Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaroslav Zhouf

8. Středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 4, 39–43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146601`

8. Středoevropská matematická olympiáda

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT Praha

Ve dnech 18. až 24. září 2014 se v Drážďanech v Německu, blízko našich hranic, konala 8. středoevropská matematická olympiáda (MEMO). Samotné soutěžní klání probíhalo na Gymnáziu Marie Curie.

V této soutěži se ustálila účast těchto 10 zemí ze středu Evropy: Česká republika, Chorvatsko, Litva, Maďarsko, Německo, Polsko, Rakousko, Slovensko, Slovinsko a Švýcarsko. Každou zemi reprezentovalo šest soutěžících; šlo o soutěžící, kteří se nezúčastnili letošní Mezinárodní matematické olympiády (IMO).

Českou republiku reprezentovali tito žáci: *Libor Drozdek* (G L. Jaroše, Holešov), *Vojtěch Dvořák* (G Gutha-Jarkovského, Truhlářská, Praha 1), *Matěj Konečný* (G Jírovcova, České Budějovice), *Karolína Kuchyňová* (G M. Lercha, Brno), *Marian Poljak* (G J. Škody, Přerov) a *Václav Rozhoň* (G J. V. Jirsíka, České Budějovice). Vedoucími české delegace byli *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci a *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*

Soutěž probíhá ve dvou dnech. První den soutěží jednotlivci a mají za úkol vyřešit čtyři úlohy. Druhý den soutěží proti sobě týmy jednotlivých zemí a mají za úkol vyřešit 8 úloh. Na obě soutěže je vyčleněn čas čtyř hodin. Každá z těchto 12 úloh byla hodnocena nejvýše 8 body.

Výsledky soutěže jednotlivců: 3 zlaté, 11 stříbrných a 18 bronzových medailí. Jednu zlatou medaili obdržel i náš Václav Rozhoň – získal 29 bodů a byl třetí v absolutním pořadí soutěžících. Absolutní počet bodů získali dva soutěžící, jeden z Chorvatska a jeden z Maďarska. Další naši reprezentanti též získali významné ocenění: Marian Poljak, 19 bodů a stříbrná medaile, Vojtěch Dvořák, 18 bodů a stříbrná medaile, Matěj

Konečný, 18 bodů a stříbrná medaile, Karolína Kuchyňová, 17 bodů a čestné uznání za bezchybné vyřešení aspoň jedné úlohy. Libor Drozdek pak získal 7 bodů. Celkově tedy můžeme konstatovat, že šlo o vynikající výkony. V kontextu s uvedenými výsledky se jako málo pochopitelné jeví vystoupení našich soutěžících v týmové soutěži. České družstvo skončilo na 6.–8. místě se ziskem 34 bodů ze 64 možných.

Kromě samotné soutěže se vždy na závěr uskuteční návštěva nějakého zajímavého místa v té příslušné zemi. Tentokrát to byl hrad Albrechtsburg ve městě Meissen (Míšeň), krásná památka v Sasku.

Příští ročník MEMO se bude konat 25.–31. srpna 2015 ve slovinském Koperu.

Uveďme ještě úlohy, které soutěžící řešili.

Soutěž jednotlivců

Příklad I–1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$xf(y) + f\big(xf(y)\big) - xf\big(f(y)\big) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y).$$

(*Litva*)

Příklad I–2

Uvažujme rozdělení pravidelného n-úhelníku na $n-2$ trojúhelníků pomocí $n-3$ jeho úhlopříček, které se neprotínají uvnitř tohoto n-úhelníku. *Dvojbarevnou triangulací* rozumíme takové rozdělení n-úhelníku, v níž je každý trojúhelník obarven černou nebo bílou barvou a každé dva trojúhelníky, které mají společnou stranu, jsou obarveny různými barvami. Přirozené číslo $n \geq 4$ nazveme *triangulární*, právě když tento pravidelný n-úhelník má dvojbarevnou triangulaci takovou, že pro každý jeho vrchol A je počet černých trojúhelníků s vrcholem A větší než počet bílých trojúhelníků se stejným vrcholem A.

(*Chorvatsko*)

Příklad I–3

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$ a I značí střed kružnice jemu vepsané. Nechť E je takový bod strany AC, pro který platí $|AE| = |AB|$. Dále nechť G je takový bod přímky EI, pro který platí $|\sphericalangle IBG| = |\sphericalangle CBA|$, přičemž I je vnitřním bodem úsečky EG. Dokažte, že přímka AI, kolmice k přímce AE sestrojená v bodě E a osa úhlu BGI se protínají v jednom bodě.

