ktorí sa ako prví snažili zostrojiť mechanický počítací stroj [5, s. 420].

Vedľajším produktom Napierovho pokusu o zostrojenie tohto počítacieho stroja bolo vynájdenie počítacích tabuliek. Princíp fungovania týchto takzvaných *Napierových paličiek* (v origináli *Napier's rods*) popísal v svojom diele *Rabdologia* (v origináli: *Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*, 1617). Išlo o jednoduché násobenie čísel s tým, že počítajúcemu stačilo vedieť iba sčítať [7].

Napierove paličky pozostávali z desiatich stĺpcov s násobkami jednotlivých čísiel. Pre príklad je na obr. 2 zobrazená vrchná časť jedného stĺpca tejto tabuľky, konkrétne ide o násobky čísla 3. Každý jeden štvorec obsahuje jeden násobok čísla 3 a každý z týchto štvorcov okrem vrchného bol rozdelený diagonálou. Pritom keď bolo číslo 3 násobené napríklad 5, tak výsledok 15 bol zapísaný ako 1 nad diagonálou a 5 pod ňou. Aj všetky ostatné dvojciferné čísla v tabuľke boli zapísané tak, že násobky 10 sa nachádzali nad diagonálou a násobky jednotky pod ňou.

3
/6
/9
1/2
1/5

Obr. 2: Časť Napierových paličiek

Teraz si ukážeme, ako táto tabuľka vlastne fungovala. Pre ilustráciu vynásobíme spolu čísla 1 749 a 362. Vezmeme si štyri paličky s číslami 1, 7, 4, 9 na vrchu a pás čísel obsahujúci čísla od 1 do 9. Pre vynásobenie čísla 1 749 uložíme tieto 4 paličky ako na obr. 3.

1	1	7	4	9
2	/2	1/4	/8	1/8
3	/3	2/1	1/2	2/7
4	/4	2/8	1/6	3/6
5	/5	3/5	2/	4/5
6	/6	4/2	2/4	5/4
7	/7	4/9	2/8	6/3
8	/8	5/6	3/2	7/2
9	/9	6/3	3/6	8/1

Obr. 3: Napierove paličky pre vynásobenie čísel 1 749 a 362

Pre násobenie čísla 1 749 číslom 362 si všimneme riadky 3, 6 a 2. Začínajúc riadkom 3, kde sčítavaním čísel susediacich po diagonále, čiže $3 + 2 \ / \ 1 + 1 \ / \ 2 + 2 \ / \ 7$ dostávame číslo 5 247.

3	/3	2/1	1/2	2/7

Podobne s riadkom 6, kde musíme dať pozor na zvyšnú jednotku, keď $6 + 4 = 10$,

6	/6	4/2	2/4	5/4

dostávame 1 0494 a riadkom 2

2	/2	1/4	/8	1/8

a výsledkom 3 498. Teraz už iba umiestnime výsledné čísla pod seba tak, že nasledujúce číslo je posunuté o jedno miesto doprava od predošlého:

5247
10494
 3498

Teraz nám stačí už iba tieto čísla posčítať a dostávame sa k číslu 633 138, čo je výsledok násobenia čísel 1 749 a 362. Analogicky by sa násobili ľubovoľné iné dve čísla podla tab 4.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	/2	/4	/6	/8	1/	1/2	1/4	1/6	1/8
3	/3	/6	/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	/4	/8	1/2	1/6	2/	2/4	2/8	3/2	3/6
5	/5	1/	1/5	2/	2/5	3/	3/5	4/	4/5
6	/6	1/2	1/8	2/4	3/	3/6	4/2	4/8	5/4
7	/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	/8	1/6	2/4	3/2	4/	4/8	5/6	6/4	7/2
9	/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Obr. 4: Kompletná tabuľka násobenia od Johna Napiera

Tieto Napierove paličky sa rýchlo dostali do obľuby nielen medzi Napierovými priateľmi, ale pomerne rýchlo sa rozšírili aj mimo územia Britských ostrovov. Rabdológia bola následne preložená aj do taliančiny a do holandčiny. Svojho času sa Napierove kostičky, ako aj boli niekedy nazývané, stali vítanou pomôckou pre každého obchodníka [7].

