Vladimír Strečko

Fragmenty z matematiky stredoveku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 2, 18–30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146574

Fragmenty z matematiky stredoveku

Vladimír Strečko, FHPV PU Prešov

Abstract. The article presents fragments of mathematics in Middle Ages.

Počas stredoveku dochádza k miernej stagnácii vo vývine matematiky. Ťažisko pokroku sa presúva z Európy na Stredný východ a do Číny, aby sa tam koncom tohto obdobia vrátilo. Okrem pár fragmentov z Európy je práve matematika z týchto oblastí obsahom príspevku.

Alcuin z Yorku – matematik karolínskej renesancie

V druhej polovici 8. storočia vládol Franskej ríši kráľ a neskôr cisár Karol Veľký (obdobie vlády 768–814). Uvedomil si, že pre vedenie silného a centralizovaného štátu je užitočná vyššia kultúrna úroveň duchovenstva a členov štátnej správy. Pre ich vzdelávanie bol v roku 781 pozvaný anglický mních Alcuin (asi 732–804, známy aj ako Alh-win, čo znamená priateľ chrámu), bývalý predstavený katedrálnej školy v Yorku s výbornou reputáciou, čo sa týka poznania slobodných umení. (Tzv. slobodné umenia alebo artes liberales tvorili základ stredovekej vzdelanosti. Pozostávali z troch slovných odborov alebo trivia – gramatiky, rétoriky, dialektiky a štyroch číselných odborov alebo quadrivia – aritmetiky, geometrie, astronómie a hudby.)

Alcuin sa teda pokúšal šíriť vzdelanie medzi slabo vzdelanou šľachtou. Na jeho naliehanie bolo na území Francúzska a Nemecka založených mnoho základných škôl. Sám pôsobil na dvorskej škole v Aachene a stal sa dokonca poradcom Karla Veľkého pre teologické, astronomické, kalendárne a aj politické otázky. V roku 796 sa stal opátom Kláštora sv. Martina v Tours, ktorý viedol až do smrti 19. mája 804 [4, s. 269].

Alcuin po sebe zanechal mnoho spisov z oblasti trívia a astronómie. Pre popularizáciu matematiky Alcuin zostavoval zábavné úlohy a hádanky a niektorým z nich dával aj nábožensko-mystickú podobu. Jeho meno sa často spája s dielom *Propositiones ad acuendos iuvenes* (*Úlohy pre bystrenie mladých mužov*), avšak jeho autorstvo nie je isto potvrdené, pretože je známy len odpis z konca 9. storočia. Jedno je však isté, bola to najstaršia zbierka úloh z matematiky napísaná v latinskom jazyku. (Pozn. red.: Český čtenář nalezne překlad Alkuinovy sbírky *Úlohy k bystření mladíků* v knize Karla Mačáka *Tři středověké sbírky matematických úloh*, která je k dispozici i v elektronické podobě v rámci Czech Digital Mathematics Library na adrese `www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/401217`.)

Zbierka úloh Propositiones obsahuje 53 úloh s výsledkami, avšak len zriedkavo obsahuje postupy k týmto výsledkom. Obsah zbierky má široký záber, v type úloh aj v pôvode. Sú to lineárne rovnice, ktoré už riešili starí Egypťania, vtedy rozšírené úlohy na kopanie studní, staré čínske úlohy, zmiešané úlohy, úlohy na postupnosti a úlohy o vínnych pivniciach. K zložitejším patria tie príklady, ktoré sa počítajú pomocou sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi [4, s. 270].

Uveďme si teraz pár príkladov z tejto zbierky. Nasledujúca úloha o slimákovi bola v Propositiones uvedená na prvom mieste:

Jeden slimák bol jednou lastovičkou od svojho jedla odnesený do vzdialenosti jednej míle (leuva) ďaleko. Slimák nemôže sa viac vrátiť, ako jednu uncu ($= 1/12$*) jednej stopy za deň. Povedz, kto môžeš, za koľko dní sa slimák ku svojmu jedlu dostane?*

Riešenie sa môže vypočítať až po udaní vzťahov medzi mierami: 1 leuva = 7 500 stôp, alebo 90 000 uncí. To znamená, že slimák sa dostane k jedlu za 246 rokov a 210 dní.

