Elemír Scholtz; Martin Scholtz

Speciální teorie relativity a prostoročas (3. část)

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 4, 16–26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146596

FYZIKA

Speciální teorie relativity a prostoročas (3. část)

Elemír Scholtz, důchodce, Martin Scholtz, MFF UK Praha

Abstract. The theory of relativity represents one of the pillars of modern theoretical physics. As the theory of relativity deals with the properties of space and time, it represents the framework for any other theory, especially the quantum mechanics. In the series of articles, we explain the role of the theory of relativity in theoretical physics. The postulates of classical physics are mentioned for didactical purposes, and Einstein's postulates of the special theory of relativity are introduced. Then, we examine the consequences of the postulates and we translate them into the geometrical language of Minkowski spacetime. It is demonstrated how geometry can help us to understand the relativistic effects (time dilatation) and causal relations between events. Finally, we present the geometrical explanation of the twin paradox. In the following parts of the series, we focus on the general theory of relativity and the relationship between special relativity and quantum mechanics.

Kauzální struktura prostoročasu

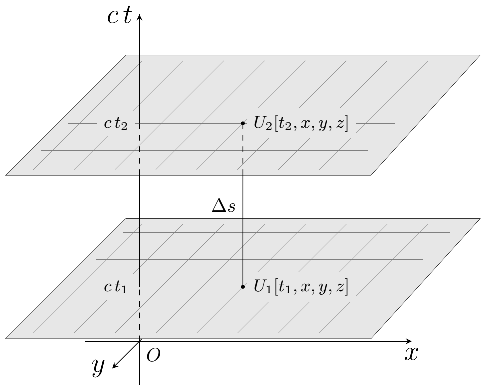
V klasické fyzice jsou časové i prostorové intervaly invariantní. Proto konstatování o současnosti nebo soumístnosti dvou daných událostí má absolutní platnost, nezávislou na vztažné soustavě. Ve speciální teorii relativity (STR) se ukazuje, že časové i prostorové intervaly obecně na volbě vztažné soustavy závisejí. Pokud jsou dvě události vzhledem k některé vztažné soustavě soumístné a současné, jeví se tak ve všech vztažných soustavách, což je fakt, mající z hlediska STR absolutní platnost.

Předpokládejme tedy dvě události, které jsou v soustavě S nesoumístné a nesoučasné, což znamená, že jejich časový i prostorový interval jsou nenulové. Vzhledem k relativnosti těchto intervalů je zajímavé najít odpověď na otázku: *Mohou reálně existovat vztažné soustavy, ve kterých by se tyto dvě události jevily jako současné, nebo by jejich časové pořadí bylo obrácené?* Pokud by totiž bylo možné změnou vztažné soustavy docílit obrácení pořadí libovolných dvou událostí, dostali bychom se do rozporu s obvyklými kauzálními vztahy. Představme si, že by událostí U_1 byl výstřel z pušky a událostí U_2 zásah zajíce. Je zřejmé, že událost U_2 je důsledkem události U_1, která ji předcházela. Pokud by existovala soustava, v níž by došlo k obrácení časového pořadí těchto událostí, znamenalo by to, že důsledek předchází svou příčinu; hovoříme o *porušení kauzality.*

Na první pohled není zřejmé, jak lze v rámci STR takové otázky zodpovědět. Ukazuje se, že odpověď není univerzální, ale závisí na tom, zda mezi uvedenými událostmi může být příčinná souvislost. Pokud událost U_1 může mít, alespoň v principu, nějaký vliv na vznik události U_2, nemohou se tyto události jevit jako současné ani v obráceném časovém pořadí vzhledem k *žádné* vztažné soustavě. Naopak, pokud mezi událostmi není žádná příčinná souvislost, jejich pořadí závisí na volbě vztažné soustavy – v některé se mohou jevit jako současné nebo probíhat v jiném pořadí. Možné kauzální vztahy mezi událostmi nabývají obzvlášť jasné podoby v jazyku prostoročasu, světelných kuželů a světočar.