Ženy a matematika pred 20. storočím

Immanuel Kant si vraj raz povedal: „To, že ženy budú nosiť brady, je rovnako pravdepodobné, ako to, že budú svoje pekné hlavičky zamestnávať geometriou." Dnes sa môžeme nad týmto výrokom už len pousmiať, avšak predsa sa musíme pozastaviť nad tým, či tento výrok nemal v dobe svojho vzniku predsa len nejaké opodstatnenie. Vieme vymenovať mnoho mužov, ktorí tvorili dejiny matematiky, ale koľko vieme vymenovať žien? Tých až do 20. storočia naozaj veľa nebolo. Ale práve týmto priekopníčkam na poli matematiky sú venované nasledujúce riadky.

Ženy mali v minulosti v dôsledku svojho menejcenného postavenia oproti mužom omnoho menej príležitostí, ako získať vzdelanie. Ich úlohou tradične bola výchova detí a vedenie domácnosti. Tak bolo zacielené aj ich vzdelávanie, ak vôbec nejaké bolo. Takisto bolo všeobecne rozšíreným názorom, že ženy sú neschopné sa seriózne zaoberať matematikou. Dejiny však ukázali, že ženy, pokiaľ im nebolo odoprené vzdelanie, dokázali preraziť aj na poli matematiky. Vzdelanie na určitej úrovni bolo sporadicky poskytované ženám už v antike, avšak spomalenie až zastavenie rozvoja na poli vedy v Európe počas stredoveku ich znovu uvrhlo do všeobecnej negramotnosti. Ani v iných kultúrach mimo Európy sa ženy, vďaka svojmu submisívnemu postaveniu oproti mužom, nepresadili [2, s. 307–308].

Prvé známe ženy matematičky boli Theana a Hypatia, ktorým je venovaný jeden z predošlých článkov. Od Hypatie, žijúcej na prelome 4. a 5. storočia, až po 17. storočie nemáme žiadne záznamy, ktoré by spomínali nejakú ženu v súvislosti s matematikou. Toto mlčanie záznamov prelomila až Elena Lucrezia Cornaro Piscopia (1646–1684).

Piscopia sa narodila v Benátkach v aristokratickej rodine, pričom jej rodokmeň zahŕňal aj niekoľko kardinálov a pápežov. Jej túžba po vzdelávaní ju doviedla k štúdiu na univerzite v Padove, kde okrem iného prednášala aj matematiku. Neskôr prevážila jej náklonnosť k teológii, čo ju priviedlo až k sporu s rímskokatolíckou cirkvou, ktorá jej odmietla po doštudovaní udeliť doktorát z teológie. Vďaka vplyvu jej otca jej však bol nakoniec kompromisne udelený doktorát z filozofie. 25. júna 1678 sa tak Piscopia stala prvou ženou na svete vôbec, ktorej bol doktorát udelený. Po dosiahnutí tohto titulu a po odmietnutí niekoľkých významných sobášnych ponúk vstúpila do kláštora a venovala sa charite a vzdelávaniu chudobných. Zomrela vo veku 38 rokov, pravdepodobne na tuberkulózu [8].

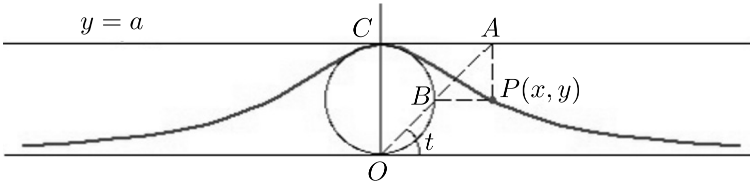
Osemnáste storočie bolo na ženy matematičky omnoho plodnejšie ako predošlé. Jednou z nich bola Parížanka Emilie du Châtelet (1706–1749), mimoriadne vzdelaná žena, ktorá sa okrem vzťahu s Voltairom preslávila najmä francúzskym prekladom diela Isaaca Newtona *Philosophiae naturalis principia mathematica*, ku ktorému napísala aj algebraický komentár.

Podobne známou sa stala aj Angličanka Mary Fairfax Somerville (1780–1872). Preložila do angličtiny *Mecanique Céleste* (*Nebeská mechanika*) od Pierra Simona de Laplacea (1749–1827) a toto dielo spolu s Newtonovými *Philosophiæ* vydala v popularizovanej reedícii [9].