Jeden z ďalších príkladov znel takto [4, s. 271]:

O peňaženke, ktorú našiel jeden muž

Jeden muž našiel na ceste peňaženku s 2 talentami (talent – zlatá alebo strieborná minca). *To videli iní a povedali: Bratu, daj nám každému časť zo svojho nálezu. Ale on odmietol a nechcel im nič dať. Tu sa naňho ostatní vrhli, vytrhli mu peňaženku a každý si vzal 50 soldo* (soldo – drobná talianska minca). *Keď muž videl, že nemôže odporovať, súhlasil a vzal si tiež 50 soldo. Povedz, kto môžeš, koľko mužov tam bolo?*

Príklad sa opäť môže vyriešiť až po udaní vzťahov medzi mierami: talent mal 75 funtov a jeden funt mal 72 soldo. Z toho sa jednoducho vypočíta, že mužov bolo dokopy 216.

Takýchto čisto aritmetických úloh je v zbierke viac. Ďalšia je o zajacovi a psovi:

Po koľkých skokoch dobehne pes zajaca, ktorý má náskok 150 stôp a zakaždým skočí 7 stôp, zatiaľ čo pes zakaždým skočí 9 stôp.

Príklad sa vypočíta jednoduchou rovnicou – pes dobehne zajaca po 75 skokoch.

Iný príklad znie:

100 mužov, žien a detí si delilo 100 scheffelov (scheffel – stará nemecká miera pre objem obilnín; merica obilia) *tak, že muž dostáva 3 scheffely, žena 2 a každé dve deti dohromady jeden. Koľko bolo mužov, koľko žien a koľko detí?*

Autor textu udával iba jednu odpoveď, a to, že mužov bolo 11, žien 15 a detí 74, pričom možných riešení bolo celkovo až sedem a počet žien mohol nadobúdať hodnoty 0, 5, 10, 15, 20, 25 a 30.

Zbierka obsahovala aj zložitejšie príklady, ktoré sa dali využiť aj v reálnom živote a vyžadovali nielen matematické schopnosti, ale aj obchodnícku obratnosť:

Dvaja muži kúpili za 100 soldo stádo prasiat, a to každých 5 prasiat za 2 soldo. Potom stádo rozdelili a začali predávať znovu 5 prasiat za 2 soldo, a pritom dobre zarobili. Ako je to možné?

Riešenie vyžaduje určitý cit pre podnikanie. Stádo malo dohromady 250 prasiat a muži ho rozdelili na dve skupiny po 125 prasiat, pričom v prvej boli tučnejšie prasatá a v druhej chudšie. Prvý muž predal z tučnejšieho stáda 120 prasiat, 2 prasatá za 1 soldo a druhý tiež 120 prasiat z chudšieho stáda, 3 prasatá za 1 soldo, tzn. že predávali 5 prasiat za 2 soldo. Prvý zarobil 60, druhý 40 soldo a zostalo im obom ešte 10 prasiat, ktoré keď predali, vytvorili dodatočný zisk [2, s. 332].

Súčasťou Propositiones boli aj tzv. geometrické problémy, ktoré vychádzali zo starých rímskych úloh. Jednou z nich bola aj úloha:

O kruhovom poli

Jedno kruhové pole má obvod 400 prútov (prút – stará dĺžková miera). *Povedz, koľko aripenni* (aripenni – stará plošná miera s rozsahom 12×12 prútov) *obsahuje?*

Táto úloha ako jedna z mála má uvedené aj dve cesty k riešeniu. Spomenieme len jedno z nich, pretože druhé je nekorektné [3, s. 57]:

Zober štvrtú časť zo 400, to je 100. Zober ďalej tretiu časť zo 400, to je 133. Zober polovicu zo 100, to je 50. Zober polovicu zo 133, to je 66. Vynásob 50 krát 66, to je 3 151 (tu sa asi autor pomýlil v zápise, pretože správne to je 3 300, navyše s touto hodnotou aj ďalej počíta). *Rozdeľ to na 12 častí. Jedna časť je 280* (aj keď $3\,300 : 12 = 275$). *Rozdeľ znovu 280 na 12 častí. Jedna časť je 24. Zober štyrikrát 24, to je 96. To je celkom 96 aripenni.*

Po jednoduchom výpočte zistíme, že ani udaný výsledok nie je správny. V skutočnosti je správny výsledok približne 88 aripenni, čomu sa riešenie blíži, a keby autor úlohy delil $3\,300 : 12 = 275$, a nie 280, dostal by sa nakoniec k výsledku 91, čo je už viac presnejšie. Pozoruhodné pri tejto úlohe je nielen to, akými spôsobmi ich rieši, ale hlavne to, že na pomerne jednoznačný príklad udáva dva, dosť odlišné, výsledky.

