Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Úloha o největších dělitelích čísel $1, 2, 3, \dots, 2^n$

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 2, 5–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146572

Úloha o největších dělitelích čísel 1, 2, 3, ..., 2^n

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with a sum of the highest even and odd divisors of numbers 1, 2, 3, ..., 2^n. The formula for this sum is derived.

Úloha, kterou se budeme zabývat, je sice poněkud neobvyklá, ale nepostrádá zajímavosti, neboť propojuje dvě odlišná témata – dělitelnost přirozených čísel a posloupnosti. V článku určíme jednak součet všech největších sudých dělitelů čísel 1, 2, 3, ..., 2^n, který označíme $S_s(1, 2, \ldots, 2^n)$, jednak součet všech největších lichých dělitelů těchto čísel, který budeme značit $S_l(1, 2, \ldots, 2^n)$ pro libovolné přirozené číslo n. Pro ilustraci uveďme tyto hodnoty pro $n = 2$ a $n = 3$:

$$S_s(1, 2, 3, 4) = 2 + 4 = 6$$
$$S_l(1, 2, 3, 4) = 1 + 1 + 3 + 1 = 6$$
$$S_s(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$
$$S_l(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 = 22$$

Určit součet všech největších sudých dělitelů čísel 1, 2, 3, ..., 2^n je velmi jednoduché; stačí si uvědomit, že lichá čísla sudé dělitele nemají a že největším sudým dělitelem každého sudého čísla je to číslo samo. Znamená to, že platí:

$$S_s(1, 2, \ldots, 2^n) = S_s(1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1) + S_s(2, 4, 6, \ldots, 2^n) =$$
$$= 0 + (2 + 4 + 6 + \ldots + 2^n) = \frac{2^{n-1}(2 + 2^n)}{2} = 2^{n-1}(1 + 2^{n-1})$$

Určení součtu všech největších lichých dělitelů čísel 1, 2, 3, ..., 2^n je o málo obtížnější. Je zřejmé, že největším lichým dělitelem lichého čísla je to číslo samo, ale jaké číslo je největším lichým dělitelem čísla sudého? Odpověď na tuto otázku je poměrně snadná: Protože dělitelem sudého čísla $2k$ není žádné z čísel $k + 1$, $k + 2$, ..., $2k - 1$, je největší lichý dělitel čísla $2k$ roven největšímu lichému děliteli čísla k. Pro součet všech největších lichých dělitelů čísel 1, 2, ..., 2^n tak dostaneme:

$$S_l(1, 2, \ldots, 2^n) = S_l(1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1) + S_l(2, 4, 6, \ldots, 2^n) =$$
$$= (1 + 3 + 5 + \ldots + 2^n - 1) + S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1})$$

A protože

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2^n - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{2} \cdot 2^n = 4^{n-1},$$

máme rekurentní vzorec

$$S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^n) = S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}) + 4^{n-1},$$

kde $S_l(1, 2^1) = 1 + 1 = 2$.

Vzhledem k tomu, že tento výsledek platí pro všechna přirozená čísla n, platí i každá z těchto $n - 1$ rovností:

$$\begin{aligned}
S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^n) &= 4^{n-1} + S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}) \\
S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}) &= 4^{n-2} + S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-2}) \\
S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-2}) &= 4^{n-3} + S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-3}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
S_l(1, 2, 3, 2^2) &= 4^1 + S_l(1, 2^1)
\end{aligned}$$

Jejich sečtením dostaneme:

$$\begin{aligned}
S_l(1, 2, 3, \ldots, 2^n) &= 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1} + S_l(1, 2^1) = \\
&= \frac{4(4^{n-1} - 1)}{3} + 2 = \frac{4^n + 2}{3}
\end{aligned}$$

Získané vztahy pro součet všech největších sudých a všech největších lichých dělitelů čísel 1, 2, 3, ..., 2^n doplníme ještě vztahem pro součet $S(1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ všech největších dělitelů těchto čísel; zřejmě platí:

$$S(1, 2, 3, \ldots, 2^n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2^n = 2^{n-1}(2^n + 1)$$

Na základě získaných výsledků odvodíme dále vztah pro součet $S_l(2, 4, 6, \ldots, 2^n)$ všech největších lichých dělitelů čísel 2, 4, 6, ..., 2^n. Všimněme si nejprve, že platí:

$$\begin{gathered}
S_l(2, 4) = 1 + 1 = 2 \\
S_s(1, 2, 3, 4) + S_l(1, 2, 3, 4) - S(1, 2, 3, 4) = 6 + 6 - 10 = 2 \\
S_l(2, 4, 6, 8) = 1 + 1 + 3 + 1 = 6 \\
S_s(1, 2, \ldots, 8) + S_l(1, 2, \ldots, 8) - S(1, 2, \ldots, 8) = 20 + 22 - 36 = 6
\end{gathered}$$

Ukážeme, že tyto rovnosti platí nejen pro $n = 2$ a $n = 3$, ale pro všechna přirozená čísla n; jednotlivé kroky tohoto odvození si jistě umíte zdůvodnit sami:

$$\begin{gathered}
S_s(1,2,3,\dots,2^n) + S_l(1,2,3,\dots,2^n) - S(1,2,3,\dots,2^n) = \\
= [S_s(2,4,6,\dots,2^n) + S_s(1,3,5,\dots,2^n-1)] + [S_l(2,4,6,\dots,2^n) + \\
+ S_l(1,3,5,\dots,2^n-1)] - [S(2,4,6,\dots,2^n) + S(1,3,5,\dots,2^n-1)] = \\
= S_s(2,4,6,\dots,2^n) + S_l(1,3,5,\dots,2^n-1) + S_l(2,4,6,\dots,2^n) - \\
- S(2,4,6,\dots,2^n) - S(1,3,5,\dots,2^n-1) = S_l(2,4,6,\dots,2^n)
\end{gathered}$$

Pro součet všech největších lichých dělitelů čísel 2, 4, 6, …, 2^n odtud dostaneme po dosazení a úpravě:

$$S_l(2,4,6,\dots,2^n) = 2^{n-1}(1+2^{n-1}) + \frac{4^n+2}{3} - 2^{n-1}(2^n+1) = \frac{4^{n-1}+2}{3}$$

Tento výsledek si můžete ověřit např. pro $n = 4$:

$$S_l(2,4,6,8,10,12,14,16) = 1+1+3+1+5+3+7+1 = 22$$

$$\frac{4^{4-1}+2}{3} = 22$$

Na závěr uveďme přehled dosažených výsledků:

Součet všech největších sudých dělitelů čísel 1, 2, 3, …, 2^n:

$$S_s(1,2,3,\dots,2^n) = 2^{n-1}(2^{n-1}+1)$$

Součet všech největších lichých dělitelů čísel 1, 2, 3, …, 2^n:

$$S_l(1,2,3,\dots,2^n) = \frac{4^n+2}{3}$$

Součet všech dělitelů čísel 1, 2, 3, …, 2^n:

$$S(1,2,3,\dots,2^n) = 2^{n-1}(2^n+1)$$

Součet všech největších sudých dělitelů čísel 2, 4, 6, …, 2^n:

$$S_s(2,4,6,\dots,2^n) = 2^{n-1}(2^{n-1}+1)$$

Součet všech největších lichých dělitelů čísel 2, 4, 6, …, 2^n:

$$S_l(2,4,6,\dots,2^n) = \frac{4^{n-1}+2}{3}$$

Literatura

[1] Bušek, I., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*, Prometheus, Praha, 2008.