Uvažujme bodovou částici, jejíž poloha se v dané souřadnicové soustavě s časem mění, takže její souřadnice jsou funkcemi času. Pod *trajektorií* částice rozumíme množinu všech bodů prostoru, jimiž studovaná částice prošla. Změna prostorové polohy částice v závislosti na čase je v prostoročase reprezentována množinou bodů – událostí, vytvářejících *světočáru.* Má-li částice v čase t souřadnice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, její poloha v prostoročase je dána uspořádanou čtveřicí souřadnic $[t, x(t), y(t), z(t)]$. Ponecháme čtenáři, aby se přesvědčil, že světočára částice, která se pohybuje rovnoměrně po kružnici (například v rovině xy), je šroubovice s konstantním stoupáním.

Předpokládejme nyní, že částice se ve zvolené vztažné soustavě nachází v klidu, takže její světočára je svislá a rovnoběžná s časovou přímkou t uvažované vztažné soustavy, podobně jako úsečka U_1U_2 na obr. 1.



Obr. 1 Prostoročasový interval nesoučasných a soumístných událostí U_1 a U_2

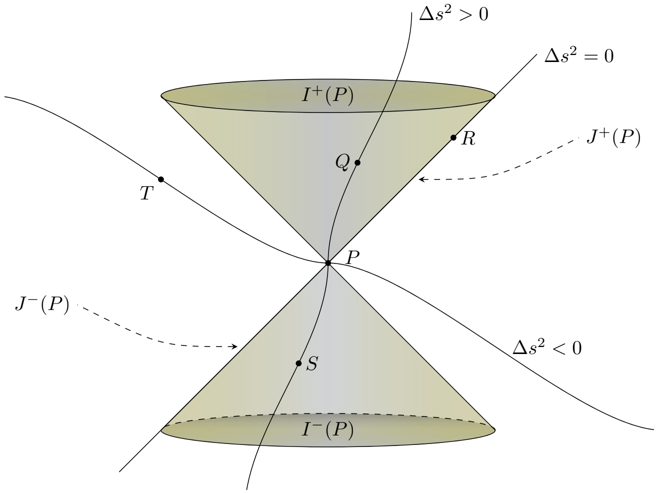
Už víme, že prostoročasový interval má význam „délky“ ve smyslu prostoročasové metriky, takže prostoročasový interval událostí U_1 a U_2 ležících na světočáře uvažované částice představuje délka úsečky U_1U_2. Protože poloha částice je v uvažované soustavě neměnná, prostorová vzdálenost mezi událostmi U_1 a U_2 je $\Delta r = 0$, takže prostoročasový interval nabývá tvaru $\Delta s = c^2\Delta t^2$. Ovšem Δt je čas, který mezi událostmi U_1 a U_2 uplynul na hodinách, které jsou vůči částici v klidu a měří *vlastní čas* této částice. Světočára je tedy křivka opisující pohyb studovaného objektu (částice) v prostoru a čase. Její délka je dána prostoročasovým intervalem, současně ale představuje (až na faktor c^2) vlastní čas uvažované částice. Pokud se částice pohybuje rovnoměrně přímočaře, její světočára je přímka. Čím rychleji se částice pohybuje, tím víc se úhel mezi přímkou času a světočárou blíží 45°. Pohybuje-li se částice rychlostí světla, její světočára svírá s osou ct úhel přesně 45°. Podle teorie relativity se žádná částice nemůže pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla, proto přímky, které by s osou t svíraly úhel větší než 45°, neodpovídají pohybu žádného reálného objektu. Mezní rychlostí c se pohybují pouze částice s nulovou hmotností, podílející se na interakci elektromagnetické (fotony), silné (gluony) a gravitační (hypotetické gravitony). Světočáry těchto částic jsou v Minkowského prostoročase vždy přímky, které v libovolné souřadnicové soustavě svírají s časovou osou úhel 45°.

Uvažujme nyní bodový zdroj světla, z něhož je v určitém okamžiku vyslán světelný signál – událost P – šířící se všemi prostorovými směry. Světočáry, odpovídající šíření tohoto signálu, tvoří v prostoročase plášť tzv. *světelného kužele*, obr. 2.

Protože prostoročasový interval libovolných dvou událostí spojených světelným signálem je nulový, světočáry tvořící plášť světelného kužele mají ve smyslu prostoročasové metriky nulovou délku. To je důležitý rozdíl oproti euklidovské geometrii, v níž mají nulovou délku pouze úsečky tvořené jediným bodem. Z tohoto důvodu světočáry tečné ke světelnému kuželi nazýváme *světlupodobné* nebo *nulové*.