Ďalšia úloha bola podobná, aj keď by sa dala zaradiť ku skôr žartovným úlohám ako k úlohám využiteľným v praktickej geometrii:

O kruhovom meste

Kruhové mesto má obvod 8 000 stôp. Povedz, kto vieš, koľko domov sa v ňom nachádza, keď každý dom je dlhý 30 stôp a široký 20 stôp.

Navrhovaný postup riešenia (opäť nepresný) znel [3, s. 217]:

Pre obvod tohto mesta platí dĺžka 8 000 stôp, ktoré treba v pomere 3 : 2 *rozdeliť na 4 800 a 3 200. Do jedného daj dĺžku, do druhého šírku domov. Odober z každých miest polovicu, zostane z väčších miest 2 400, z menších 1 600. Týchto 1 600 vydeľ 20 a budeš mať 80 krát 20. Ďalej väčších 2 400 miest rozdeľ na 30 častí, 80 krát 30. Zober 80 krát 80, to je 6 400. Toľko domov, ako je hore zadaných, možno do tohto mesta postaviť.*

Ťažkopádnosť formulácie týchto dvoch úloh, ale aj ostatných, vyplývala jednak z nedostatočne vyvinutého pojmového aparátu matematiky v stredoveku a jednak z absencie akejkoľvek symboliky.

Zbierka okrem iných úloh obsahovala aj známu úlohu o prievozníkovi, ktorý mal odviezť cez rieku vlka, kozu alebo kapustu, ktorej riešenie predpokladá tiež istú dávku dôvtipu. Ako vidno, táto ako aj iné úlohy z tejto zbierky si udržali svoju popularitu po dlhú dobu.

Najväčší arabský matematik

Po páde Západorímskej ríše v roku 476 začal v Európe stredovek, obdobie vo všeobecnosti málo priaznivé pre vedecký a technický rozvoj. Centrá rozvoja ľudskej vzdelanosti sa tak postupne preniesli do iných častí sveta. Jedným z nich sa stal aj Bagdadský kalifát (časť Moslimskej ríše). Bagdadskí kalifovia podporovali rozvoj prírodných vied a matematiky. Jeden z nich, kalif al–Mamún, dal začiatkom 9. storočia podľa vzoru alexandrijskej akadémie založiť jej arabskú verziu – Dom múdrosti. Matematici v Dome múdrosti zhromažďovali a prekladali diela antických gréckych autorov a oboznamovali sa s matematikou a astronómiou Indie.

Z matematikov pracujúcich v Dome múdrosti mal pre matematiku najväčší význam Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádzusí (asi 780–850, skrátene al-Chwárizmí, známy aj ako al--Chorezmí).

Al-Chwárizmí sa narodil v Chorézmii (dnes je to časť Uzbekistanu). V mladosti bol prívržencom Zarathrustovho učenia, no neskôr konvertoval na islam. Ako mnoho mužov tej doby i on sa venoval rôznym oblastiam vedy, a to hlavne matematike, astronómii a geografii. Čo sa týka matematiky, zaoberal sa aritmetikou, indickými číslicami a algebrou. Jedným z jeho najvýznamnejších diel bola *Krátka kniha o počte pripočítaním a porovnávaním*, v origináli *Al-kitab al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala* alebo v krátkosti *Algebra*.