Ďalšou známou Taliankou na poli matematiky bola Maria Gaetana Agnesi (1718–1799). Aj keď bola najstaršou spomedzi 21 detí, bolo jej zabezpečené výborné vzdelanie, pretože jej otec u nej vytušil obrovský potenciál. Po smrti svojej matky pomáhala otcovi pri výchove svojich súrodencov a popritom stihla napísať dielo, ktoré po publikovaní v roku 1748 vyvolalo malú vedeckú senzáciu. Jej práca *Analytický ústav* venovaná diferenciálnemu a integrálnemu počtu bola prvou kompletnou analýzou konečna a nekonečna. Podľa Agnesi je nazvaná aj krivka, ktorú vynašla, tzv. *Agnesino bosoráctvo*, ktorú skonštruujeme nasledovne (obr. 5). Začneme s kružnicou s priemerom a so stredom v bode $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Pokračujme s ľubovoľne zvoleným bodom A na priamke $y = a$, ktorý spojíme s počiatkom, pričom priesečník spojnice a kružnice označíme B. Bod P, ktorý patrí Agnesinej krivke, nájdeme ako priesečník kolmice na priamku $y = a$ zostrojenej z bodu A a rovnobežky k $y = a$ prechádzajúcej bodom B. Podobne zostrojíme ostatné body krivky. Dnes by sme Agnesinu krivku zapísali pomocou rovnice

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Právom nás môže napadnúť, prečo sa dotyčná krivka nazýva práve Agnesino bosoráctvo. Za toto nezvyčajné pomenovanie vďačíme chybnému prepisu termínu averisera (krivka, zakrivený) v origináli, ktorý anglický matematik Jonathan Colson (1680–1760) prepísal ako avversiera (bosorka, diablom posadnutá žena). Následné preklady do angličtiny dali tejto krivke toto neobvyklé pomenovanie [10].



Obr. 5: Agnesino bosoráctvo [9]

U nás je táto krivka známa aj ako kučera alebo prstenec a je pozoruhodné, že keď si za a dosadíme číslo 1, tak obsah útvaru P, ktorý je ohraničený osou x a krivkou, je

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[\operatorname{arctg} x\big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Azda najslávnejšou matematičkou vôbec bola Francúzka Sophie Germain (1776–1831). Keď mala 13 rokov, vypukla francúzska revolúcia a jej rodičia ju izolovali od okolitého sveta a nepúšťali ju z domu. Mladá Sophie tak trávila čas v otcovej knižnici, kde sa oboznámila s Archimedovým dielom a životom, čo u nej iniciovalo záujem o matematiku a fyziku [1, s. 8].

Ako 19ročná sa zapísala na École Polytechnique, no keďže ženám nebolo dovolené túto školu navštevovať, vzdelávala sa diaľkovo prostredníctvom zápiskov z hodín, ktoré jej boli poskytnuté. Tak sa dostala do styku s prácou Louisa Josepha Lagrangea (1736–1813), ktorý v tom čase na spomínanej škole pôsobil. Pod pseudonymom Antoine-Auguste LeBlanc (alebo aj M. LeBlanc) zaslala Lagrangeovi časť svojich komentárov k jeho dielu, ktoré ho natoľko zaujali, že sa rozhodol s domnelým študentom stretnúť. Napriek zisteniu, že zo študenta sa vykľula študentka, sa jej ujal a stal sa jej mentorom. Venovala sa najmä teórii čísel a od roku 1804 bola v korešpondenčnom styku s Carlom Friedrichom Gaussom (1777–1855). V prvom liste Gaussovi predložila dôkaz, že rovnica $x^n + y^n = z^n$ nemá riešenie pre prípad, že n je prirodzené číslo v tvare $p-1$, kde p je prvočíslo v tvare $8k+7$. Tak isto podala dôkaz vety, ktorá neskôr dostala aj jej meno. Germainovej veta znie:

Nech platí $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, tak potom je jedno z troch celých čísel x, y a z deliteľné 5.