Světočáry odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu částic jsou přímky. Při obecném pohybu částic to mohou být libovolné křivky, musejí ovšem ležet uvnitř světelného kužele. Světočáry, pro které je $\Delta s^2 > 0$, nazýváme *časupodobné* a jsou znázorněny na obr. 2.

Obraťme teď pozornost ke křivkám ležícím vně světelného kužele, ale procházejícím zvoleným bodem P. Prostoročasový interval libovolné dvojice bodů na takových křivkách je záporný, $\Delta s^2 < 0$. Jak jsme uvedli, tyto křivky nepředstavují světočáry reálných částic, přesto je důležité se jimi zabývat. V minulé části jsme vysvětlili, že třírozměrný prostor v daném čase t je reprezentovaný nadplochou kolmou na časovou osu (obr. 2–4 v minulé části). Všechny křivky ležící v této prostorové nadploše leží mimo světelný kužel. Proto obecně křivky, podél nichž je $\Delta s^2 < 0$, nazýváme *prostorupodobné*. V obr. 2 nejsou souřadnicové osy zakresleny. Důvodem je, že v prostoročase nejsou události závislé na zvolené soustavě souřadnic.



Obr. 2 Světelný kužel s vrcholem v uvažované události P

Prostoročasové diagramy kreslíme tak, že čas v nich plyne směrem vzhůru. Body, které tvoří horní polovinu světelného kužele, s výjimkou jeho pláště, tvoří oblast, kterou nazýváme *chronologická budoucnost* události P a označujeme ji symbolem $I^+(P)$, analogicky dolní kužel s výjimkou jeho pláště nazýváme *chronologická minulost* $I^-(P)$ události P. Chronologickou budoucnost události P tvoří právě ty události, které je možno z bodu P dosáhnout po časupodobné křivce. Kupříkladu, událost Q patří do chronologické budoucnosti události P, píšeme $Q \in I^+(P)$, pokud existuje časupodobná čára vycházející z bodu P a procházející bodem Q. Používá se též označení $P \ll Q$, když událost P chronologicky předchází událost Q. Horní polovinu světelného kužele, tedy jeho vnitřek spolu s pláštěm, nazýváme *kauzální budoucnost* události P a označujeme ji symbolem $J^+(P)$. Jsou to události, které je možné dosáhnout časupodobnou *nebo* světlupodobnou křivkou. Například událost R znázorněna na obr. 2 nepatří do chronologické budoucnosti bodu P, ale patří do jeho kauzální budoucnosti, což zapisujeme vztahem $P \prec R$ a čteme „událost P kauzálně předchází událost R“. Na druhé straně, o události Q můžeme říct, že patří jak do chronologické, tak do kauzální budoucnosti události P. Analogické úvahy se vztahují na *chronologickou minulost* $I^-(P)$ a *kauzální minulost* $J^-(P)$ události P. Můžeme vidět, že pro událost S znázorněnou na obr. 2 platí $S \prec P$, $S \ll P$.

Kauzální budoucnost $J^+(P)$ události P je tedy množina všech těch událostí, které je možné dosáhnout po časupodobné nebo světlupodobné křivce z bodu P. Události ležící mimo světelný kužel (což je vlastně oblast $J^+(P) \cup J^-(P)$) nejsou dosažitelné žádnou světočárou, například událost T znázorněná na obr. 2. To tedy znamená, že žádný fyzikální objekt, který se „ocitl“ v události P, se nemůže ocitnout v události T, neboť jeho světočára by musela ležet mimo světelný kužel události P, a tudíž by se musel pohybovat nadsvětelnou rychlostí. Protože žádný objekt ani signál nemůže projít z místa události P na místo události T, nemůže mít událost P na událost T jakýkoli vliv. Skutečnost, že událost T nepatří do kauzální budoucnosti události P, zapisujeme pomocí obvyklé množinové symboliky vztahem $T \notin J^+(P)$.

Nyní se můžeme vrátit k zodpovězení otázek položených v úvodu této třetí části. Závěry z dosud provedených úvah vyjádříme ve tvaru dvou matematických vět.