Al-Chwárizmí napísal svoju Algebru na prianie skôr spomínaného kalifa al-Mamúna. Mala slúžiť obyvateľstvu k riešeniu úloh vyskytujúcich sa v každodennom praktickom živote a právnych problémov, ktoré sa týkali najmä komplikovaného islamského dedičského práva. Pozoruhodná je druhá, praktická časť knihy. V nej uvádzaných úlohách je tak dôsledný, že dokonca aj rovnice formuluje slovne a nepoužíva žiadnu symboliku, čo viedlo k určitej ťažkopádnosti. Prvá časť Algebry je viac teoretická, jednalo sa hlavne o klasifikáciu kvadratických rovníc [4, s. 239]

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Al-Chwárizmí klasifikuje šesť typov kvadratických a lineárnych rovníc, pričom ich nazýva „normálnymi“. Potom na príkladoch objasňuje možnosti úprav, pomocou ktorých je možno všetky ostatné rovnice previesť na jeden z týchto normálnych typov. Týchto šesť typov normálnych rovníc sformuloval nasledovne:

1) štvorce sa rovnajú koreňom: $ax^2 = bx$
2) štvorce sa rovnajú číslu: $ax^2 = c$
3) korene sa rovnajú číslu: $ax = c$
4) štvorce a korene sa rovnajú číslu: $ax^2 + bx = c$
5) štvorce a čísla sa rovnajú koreňom: $ax^2 + c = bx$
6) korene a čísla sa rovnajú štvorcom: $bx + c = ax^2$

Každá rovnica má kladné koeficienty a ostatné rovnice, ktoré nemajú kladné riešenie, sa neberú do úvahy. Keď sa v rovnici vyskytne člen so záporným koeficientom, je možné sa ho zbaviť pomocou operácie nazývanej al-džabr, čiže pripočítaním tohto člena k obidvom stranám rovnice. Ďalej sa všetky členy rovnakého stupňa zlučujú v jeden pomocou operácie al-muqábala, ktorá znamená porovnávanie. Okrem iného, koeficient u štvorca neznámej sa musí previesť na jednotku, pretože pravidlá pre riešenie rovníc typu 4) až 6) sú formulované práve pre tento prípad.

Pre typ rovnice 1) nebola nula považovaná za riešenie, čo sa udržalo v matematike až do 17. storočia. Zaujímavosťou bolo, že za neznámu al-Chwárizmí nepovažoval len koreň rovnice, ale tak isto aj jeho druhú mocninu. Tak napríklad po určení koreňa $x = 5$ v rovnici $x^2 = 5x$ dodáva al-Chwárizmí, že jeho druhá mocnina je 25. Podobne tak robil aj pri iných príkladoch. Pre všetky typy rovníc uvádza al-Chwárizmí špeciálne príklady, ktoré bolo možné riešiť aj pomocou geometrického postupu.

V jednej úlohe, ktorú je možné zapísať v tvare

$$2x^2 + 100 - 20x = 58,$$

al-Chwárizmí postupuje pri jej riešení takto

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x \quad \text{(al-džabr, pripočítanie)},$$

čo vedie k tvaru, kde zlučuje členy rovnakého stupňa

$$2x^2 + 42 = 20x \quad \text{(al-muqábala, zlučovanie)}$$

a po vydelení dostáva normálnu rovnicu typu 5)

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Postup pre riešenie vyššie uvedenej rovnice formuloval nasledovne: Rozpoľ korene, dostaneš päť, vynásob to so sebou samým, dostaneš dvadsaťpäť, odpočítaj od toho dvadsaťjedna, ktoré sú pripočítané k druhej mocnine, zvýšia ti štyri. Odmocni, dostaneš dva a odpočítaj to od polovice koreňou, teda od piatich a zostanú ti tri. A to je odmocnina, ktorú hľadáš a jej druhá mocnina je deväť. A keď chceš, pripočítaj to k polovici koreňov a máš sedem. Aj to je koreň, ktorý hľadáš, a jeho druhá mocnina je štyridsaťdeväť [2, s. 203–206].

Keby sme typ rovnice 5) vo všeobecnosti sformulovali ako $x^2 + q = px$, tak by sme riešenie tohto príkladu vo všeobecnosti mohli zapísať:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Analogicky sa dajú vyjadriť riešenia aj ostatných typov rovníc, pričom vlastne ide o metódu doplňania na štvorec.

Jeho diela sa zachovali najmä vďaka latinským prekladom od Angličana Roberta z Chesteru (okolo 1150) a Taliana Gerharda z Cremony (asi 1114–1187). V Európe boli presné slovné formulácie al-Chwárizmího rovníc a ich riešení prepísané do matematickej symboliky (čo súviselo s jej rozvojom) po prvýkrát až v renesancii [4, s. 240].