Neskôr sa venovala hlavne fyzike. Za svoj prínos v teórii elasticity v roku 1816 získala ocenenie od Francúzskej akadémie vied, avšak cenu si nemohla na verejnej ceremónii prevziať, pretože vznikli obavy, že by kvôli jej pohlaviu vypukol škandál. Neskôr však Sophia Germain získala ďalšie významné ocenenia, po ktorých určite mohla cítiť zadosťučinenie [1, s. 12].

Jedným z jej prínosov bol aj boj proti spoločenským predsudkom, ktorých počas svojho života zažila nadmieru. Zomrela vo veku 55 rokov na rakovinu.

Pozoruhodne sa preslávila ďalšia žena Augusta Ada Byron, grófka z Lovelace (1815–1852). Lovelace bola dcérou známeho básnika lorda G. G. Byrona a aj napriek rodičovskej nevôli sa nevydala v otcových stopách. Namiesto poézie sa oboznámila s matematikou a s dielami M. F. Somerville a Charlesa Babbage (1792–1871), ktorý bol matematikom a konštruktérom. Prostredníctvom vzájomnej korešpondencie sa snažili zostrojiť prvý analytický počítací stroj. Lovelace dokonca napísala Babbagemu list, v ktorom podrobne popísala postup, akým by tento stroj riešil Bernoulliho výpočty. Tento popis sa dostal do histórie ako prvý počítačový program alebo software. Aj napriek tomu, že Lovelace a Babbage žiadny počítací stroj nezostrojili a niektoré ich zámery boli prehnanými výplodmi fantázie, správne predpovedala, že raz budú stroje, ktoré budú kresliť, komponovať hudbu a ktoré budú mať široké využitie vo vede [9].

Ďalšia matematička, Angličanka Florence Nightingale (1820–1910), sa preslávila vynájdením polárneho diagramu, u nás skôr známeho ako koláčový graf. Skôr ako matematičkou bola viac zdravotnou sestrou – reformátorkou britských hygienických zásad. Svoj graf a niektoré štatistické metódy po prvýkrát použila počas Krymskej vojny (1853–1856), keď sumarizovala zbytočné úmrtia vojakov v britskej armáde v dôsledku nedostatočných hygienických podmienok. Počas tejto vojny bola činná vo vojenskej nemocnici, kde zistila, že úmrtnosť zranených vojakov je 42,7 %. Po zavedení ňou navrhnutých zlepšení, sa toto číslo znížilo [9].

Poslednou matematičkou, ktorej sa budeme venovať, je Sofia Vasilievna Kovalevská (1850–1891). Bola dcérou ruského generála Korvína-Kručkovského, ktorý pôvod svojej rodiny odvodzoval až od uhorského kráľa Mateja Korvína (15. storočie). Ako malé dieťa bola Sofia fascinovaná nezvyčajnou tapetou v sídle jej rodičov, ktorej vzor tvorili záznamy prednášok ruského matematika Michaila Ostrogradského (1801–1862) o diferenciálnom a integrálnom počte. Jej otec nebol veľmi nadšený záľubou svojej dcéry v matematike a navyše v tom čase mali ženy zakázané študovať na univerzitách. Sofia sa vynašla a ako 18ročná uzavrela fingované manželstvo so študentom paleontológie, ktoré sa neskôr stalo skutočným a spolu s ním odišla do Heidelbergu v Nemecku. Tam obdržala povolenie študovať na tamojšej univerzite. Neskôr pôsobila v Berlíne, kde súkromne študovala u nemeckého matematika Karla Weierstrassa (1815–1897), pretože ako žene jej nebolo dovolené študovať na tamojšej univerzite. S Weierstrassovou podporou dosiahla doktorandský stupeň vzdelania na univerzite v Göttingene a jej dizertačná práca bola zameraná na parciálne diferenciálne rovnice a eliptické integrály. Jej práca nadchla tunajších profesorov tak, že jej udelili titul bez absolvovania skúšok a návštev niektorých predmetov. Ani toto všetko jej však po návrate do Ruska nezabezpečilo primeranú akademickú pozíciu, a tak sa po samovražde svojho muža, ktorý bol zapletený do finančného škandálu, vrátila do Berlína. Neskôr bola za svoju činnosť a hlavne za objasnenie rotácie prstencov Saturnu vyznamenaná francúzskou, švédskou a aj ruskou akadémiou vied. V roku 1889 obdržala ako prvá žena na svete stále miesto na univerzite v Štokholme. Podobne bola prvou ženou na svete, ktorá písala úvodníky do matematického žurnálu.