Věta 1 *Nechť P a Q jsou dvě různé události takové, že platí $P \ll Q$. Potom neexistuje žádná vztažná soustava, ve které by se tyto události jevily jako současné.*

Důkaz (sporem): Podle předpokladu $P \ll Q$ se událost Q nachází v chronologické budoucnosti události P. Tyto události jsou odděleny časupodobnou světočárou, takže jejich prostoročasový interval je kladný, $\Delta s^2 > 0$. Nechť existuje soustava S', ve které jsou události P a Q současné. Jejich časový interval je $\Delta t' = 0$, proto $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t'^2 - \Delta r'^2 < 0$. To ovšem odporuje předpokladu, že $\Delta s^2 > 0$, proto soustava, ve které by obě události byly současné, neexistuje.

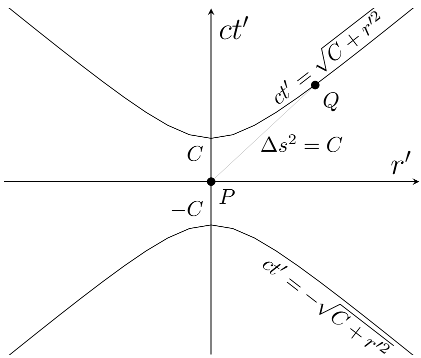
V důkazu následující věty použijeme vlastnost zvanou *spojitost*, o které jsme v tomto článku nediskutovali, ale jejíž smysl je intuitivně srozumitelný. Např. grafem spojité funkce je souvislá, nepřerušovaná čára. Spojité mohou být i různé transformace. Pro názornost uvažujme rotaci. Úhel φ, o který můžeme daný objekt otočit, je spojitá veličina, nabývající všech hodnot od 0 do 2π. Přitom každou rotaci můžeme složit z velkého počtu rotací o velmi malý úhel. Analogií rotace je v STR transformace z jedné souřadnicové soustavy do druhé, kde parametrem není úhel, ale relativní rychlost v vztažných soustav. Protože v je spojitá veličina, jsou spojité i souřadnicové transformace. Naopak středová souměrnost, známá z geometrie, spojitá není. Tato transformace, pro jednoduchost v rovině, zobrazí bod o souřadnicích $[x, y]$ na bod o souřadnicích $[-x, -y]$; není možné ji složit z většího počtu menších kroků, proto hovoříme o nespojité (diskrétní) transformaci.

Věta 2 *Nechť pro dvě různé události P a Q platí $P \ll Q$. Potom se v každé souřadnicové soustavě událost P odehrála dřív než událost Q.*

Důkaz: Pro jednoduchost (ale bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že ve zvolené soustavě souřadnic má událost P souřadnice $P[0, 0, 0, 0]$ a událost Q souřadnice $Q[t, x, y, z]$. Přitom podle předpokladu $P \ll Q$ platí $s^2 = c^2t^2 - r^2 = C > 0$. Vzhledem k invariantnosti prostoročasového intervalu v libovolné jiné vztažné soustavě musí platit $c^2t'^2 - r'^2 = C$. To je rovnice hyperboly v rovině $t'r'$, která má dvě souvislé větve dané vztahem

$$ct' = \pm\sqrt{C + r'^2}.$$

Tyto větve jsou znázorněny na obr. 3.



Obr. 3 K důkazu věty 2

Jinými slovy, ačkoli nevíme, jakým konkrétním vztahem jsou spojeny čárkované a nečárkované souřadnice, víme, že prostoročasový interval je invariantní, a proto událost Q v čárkovaných souřadnicích leží na jedné z větví hyperboly na obr. 3.

Nyní uplatníme poznatek o spojitosti transformace.

Pokud bude vzájemná rychlost soustav v nulová, obě soustavy budou totožné a událost Q v obou soustavách následuje po události P. To znamená, že bod Q leží na horním ramenu hyperboly. Z podmínky spojitosti plyne, že pro spojité zvětšování relativní rychlosti vztažných soustav se spojitě mění i souřadnice události Q. Bod Q tak nemůže změnit svou polohu skokem z horního ramena hyperboly na dolní. Vidíme tedy, že spojitou transformací nelze docílit, aby v nějaké souřadnicové soustavě událost Q předcházela událost P a pořadí těchto událostí nezávisí na volbě vztažné soustavy. Na obr. 3 vidíme, že všechny události na hyperbole jsou od události P odděleny prostoročasovým intervalem $\Delta s = C$.