A na záver ešte jedna poznámka. Názov operácie al-džabr, ktorý znamená tiež kniha, sa čoskoro začal používať pre označenie celej náuky o rovniciach. V Európe sa slovo algebra ako názov tejto vedy objavuje v 14. storočí. Takisto aj polatinčením al-Chwárizmího mena (al-Chorezmí) vzniklo slovo algoritmus [5, s. 91].

Koruna indickej matematiky

V roku 1657 slávny francúzsky matematik Pierre de Fermat poslal svojmu priateľovi Bernardovi Frencilovi de Bessy jednu pozoruhodnú úlohu. Požadoval od neho riešenie rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, pričom x a y sú celé čísla. Ani jednému z nich sa nepodarilo úlohu vyriešiť, čo dokázal až v roku 1732 ďalší veľký matematik Leonard Euler.

Táto úloha pochádzala od indického matematika a astronóma Bháskara II. (okolo 1114–1185), ktorý ju už riešil okolo roku 1150. Udával, že najmenšími celými číslami, pre ktoré mala rovnica zmysel, boli $x = 226\,153\,980$ a $y = 1\,766\,319\,049$. Bháskara rovnicu riešil metódou, ktorú nazýval čákravala (chakravala) a úlohu aj jej riešenie uvádzal vo svojom diele *Koruna vedy* (*Siddhánta-śiromani*, 1150) [6].

Koruna vedy bola skutočnou korunou stredovekej matematiky v Indii. Táto zbierka jeho prác pozostávala zo štyroch častí (Aritmetika, Geometria, Algebra a Astronómia) a obsahovala podrobný a prehľadný teoretický základ k riešeniu praktických úloh bežného života. Pozoruhodné je, že toto dielo bolo z veľkej časti písané prózou a okrem iného obsahovalo aj riešenia kvadratických rovníc s negatívnymi koreňmi. Najvýznamnejšia časť tohto diela sa volala *Líllávatí* a bola venovaná aritmetike. Líllávatí znamená krásavica, čo mohlo jednak narážať na Bháskarovu dcéru alebo na samotnú matematiku [2, s. 100].

Priblížme si teraz niekoľko zaujímavých úloh z tohto diela [6]:

Druhá odmocnina z polovice celkového počtu včiel jedného roja vyletela na strom. Nasledovaná bola ôsmimi devätinami celkového počtu. Jedna včela uviazla v lotosovom kvete a jej priletela na pomoc jedna iná včela. Povedz mi, koľko bolo celkom včiel?

Úloha sa dá jednoducho vyriešiť, keď rovnicu

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$$

upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$2x^2 - 153x + 648 = 0.$$

Potom už ľahko zistíme, že počet včiel bol 72.

Kvadratickou rovnicou bola aj nasledujúca úloha [2, s. 141]:

Druhá mocnina jednej osminy stáda opíc vystrája v lese, zatiaľ čo dvanásť zvyšných pokrikuje na vŕšku. Koľko ich je celkom?

Rovnicu potom zapíšeme

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

a riešením sú hodnoty 16 a 48. Pokiaľ Bháskara pri výpočtoch dostal koreň, ktorý by nevyhovoval podmienkam úlohy, tak ho jednoducho nebral do úvahy. Podobne to bolo aj so zápornými koreňmi, ktoré považoval iba za pomocné algebraické výpočty. Za správne riešenie ich nepokladal aj preto, lebo záporné čísla sa vymykali z predstáv bežných ľudí tej doby.

Pri riešení rovníc vyšších stupňov ani Bháskara, ani iní indickí matematici nedospeli k nejakým všeobecne platným výsledkom. Sám Bháskara uvádza iba tie príklady, kde celočíselné korene možno nájsť pomocou jednoduchých úprav. Tak napríklad v rovnici $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$ chýba na druhej strane k doplneniu iba člen 8, aby sme dostali $(x-2)^3 = 27$. Podobne tak činil aj pri rovniciach vyšších stupňov.

Náročnejšími už boli úlohy, v ktorých sa indickí matematici opierali o znalosť Pytagorovej vety. Jeden z takýchto príkladov Bháskaru znie:

Vypočítaj odvesny x, y a preponu z pravouhlého trojuholníka, keď poznáme jeho obvod a obsah.

