Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 3, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146632

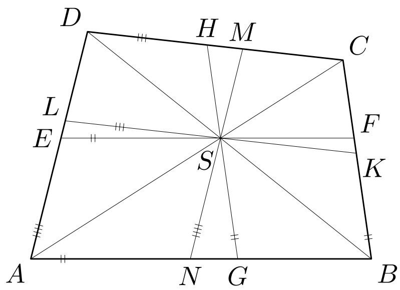
NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2015* na adresu redakce.

Úloha 49. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s nerovnoběžnými protějšími stranami, jehož průsečík úhlopříček je S. Bodem S jsou vedeny rovnoběžky: $EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$, $KL \parallel CD$, $MN \parallel DA$ podle obrázku.



Body N, G leží na straně AB, body K, F na straně BC, body M, H na straně CD a body L, E na straně DA. Dokažte, že

$$\frac{|NG|}{|AB|} = \frac{|KF|}{|BC|} = \frac{|HM|}{|CD|} = \frac{|LE|}{|DA|},$$

právě když platí některá z rovností $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$.

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 50. *Lyžař*

Lyžař sjel po svahu délky l_1 se sklonem α na vodorovný terén a dojel do vzdálenosti l_2 od konce svahu. Součinitel f smykového tření mezi sněhem a kluznou plochou lyží měl během celého pohybu stálou velikost.

a) Určete hodnotu f.

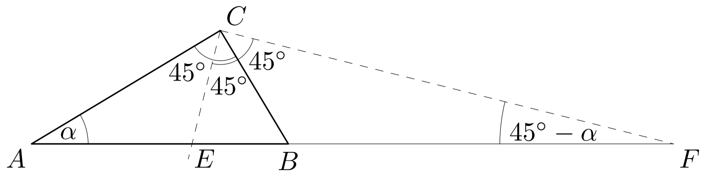
b) Určete velikost rychlosti lyžaře na konci svahu. Odpor vzduchu zanedbejte. Na úpatí svahu se rychlost mění plynule.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l_1 = 50$ m, $l_2 = 100$ m, $\alpha = 30°$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

(*Přemysl Šedivý*)

Řešení úloh z čísla 3/2014

Úloha 43. V nerovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC protne osa vnitřního úhlu při vrcholu C přeponu AB v bodě E a osa vnějšího úhlu u téhož vrcholu protne přímku AB v bodě F.



Jak velké jsou vnitřní úhly trojúhelníku ABC, aby platilo

$$|AE|\cdot|AF| + |BE|\cdot|BF| = |EA|\cdot|EB| + |FA|\cdot|FB|\ ?$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Předpokládejme, že $|AC| > |BC|$. Označme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, který je menší než 45°. Upravujme postupně uvažovanou rovnost:

$$|AE|\cdot|AF| + |BE|\cdot|BF| = |EA|\cdot|EB| + |FA|\cdot|FB|$$

$$|AE|\cdot(|AF| - |EB|) = |BF|\cdot(|FA| - |BE|)$$

$$(|AF| - |EB|)\cdot(|AE| - |BF|) = 0$$

Jelikož je $|AF| \neq |EB|$, musí být jedině $|AE| = |BF|$. Pak je i $|AB| = |EF|$. Tedy nad průměry AB a EF lze sestrojit shodné Thaletovy kružnice, z čehož plyne rovnost $|AC| = |FC|$. Trojúhelník AFC je rovnoramenný s úhlem o velikosti 135° u vrcholu C, proto je $\alpha = 22{,}5°$.

Úloha 44. *Těleso na vlákně*

Těleso o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně délky d.

a) Těleso je v rovnovážné poloze stálé. Jak velkou rychlost $\boldsymbol{v}_0$ ve vodorovném směru mu musíme udělit, aby v nejvyšším bodě kruhové trajektorie tělesa byla výslednice sil působících na těleso nulová?

b) Jakou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ je v tomto případě napínáno vlákno, když těleso prochází rovnovážnou polohou?

Třecí sílu, hmotnost a prodloužení vlákna neuvažujeme. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 0{,}20$ m, $m = 0{,}50$ kg.

(*Josef Jírů*)

Autorské řešení:

a) V nejvyšším bodě trajektorie je tíhová síla $F_\mathrm{G} = mg$ v rovnováze se setrvačnou odstředivou silou $F_\mathrm{o} = m\frac{v^2}{d}$, kde v je velikost obvodové rychlosti v tomto bodě. Z rovnosti $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{o}$ a po dosazení za jednotlivé síly dostaneme

$$mg = m\frac{v^2}{d},$$

z čehož $v = \sqrt{gd}$, tj. těleso v nejvyšším bodě své trajektorie má kinetickou energii

$$E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgd.$$

Po vystoupení do nejvyššího bodu se tíhová potenciální energie zvětší o

$$\Delta E_\mathrm{p} = 2mgd.$$

Udělením rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ ve vodorovném směru získá těleso kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Podle zákona zachování energie je $E_\mathrm{k} = E'_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p}$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgd + 2mgd,$$

z čehož

$$v_0 = \sqrt{5gd} \doteq 3{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

b) Při průchodu rovnovážnou polohou působí na těleso tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ a ve stejném směru setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{o}}$, pro jejíž velikost platí

$$F'_{\mathrm{o}} = m\frac{v_0^2}{d} = 5mg.$$

Tedy celková síla má velikost $F_{\mathrm{t}} = F_{\mathrm{G}} + F'_{\mathrm{o}}$. Po dosazení dostaneme

$$F_{\mathrm{t}} = mg + 5mg = 6mg \doteq 30\ \mathrm{N}.$$

Stav soutěže po 44 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Michal Zelina (GChD Zborovská, Praha 5) – 28 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Matyáš Grof (GChD Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Zuzana Procházková (GChD Zborovská, Praha 5) – 24 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Vladimír Boček (GChD Zborovská, Praha 5) – 19 bodů
Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Daniel Pišťák (GChD Zborovská, Praha 5) – 16 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Daniel Borák (GChD Zborovská, Praha 5) – 11 body
Jiří Braný (GChD Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Oskar Marelja (GChD Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 8 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů

Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Ester Sgallová (GChD Zborovská, Praha 5) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD Zborovská, Praha 5) – 3 body
Stanislav Gackowski (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD Zborovská, Praha 5) – 1 bod

* * * * *

(Dokončení recenze ze str. 61.)

Do strohého, ale velice zajímavého světa faktů a dat vpouští zkušený autor i lidský rozměr: jeho hrdinové nemají plakátové tváře hrdinů a rozhodně nejsou prosti emocí, nálad či ambicí. V životě každého z protagonistů sehrála železnice jinou roli. U někoho na sebe vzala podobu osudového životního partu, jiný ji chápal jako prostředek k dosažení čehosi: jeden vyššího cíle, druhý podnikatelského záměru. Vzniklo tak dílo možná žánrově ne přesně zařaditelné (životopisná díla lze psát různě), které si však (možná právě proto) své čtenáře určitě najde.

Bohumil Tesařík