Pokud bod Q leží v chronologické budoucnosti bodu P, není možné nalézt vztažnou soustavu, ve které by se pořadí těchto událostí změnilo nebo by se jevily jako současné. Pokud ale neplatí $P \ll Q$ ani $P \prec Q$, události P a Q nemohou mít ani v principu žádnou příčinnou souvislost a jejich pořadí je relativní.

Podobným způsobem lze rigorózně dokázat celou řadu tvrzení o světočarách a kauzálních vztazích. V Minkowského prostoročase je lokální kauzální struktura definovaná světelným kuželem shodná s globální kauzální strukturou. V obecné teorii relativity je však prostoročas zakřivený a ačkoli jeho lokální kauzální struktura je shodná se strukturou Minkowského, globální struktura závisí od konkrétních geometrických vlastností.

Matematické disciplíny, jež se těmito otázkami zabývají, se nazývají diferenciální a globální topologie a do teorie relativity je zavedl Roger Penrose. Spolu se Stephenem Hawkingem pak dokázali důležitá a fundamentální tvrzení o černých dírách a vývoji vesmíru, které jsou známy pod názvem *teorémy o singularitách* [2, 4].

Paradox dvojčat

Relativistické jevy jako dilatace času či kontrakce délky jsou v rozporu s naší běžnou zkušeností, neboť se výrazně projeví pouze při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla ($v > 0{,}3c$). Proto jsou mnohé výsledky teorie relativity neintuitivní a vodítkem při vyvozování různých závěrů musí být pouze důsledná aplikace Einsteinových postulátů na studovaný problém.

Zejména laikové se ve svých úvahách dopouštějí chyb, když nevhodně aplikují některé výsledky STR na různé praktické situace. Dospívají tak k mylným závěrům a logickým rozporům, ze kterých usuzují na chybnost samotné teorie. Příkladem může být aplikace vztahu pro dilataci času v případech, kdy je nutná úplná Lorentzova transformace. Existují i myšlenkové experimenty, které k logickým rozporům vedou pouze zdánlivě. Tyto myšlenkové experimenty, *paradoxy*, odhalují omezenost naší běžné zkušenosti. Poukazují tím na klíčové aspekty teorie, bez jejichž důkladného pochopení je porozumění teorii relativity neúplné.

V této závěrečné části se zaměříme na klasický, často citovaný *paradox dvojčat*. Dilatace času se projevuje tak, že pro pozorovatele v soustavě S plyne čas v pohybující se soustavě S' pomaleji. V STR jsou všechny inerciální vztažné soustavy rovnocenné a z hlediska soustavy S' plyne čas pomaleji v soustavě S. Situace je zcela symetrická a otázka, ve které soustavě plyne čas pomaleji, má smysl teprve ve vztahu ke zvolené klidové soustavě; čas je relativní.

K paradoxu pak vede následující úvaha: Mějme dvě identická (stejně stará) dvojčata. Dvojče A zůstane na Zemi (předpokládejme, že Země je inerciální soustava), zatímco druhé dvojče B se vydá raketou na dlouhotrvající cestu vysokou rychlostí. Když se B vrátí na Zemi, je mladší než A[1)]. Kdyby zde platila už uvedená symetrie, k analogickému závěru by dospělo dvojče B, které by po setkání se vzdalujícím se a navrátivším se dvojčetem A mělo být starší. Srovnání hodin a biologického stáří však ukáže, že mladší bude dvojče B. Jak to správně řeší teorie relativity?

Standardní vysvětlení tohoto paradoxu spočívá v zohlednění toho, že soustavy dvojčat A a B nejsou rovnocenné. Princip relativity platí pouze pro inerciální vztažné soustavy. Soustava dvojčete B však nebyla po celé jeho trajektorii inerciální. Pro dosažení potřebné cestovní rychlosti raketa po startu zrychlovala, pak letěla libovolnou dobu stálou rychlostí (byla inerciální soustavou). Aby se raketa mohla vrátit na Zem, musela pro dosažení rychlosti opačného směru, jakož i pro přistání na Zemi absolvovat potřebná zrychlení. V průběhu těchto navigačních manévrů soustava spojená s raketou nebyla inerciální. Zohlednění zrychlení nemůžeme vyloučit ani v případě, že čas zrychleného pohybu rakety bude v porovnání s časem jejího rovnoměrného pohybu zanedbatelný. To, co nelze vyloučit, je zrychlení v důsledku změny směru rychlosti rakety na opačný. Vracející se raketa je tudíž jinou vztažnou soustavou.