Úloha je pomerne náročná a riešenie spočíva v zavedení substitúcií

$$xy = p, \tag{1}$$

$$x + y + z = s, \tag{2}$$

kde p je dvojnásobok obsahu trojuholníka a s je obvod trojuholníka. Potom sa postup odvíja od aplikovania Pytagorovej vety $x^2 + y^2 = z^2$, kde po pripočítaní $2xy$ a odčítaní z^2 od obidvoch strán dostávame

$$x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = 2xy$$

a po ďalšej úprave a z (1)

$$x^2 + xy - xz + xy + y^2 - yz + xz + yz - z^2 = 2p,$$
$$(x + y + z)(x + y - z) = 2p$$

a odtiaľ pomocou (2)

$$x + y - z = \frac{2p}{s} \tag{3}$$

a z (2) a (3) plynie

$$z = \frac{s^2 - 2p}{2s}.$$

Po určení prepony z a jej dosadení do (2) môžeme určiť odvesny x a y.

Koruna matematiky bola ozajstnou korunou indickej matematiky. Po stáročia slúžila ako základ akéhokoľvek matematického štúdia matematiky v Indii. Od smrti Bháskaru II. až po britskú kolonizáciu sa v indickej matematike neobjavilo prakticky nič nové, pokiaľ nepočítame stále novšie a novšie komentáre a hodnotenia k tomuto významnému dielu. Na tomto mieste považujeme za vhodné uviesť, že indická matematika dala svetu nulu a algoritmus výpočtu druhej odmocniny, ktorý používame dodnes [4, s. 94].

A na záver ešte spomenieme jednu zaujímavú úlohu od Bháskarovho predchodcu a inšpirátora, ďalšieho stredovekého indického matematika Šrídharu (žil medzi rokmi 850 až 950), ktorú možno zapísať rovnicou:

$$\begin{gathered}
x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right) - \sqrt{x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right)} - \\
- \frac{1}{5}\left(x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right) - \sqrt{x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right)}\right) - \\
- 2\sqrt{\begin{gathered} x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right) - \sqrt{x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right)} - \\ - \frac{1}{5}\left(x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right) - \sqrt{x - \sqrt{x} - \frac{1}{6}\left(x - \sqrt{x}\right)}\right) \end{gathered}} = 8
\end{gathered}$$

Táto na prvý pohľad neuveriteľne komplikovaná úloha vedie k tzv. reťazcom kvadratických rovníc. Šrídhara riešil túto rovnicu sériou substitúcií, a to

$$x - \sqrt{x} = y, \quad y - \frac{1}{6}y = z, \quad z - \sqrt{z} = u, \quad u - \frac{1}{5}u = v, \quad v - 2\sqrt{v} = 8,$$

kde z poslednej rovnice plynie $v = 16$ a následne $u = 20$, $z = 25$, $y = 30$ a $x = 36$. Správnosť výsledku sa dá jednoducho overiť [2, s. 142–143].

Pascalov indický trojuholník z Číny

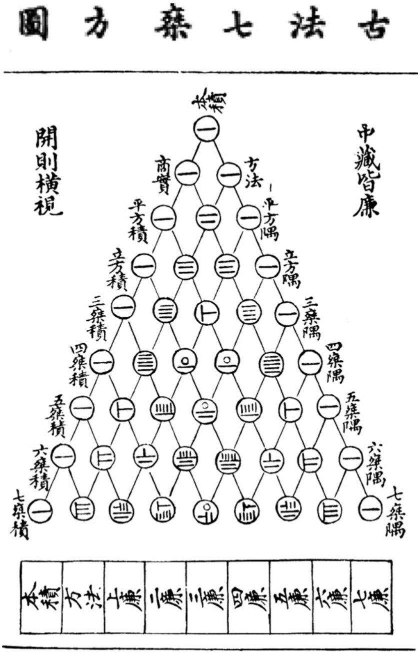
Rozvoj binomických koeficientov alebo Pascalov trojuholník sa nám spája s menom Blaisea Pascala (1623–1662), resp. jeho dielom *Pojednanie o aritmetickom trojuholníku* (*Traité du triangle arithmétique*, 1665). Málokto však vie, že jeho pôvod pramení v úplne inej dobe a úplne inom mieste, ako je Francúzsko 17. storočia.