Sofia Kovalevská zomrela po banálnom prechladnutí v dôsledku cesty za priateľom do Paríža. Okrem matematiky sa venovala aj písaniu a boju za rovnoprávnosť žien [2, s. 313–314].

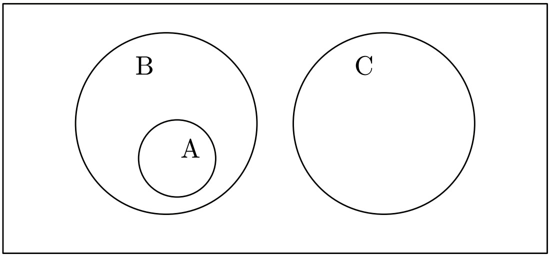
Ako vidíme, presadiť sa ženám v minulosti bránilo hlavne ich spoločenské postavenie. Od druhej polovice 19. storočia sa spoločenské podmienky zmierňujú, ženy sa presadzujú nielen na poli vedy a literatúry a postupne sa im darí vymaniť sa z trojuholníka kostol–deti–kuchyňa. Na rovnoprávne postavenie s mužmi si však museli počkať až do 20. storočia.

Vennove (Eulerove) diagramy

John Venn (1834–1923) bol duchovným v anglikánskej cirkvi a zároveň aj pôsobil na univerzite v Cambridgi. Dokonca zostavil aj jedno rozsiahle kompendium s menami všetkých študentov univerzity. Ako matematik nebol nijak obzvlášť výnimočný, ale aj tak jeho príspevok k matematike urobil meno Venn nesmrteľným.

Týmto príspevkom sú Vennove diagramy, ktoré vytvoril v druhej polovici 19. storočia, znázorňujúce schému k vizualizácii logických vzťahov medzi množinami. Dnes ich nájdeme v každej učebnici, ktorá sa zaoberá výrokovou logikou, a takisto aj v každej matematickej príručke. Vennove diagramy sú najčastejšie kružnice alebo elipsy reprezentujúce objekty s rovnakými vlastnosťami [2, s. 305]. Všimnime si však obr. 6. Tento nech predstavuje množinu všetkých stromov. Potom nech oblasť C predstavuje množinu všetkých javorov, oblasť B množinu všetkých ihličnatých stromov a oblasť A množinu všetkých borovíc. Z diagramu môžeme urobiť nasledujúce úsudky:

– všetky borovice sú ihličnaté stromy; množina B obsahuje celú množinu A
– ani jeden javor nieje ihličnatý strom; množiny B a C sa neprekrývajú
– ani jedna borovica nieje javorom; množiny A a C sa neprekrývajú

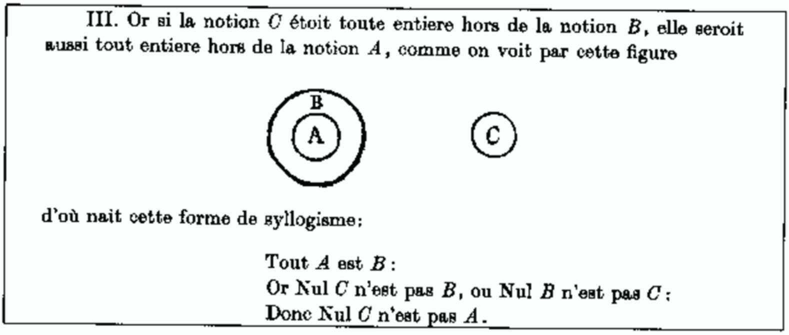


Obr. 6: Grafické znázornenie logických operácií pomocou Vennových diagramov

Tu sú vlastne znázornené niektoré základné pravidlá logiky. Z tvrdení „Všetky objekty s vlastnosťou A majú vlastnosť B.“ a „Žiadny prvok s vlastnosťou C nemá vlastnosť B.“ vyplýva: „Žiadny prvok s vlastnosťou C nemá vlastnosť A.“ Tieto úsudky sú triviálne, keď sa pozrieme na kruhy na diagrame.