1) Experiment pro ověření tohoto jevu byl skutečně proveden. Čas byl měřen přesnými atomovými hodinami v letadle, které dostatečně dlouho obíhalo kolem Země.

Rozšířený omyl je, že STR popisuje pouze rovnoměrný přímočarý pohyb a k úplnému vysvětlení paradoxu dvojčat ji nelze použít. Pravdou je, že i v rámci této teorie lze korektně popisovat zrychlené pohyby, pouze si musíme uvědomit, že souřadnice inerciální a neinerciální soustavy nejsou vázány Lorentzovou transformací. Podrobný výpočet ukazuje, že dvojče B bude skutečně mladší, ale jeho detaily závisejí na údajích o tom, jak přesně raketa zrychlovala a zpomalovala.

Paradox dvojčat však lze mnohem elegantněji vysvětlit i bez podrobného výpočtu geometricky v prostoročase. Jak jsme již uvedli, prostoročasový interval interpretujeme jako délku světočáry, která je pro rovnoměrně přímočaře se pohybující objekt přímkou, obecně však může mít při zrychleném pohybu libovolný tvar. Jedinou podmínkou je, aby světočára odpovídající pohybu objektu ležela uvnitř světelného kužele. Ukázali jsme též, že délka světočáry objektu má význam jeho vlastního času. Pokud se tedy objekt pohybuje libovolným způsobem, délka jeho světočáry z bodu P do Q představuje čas, který zatím na hodinách spojených s objektem uplynul.

V euklidovské geometrii definujeme úsečku AB jako nejkratší spojnici bodů A a B. Tyto body lze spojit nekonečně mnoha různými křivkami, ale úsečka AB je z nich nejkratší. Existuje nějaká spojnice dvou bodů, jejíž délka je maximální? Nikoli, ke každé křivce začínající v bodě A a končící v bodě B lze sestrojit nějakou jinou, delší. V euklidovské geometrii tedy žádná nejdelší spojnice dvou bodů neexistuje. V prostoročasové geometrii je ovšem vzdálenost dána velikostí prostoročasového intervalu dvou událostí. Podobně, jako mají některé funkce své extrémy (maxima a minima), lze pomocí variačního počtu ukázat, že též délky různých spojnic dvou bodů v Minkowského prostoru jsou *extremální*. Snadno se přesvědčíme, že v případě Minkowského prostoročasu se nemůže jednat o nejkratší spojnice.

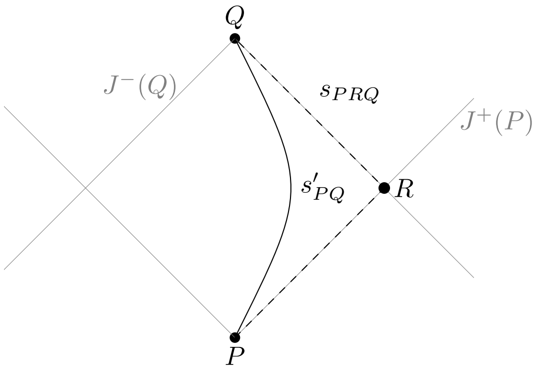
Uvažujme dvě soumístné události $P \ll Q$ (obr. 4). Přímá spojnice PQ těchto událostí je časupodobná křivka, jejíž délka je

$$s_{PQ} = c^2 \Delta t^2,$$

kde Δt je časový interval mezi uvažovanými dvěma událostmi ve zvolené souřadnicové soustavě. Nyní uvažujme budoucí světelný kužel události P, tedy oblast $J^+(P)$, a minulý světelný kužel události Q, tedy oblast $J^-(Q)$. Pláště těchto dvou kuželů se protínají v bodě R. Události P a Q tedy můžeme spojit i lomenou čárou PRQ složenou ze dvou světlupodobných úseček. Podél světelného kužele je prostoročasový interval nulový, takže délka křivky PRQ je

$$s_{PRQ} = 0.$$

Vidíme, že každé dvě soumístné události P a Q lze spojit jak časupodobnou úsečkou délky $s_{PQ} = c^2\Delta t^2$, tak světlupodobnou křivkou délky $s_{PRQ} = 0$.