(*Chorvatsko*)

Příklad I–4

Pro libovolná celá čísla $n \geq k \geq 0$ definujeme *bibinomický koeficient* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ předpisem

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Určete všechny dvojice (n, k) celých čísel, kde $n \geq k \geq 0$, takové, že odpovídající bibinomický koeficient je celé číslo.

Poznámka. Dvojný faktoriál $n!!$ je definován jako součin všech sudých čísel po n, je-li n sudé, a jako součin všech lichých čísel po n, je-li n liché. Např.

$$4!! = 2 \cdot 4 = 8, \quad 7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

a definujeme $0!! = 1$.

(*Rakousko*)

Soutěž družstev

Příklad T–1

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b+y},$$

kde a, b, x a y jsou kladná reálná čísla splňující nerovnosti

$$\frac{1}{a+x} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+y} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{b+x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{b+y} \geq 1.$$

(*Maďarsko*)

Příklad T–2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují podmínku

$$xf(xy) + xyf(x) \geq f(x^2)f(y) + x^2y.$$

(*Česká republika, Pavel Calábek*)

Příklad T–3

Nechť K a L jsou daná přirozená čísla. Na pravoúhelníkové desce složené z $2K \times 2L$ jednotkových čtverců se pohybuje mravenec z levého dolního rohu do pravého horního rohu. V každém kroku se přesune vodorovně nebo svisle na sousední pole, přičemž na žádné pole nevstoupí více než jedenkrát. Na některá pole desky mravenec nemusí vstoupit. V určitých případech tvoří všechna nenavštívená pole jediný pravoúhelník, který nazveme MEMO-*pravoúhelník*.

Určete počet všech různých MEMO-pravoúhelníků.

Poznámka. Pravoúhelníky jsou různé, pokud nejsou tvořeny týmiž jednotkovými čtverci.

(*Rakousko*)

Příklad T–4

Ve Šťastném Městě žije 2014 obyvatel, označených $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$. Každý z nich je v každém okamžiku buď *šťastný*, nebo *nešťastný*. Nálada každého obyvatele A se mění (z nešťastného na šťastného a naopak), právě když se jiný šťastný obyvatel usměje na A. V pondělí ráno bylo ve Šťastném Městě N šťastných obyvatel. Poté se v pondělí obyvatel A_1 usmál na A_2, dále se A_2 usmál na A_3 atd., až nakonec se A_{2013} usmál na A_{2014}. Nikdo z nich se neusmál na žádného jiného kromě uvedeného obyvatele. Přesně totéž se opakovalo v úterý, ve středu a ve čtvrtek. Ve čtvrtek večer tak bylo ve městě právě 2000 šťastných obyvatel.

Určete největší možnou hodnotu N.

(*Litva*)

Příklad T–5

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Osa AI vnitřního úhlu při vrcholu A protíná přímky DE a DF po řadě v bodech X a Y. Nechť Z značí patu výšky z vrcholu A.

Dokažte, že D je středem kružnice vepsané trojúhelníku XYZ.

(*Slovinsko*)

Příklad T–6

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany BC v bodě D. Přímka AD protíná kružnici k v bodě $L \neq D$. Označme K střed kružnice vně připsané straně BC. Nechť M a N jsou po řadě středy úseček BC a KM. Dokažte, že body B, C, N a L leží na téže kružnici.

(*Slovensko*)

Příklad T–7

Konečnou množinu A přirozených čísel nazveme *průměrovou*, právě když pro každou její neprázdnou podmnožinu je aritmetický průměr jejích prvků také přirozené číslo. Jinak řečeno, množina A je průměrová, právě když $\frac{1}{k}(a_1 + \ldots + a_k)$ je přirozené číslo pro každé $k \geq 1$ a $a_1, \ldots, a_k \in A$ jsou navzájem různá čísla.

Je dáno přirozené číslo n. Určete nejmenší možný součet prvků n-prvkové průměrové množiny.

(*Rakousko*)

Příklad T–8

Určete všechny uspořádané čtveřice (x, y, z, t) přirozených čísel, které vyhovují rovnici

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

(*Litva*)

Obr. 1 Družstvo České republiky

Podrobnější informace o 8. Středoevropské matematické olympiádě mohou zájemci nalézt na jejích oficiálních stránkách `www.memo2014.de`.