Nikto, ani z okruhu Vennových najlepších priateľov, nevedel povedať, kde leží pôvod tejto obzvlášť dômyselnej myšlienky. Pravdaže, na vynájdenie tejto myšlienky bolo treba omnoho menej rozumu ako napríklad, keď Archimedes rátal povrch gule. Vyrátanie povrchu gule potrebuje hlbšiu myšlienku, pričom Vennove diagramy ľahko vysvetlíme aj dieťaťu pomocou papiera a farbičiek.

Pozoruhodné je, že podobné schémy sa v matematike objavili už skôr. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), ktorého pokladáme za zakladateľa symbolickej logiky, používal malé schémy podobného typu už v 17. storočí. A podobne sa objavili aj v diele Leonharda Eulera (1707 až 1783). V sobrannom spise *Opera Omnia* sa nachádza ilustrácia, ktorá je uvedená na obr. 7. Dostávame sa tak k otázke: Neboli potom Vennove diagramy známe už sto rokov pred Vennom? Celkom oprávnene by sme mohli Vennove diagramy nazývať aj Eulerove diagramy, čo objasňuje obsah zátvorky v názve tejto state.



III. Or si la notion C étoit toute entiere hors de la notion B, elle seroit aussi tout entiere hors de la notion A, comme on voit par cette figure

d'où nait cette forme de syllogisme:

Tout A est B:
Or Nul C n'est pas B, ou Nul B n'est pas C:
Donc Nul C n'est pas A.

Obr. 7: Diagramy v diele Opera Omnia [2, s. 306]

Označenie Eulerove diagramy sa v západnej Európe vyskytuje častejšie, avšak v našom priestore je úplne dominantné pomenovanie Vennove diagramy [2, s. 306].

Aj keď pôvodnosť Vennových diagramov je sporná, predsa sa nejakým spôsobom dostali do zaužívania práve s jeho menom. Okrem pomenovania pre tieto diagramy sa meno Johna Venna nespája s inými udalosťami z dejín matematiky.

Zblúdilý profesor Eduard Čech

V prvom ročníku na stredných školách sa okrem iného preberajú aj kvadratické rovnice. V súvislosti s nimi môžeme spomenúť významného českého profesora Eduarda Čecha (1893–1960).

O ňom sa traduje táto zaujímavá historka. V čase, keď pôsobil v Brne a viedol topologický seminár, bol svojimi kolegami pozvaný na večeru do Sadovej ulice číslo 56. Profesor Čech ihneď suverénne prehlásil, že toto číslo domu je veľmi ľahko zapamätateľné, lebo ho tvorí akási postupnosť štyroch po sebe nasledujúcich číslic, ktorá vyhovuje nasledujúcej rovnosti

$$56 = 7 \cdot 8.$$

Na veľké počudovanie ostatných prišiel profesor Čech na dohodnuté miesto predsa len neskoro. Svoje meškanie vysvetlil svojrázne. Priznal, že pochopiteľne zabudol číslo z hľadaného domu, ale z vlastnosti podmienky

$$10x + (x + 1) = (x + 2)(x + 3)$$

si odvodil, čomu sa rovná neznáma x. Avšak po úprave dostávame nasledovnú kvadratickú rovnicu $x^2 - 6x + 5 = 0$. Táto rovnica má však dva korene $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$. Pričom po dosadení prvého koreňa do podmienky, dostávame zhodou okolností takisto postupnosť štyroch po sebe idúcich číslic: $12 = 3 \cdot 4$. Čiže profesor išiel teda najprv na Sadovú ulicu číslo 12 a až tam zistil, že prvé riešenie nevyhovuje danej reálnej situácii. Uplatnil, teda po prvom omyle, druhé riešenie a dostavil sa ale už s určitým omeškaním na dohodnutú adresu [3, s. 12].