V 13. storočí pôsobilo v stredovekej Číne súčasne viacero vynikajúcich matematikov. Jedným z nich bol aj potulný učiteľ matematiky Ču Š'-ťie (alebo aj Chuh Shih Chieh, asi 1260–1320). Známy sa stal najmä svojimi dielami *Úvod do matematického bádania* (v origináli *Suan süe čchi men*, 1299) a *Jaspisové zrkadlo štyroch prvkov* (*S'jüan jü ťien*, 1303). V Úvode do matematického bádania Ču Š'-ťie uvádza čitateľa do všeobecného úvodu algebry a hlavne definuje pravidlá o znamienkach pri sčítavaní a násobení. V Jaspisovom zrkadle zase popísal Hornerovu schému, postupy pre zostavovanie rovníc, rozpracoval symboliku pre zápis rovníc vyšších stupňov so štyrmi neznámymi a riešil niekoľko úloh, ktoré viedli k rovniciam tohto typu [2, s. 72].

Okrem spomenutého sa v Jaspisovom zrkadle stretávame aj s trojuholníkovou tabuľkou čísel, ktoré sú binomickými číslami až do ôsmej mocniny. Táto tabuľka je súčasne najstarším známym vyobrazením schémy rozvoja binomických koeficientov. Avšak už Ču Š'-ťie sám priznáva, že túto tabuľku prebral zo skorších diel. Iný čínsky matematik tohoto obdobia, Jang Chuej (13. storočie), v súvislosti s tým odkazuje na dielo matematika Ťia Siena *Vysvetlenie tabuliek reťazovej metódy odmocňovania* (*Li čcheng š'suo*, vydané okolo roku 1100), v ktorom sa autor zaoberal výpočtami štvrtých odmocnín a poznal tabuľku čísel, ktorá sa dnes nazýva Pascalov trojuholník. Ale Ťia Sien ju uvádza v menšom rozsahu, len do $n = 6$. Samotný názov Ťia Sienovej práce naznačuje, že tabuľka sa používala pre výpočet odmocnín [2, s. 79].

Pascalov trojuholník bol však známy ešte omnoho skôr. Indickí matematici ho poznali už v 2. storočí pred Kristom, používali ho však iba v úlohách kombinatoriky, a tak nemožno tvrdiť, že bol používaný aj na rozklad mocniny dvojčlenov. Znovu sa tabuľka binomických čísel objavuje až okolo roku 1000 v diele perzského matematika Mohameda al-Karadžího (zomrel asi 1029), ktorý ju poznal pre exponent 4.

Podobne sa spomína v spisoch Omara Chajjáma (alebo Omar Khayyam, 1048–1122), známeho astronóma, básnika, filozofa a matematika tej doby, ktorý ju pravdepodobne ovládal pre ľubovoľný prirodzený mocniteľ. Otázka miesta a doby objavu binomickej vety pre ľubovoľný prirodzený mocniteľ však zostáva stále otvorená [7] (obr. 1).



Obr. 1: Binomické koeficienty podľa Ču Š'-ťia

Po Ču Š'-ťienovi sa tabuľka binomických čísel až do mocniny 9 vyskytuje u Džamsída al-Kášího (okolo 1380–1429) a v Európe u Petra Apiana (1495–1522) v roku 1527 a u Michaela Stiffela (1487–1567). Až Issac Newton (1642–1727) rozšíril platnosť binomického vzorca na ľubovoľné reálne mocnitele, opierajúc sa pri tom o svoje multiplikačné pravidlo vytvárania koeficientov [2, s. 80].

Mikuláš Oresme

V súčasnosti známe pravidlá pre počítanie s odmocninami. Po prvýkrát tieto pravidlá formuloval v 14. storočí francúzsky polyhistor Mikuláš Oresme.

Mikuláš Oresme (asi 1330–1382) pochádzal z Normandie a v rokoch 1348 až 1361 vyučoval na francúzskej univerzite Collège de Navarra v Paríži. Tak ako mnoho mužov vedy v stredoveku aj on bol prepojený s cirkvou a pôsobil v rôznych cirkevných funkciách v Rouene. Od roku 1377 pôsobil ako biskup v Lisieux.