Obr. 4 K extremálnosti úseček

Uvedli jsme, že přímá spojnice dvou bodů je vždy extremální (tedy má největší nebo nejmenší možnou délku). Zároveň jsme ukázali, že k dané přímé spojnici PQ s kladnou délkou lze sestrojit i křivku, jejíž délka je nulová. Z toho plyne, že časupodobné úsečky v Minkowského prostoročase neodpovídají nejkratší, nýbrž nejdelší spojnici dvou bodů. Jinými slovy, časupodobná úsečka spojující dva body P a Q časoprostoru je vždy delší než jakákoli křivka spojující tytéž body. Je to důležitý rozdíl mezi geometrií prostoročasu a euklidovskou geometrií.

Ukázali jsme, že prostoročasový interval neboli délka světočáry je rovna vlastnímu času, který uplyne na hodinách pohybujících se podél dané světočáry. Skutečnost, že úsečka je nejdelší spojnicí dvou bodů lze tedy interpretovat i tak, že v inerciální soustavě (jejíž světočáry jsou přímky) uplyne mezi událostmi P a Q vždy větší čas, než v jakékoliv jiné (nutně neinerciální) soustavě.

Dospěli jsme teď k názornému geometrickému vysvětlení paradoxu dvojčat. Nechť událost P představuje okamžik, kdy se dvojčata A a B rozdělí. Dvojče A zůstává v inerciální soustavě, a proto je jeho světočára přímka, zatímco dvojče B se až do svého návratu pohybuje libovolným způsobem. Událost jeho návratu na Zemi je zobrazena bodem Q, v němž se světočáry obou dvojčat protnou. Jelikož maximum vlastního času odpovídá přímé světočáře, bude v čase události Q dvojče A starší. Přesný rozdíl ve věku bude záviset na konkrétním pohybu dvojčete B, tedy na délce jeho světočáry. Vidíme, že má-li se dvojče B vrátit a znovu setkat s A, světočára dvojčete B je odlišná od přímky, a tedy nutně kratší, než světočára dvojčete A. Toto je správné a elegantní vysvětlení paradoxu dvojčat.

Nutno podotknout, že existuje celá řada paradoxů a ne všechny jsou takto jednoduše vysvětlitelné. Zvídavé čtenáře odkazujeme na kruhový paradox dvojčat (circular twin paradox) nebo na paradox Ehrenfestův. Avšak překlad fyzikálního problému do geometrického, prostoročasového jazyka je většinou nejspolehlivějším vodítkem v složitých situacích. Všechny relace a vztahy vyjádřené v tomto jazyku jsou absolutní, na souřadnicích nezávislé. Proto nelze ani nejdůvtipnějším paradoxem dokázat logickou nekonzistenci teorie relativity.

Literatura

[1] Bartuška, K.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity.* SPN, Praha, 1991.

[2] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R.: *The large scale structure of spacetime.* Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[3] Horský, J.: *Úvod do teorie relativity.* SNTL, Praha, 1975.

[4] Penrose, R.: *Techniques of differential topology in relativity.* Society for industrial and applied mathematics, 1987.

[5] Scholtz, E.: Časopriestorové intervaly v špeciálnej teórii relativity. *Matematika a fyzika ve škole* **5**, č. 20, (1990).

[6] Scholtz, E.: *Fyzikálne zákony z hľadiska špeciálnej teórie relativity – dynamika.* Metodické centrum, Prešov, 1995.

[7] Scholtz, E.: *Geometrická interpretácia základov špeciálnej teórie relativity vo vyučovaní fyziky na gymnáziu.* SPN, Bratislava, 1989.

[8] Scholtz, M.: Periodická řešení Einsteinových rovnic. *Československý časopis pro fyziku* **3** (2002).

[9] Scholtz, M.: *Helical symmetry, spinors and periodic solutions of Einstein's equations.* Lambert Academic Publishing, 2012.

[10] Votruba, V.: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha, 1977.