Teraz si priblížime životné osudy profesora Eduarda Čecha. Narodil sa v Stračove, v severovýchodných Čechách, dňa 29. júna 1893. Jeho nadanie pre matematiku sa prejavilo už počas štúdia na gymnáziu v Hradci Králové a po jeho absolvovaní pokračoval v štúdiu deskriptívnej a projektívnej geometrie na Filozofickej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe. V roku 1920 dosiahol doktorát z matematiky a následne vyučoval na niekoľkých pražských reálnych školách. Od zimy na prelome rokov 1920/21 získal neveľké štátne štipendium, čo mu umožnilo zúčastniť sa jednoročného študijného pobytu v talianskom Turíne, kde sa dostal do bezprostredného kontaktu s profesorom Guidom Fubinim (1879–1943), ktorý ho vyzval k spoluautorstvu na vydaní knihy o projektívnej diferenciálnej geometrii. Táto kniha vyšla v roku 1926 aj v českom jazyku pod názvom *Projektívni diferenciálni geometrie* (v tal. origináli: *Geometria priottiva differenziale*). Medzitým Čech pôsobil na Masarykovej univerzite v Brne, kde bol menovaný mimoriadnym profesorom. Riadnym vysokoškolským profesorom sa stal v roku 1928. V Brne oživil matematický život a bol obetavým a láskavým učiteľom.

Roku 1936 odišiel do Princetonu v USA, kde pracoval a prednášal v Ústave pre pokročilé štúdiá. Po návrate založil v Brne seminár z topológie, ktorý možno považovať za základ českej (československej) topologickej školy. Po skončení druhej svetovej vojny prešiel z Prírodovedeckej fakulty v Brne na Karlovu univerzitu do Prahy. Podstatne prispel k vzniku Matematického ústavu ČSAV i Matematického ústavu Univerzity Karlovej ako výskumných centier matematiky. V roku 1952 sa stal akademikom ČSAV. Zomrel po dlhej a vážnej chorobe 15. marca 1960 v Prahe [3, s. 13].

Profesor Čech sa okrem iného venoval aj výchove ďalšej generácie matematikov. Okrem 94 vedeckých prác a 9 odborných kníh vydal aj 7 stredoškolských učebníc a svojou prácou podstatne prispel k modernizácii vyučovania matematiky na stredných školách. Takisto ovplyvnil aj českú matematickú terminológiu.

Okrem iného formuloval aj štyri princípy pre vyučovanie geometrie pre žiakov vo veku 11–15 rokov:

1. Spracovanie učiva má vzbudzovať čo najväčší záujem, aby sa deti na vyučovanie tešili.
2. Vyučovanie má vytvárať čo najviac príležitostí pre vlastnú aktívnu činnosť žiakov.
3. Konkrétne vecné poznatky treba usporiadať tak, aby sa neskôr vo vyučovaní znovu objavili.
4. Žiaci majú aspoň v ukážkach spoznať, že sa pripravujú pre ďalšie štúdium aj pre pochopenie celej matematickej sústavy.

Často zdôrazňoval, že nezáleží na tom, čo sa učí, ale ako sa učí. Tvrdil, že sa nemusí dokazovať všetko, ale sa ani nesmie nedokazovať nič, a takisto, že sa nesmie stratiť fakt, že matematika je systém. Dobrý učiteľ podľa neho vie učiť aj podľa zlej učebnice dobre, dotvára text, premýšľa nad učivom, vie posúdiť detaily i podstatu.

Profesor Eduard Čech uznával, že matematika má nezanedbateľnú vzdelávaciu hodnotu a jej vyučovanie potrebuje aj didaktické podnety. Neraz úprimne radil učiteľom v školách, že treba viesť žiakov tak, aby sa riadili nasledujúcim heslom *Mnoho toho neviem, ale to, čo viem, viem dobre* [3, s. 14].

Literatúra

[1] Dalmédico, A. D.: Sophie Germain. *Spektrum der Wissenschaft. Moderne Mathematik*, č. 4, 1996, s. 8–15.

[2] Dunham, W.: *Mathematik von A–Z.* Birkhäuser, Berlin, 1996.

[3] Jedinák, D.: *Eseje o matematikoch.* Trnava, 2007.

[4] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1978.

[5] Wusing, H.: *6 000 Jahre Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[6] `http://page.mi.fu-berlin.de/froetsch/manosem/Helle/PlusMinus.html`

[7] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Napier_rods.html`

[8] `http://womenshistory.about.com/od/sciencemath1/tp/aatpmathwomen.htm`

[9] `http://www.agnesscott.edu/Lriddle/WOMEN/women.htm`

[10] `http://mathworld.wolfram.com/WitchofAgnesi.html`