Na rozkaz kráľa Karla V. preložil niekoľko Aristotelových diel do francúzštiny, a stal sa tak priekopníkom publikovania vedeckých prác vo francúzštine. Aj napriek tomu publikoval svoje najvýznamnejšie dielo, čo sa týka matematiky, v latinčine. Jednalo sa o *Algoritmus proporcií* (*Algorismus proportionum*), v ktorom sa zaoberá so spomínanými mocninami a odmocninami [4, s. 293–294].

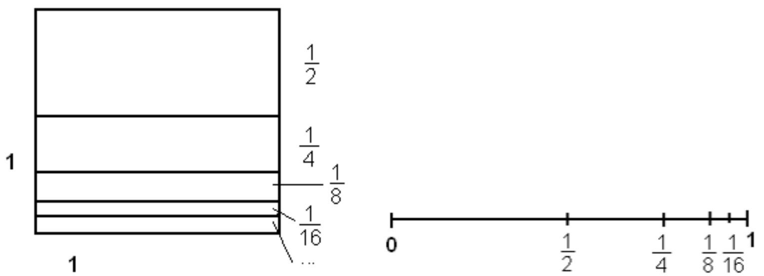
Oresme v Algoritme proporcií zavádza vedľa celočíselných exponentov tiež štvrtinové, tretinové, polovičné, jedenapolnásobné a iné lomené racionálne exponenty, ktoré by sme dnes zapísali ako $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{3}{2}}$ atď. Zo skutočnosti, že $8 = \sqrt{64}$ a $4 = \sqrt[3]{64}$ Oresme usudzuje, že 8 je jedenapolnásobná mocnina zo 4, čiže $8 = 4^{\frac{3}{2}}$. Tieto racionálne exponenty Oresme nazýval iracionálnymi a slovne sformuloval viacero nám už dnes známych pravidiel pre počítanie s nimi, ako napríklad

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}, \quad a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} = (a^n b^m)^{\frac{1}{m \cdot n}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

a podobne. Tým položil základ pre teórie logaritmov [2, s. 389].

V Algoritme proporcií sa Oresme okrem mocnín a odmocním venoval aj geometrickej interpretácií číselných radov. Pomocou obr. 2 ukázal súčet nekonečného radu

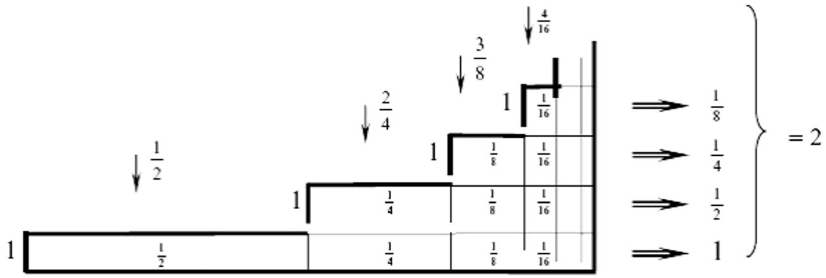
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$



Obr. 2

Takisto pomocou obrázka vedel určiť aj súčet radu (obr. 3)

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots=2.$$



Obr. 3: Súčet nekonečného radu. Grafické znázornenie od Oresmeho

Z ďalších Oresmeho diel sú veľmi významné spisy *O konfigurácií kvalít* (*De configuratione qualitum*) a *O rovnomerných a nerovnomerných intenzitách* (*De uniformitate et difformitate intensionum*), kde sa snažil o matematický popis pohybu. Začal dokonca používať aj geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomných súvislostí. Do budúcnosti tak prispel k stanoveniu závislosti medzi časom a meranou veličinou a vytušil úlohu funkčných závislostí ako nástroja pre skúmanie prírody a jej merateľných zákonov [1, s. 48–49].

Literatura

[1] Jedinák, D.: *Eseje o matematikoch.* Trnava, 2007.

[2] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1978.

[3] Scriba, Ch. J., Schreiber, P.: *5 000 Jahre Geometrie.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[4] Wusing, H.: *6 000 Jahre Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[5] Znám, Š., Bukovský, L., Hejný, M. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky.* Alfa, Bratislava, 1986.

[6] `http://www.indiafirstfoundation.org/Glimpses%20of%20Indian%20History/Articles/Lordkrisjna_m.htm#lkrn5`

[7] `http://ualr.edu/lasmoller/pascalstriangle.html`