Vlastimil Dlab

Celá a racionální čísla v nekonečně mnoha verzích

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 2, 1–4

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146570`

Celá a racionální čísla v nekonečně mnoha verzích

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. The primary aim of this note is to point out that one can define a "new addition and multiplication" of integers (or other numbers) by prescribing arbitrarily both zero and identity and, at the same time, to preserve the entire structure of the domain of integers as we know it from daily applications.

Začněme s oborem celých čísel $\mathbb{Z}$ a běžnými, dobře známými, operacemi sčítání $+$, a násobení $\cdot$. Také číslice, pokud se budou vyskytovat v textu, budou značit vždy „naše" číslice $\ldots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Definujme nyní *nové operace* sčítání, pro něž budeme užívat symbol $\oplus$, a násobení, pro něž budeme užívat symbol $\odot$, následujícími předpisy:

$$x \oplus y = x + y - 1 \qquad \text{a} \qquad x \odot y = x + y - x \cdot y. \tag{1}$$

Tedy,

$$10 \oplus 10 = 19,\ 10 \oplus (-10) = -1,\ 10 \odot 10 = -80,\ 10 \odot (-10) = 100,$$
$$2 \odot 2 = 0 \text{ atd.}$$

Na obr. 1 je znázorněna část multiplikativní tabulky. Tečkované čáry naznačují, že 1 je v novém sčítání „nulou" a 0 je v novém násobení „jedničkou" (jednotkovým prvkem). O tom se snadno přesvědčíme užitím definice (1). V tabulce jsou též vyznačeny „nové čtverce" celých čísel: $5 \odot 5 = -15$, $4 \odot 4 = -8$, $\ldots$, $(-5) \odot (-5) = -35$ atd. Pozorujme, že kromě násobků jednotkového prvku 0 a násobků čísla 2 (které splňuje vlastnost $2 \oplus 0 = 0 \oplus 2 = 1$) v tabulce nenalezneme $\ldots, -12, -10, -6, -4, -2, -1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, \ldots$ – to jsou čísla, která nelze zapsat jako nový součin dvou čísel (různých od 0 a 2). Jsou to „prvočísla" v naší nové aritmetice! Skutečně, vše co známe o celých číslech, lze formulovat i v této jejich nové reprezentaci. Snadno se o tom přesvědčíme.

$\odot$	$\cdots$	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**−1**	**−2**	**−3**	**−4**	**−5**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	$\cdots$	−15	−11	−7	−3	1	5	9	13	17	21	25	$\cdots$
4	$\cdots$	−11	−8	−5	−2	1	4	7	10	13	16	19	$\cdots$
3	$\cdots$	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	$\cdots$
2	$\cdots$	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
1	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
0	$\cdots$	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	$\cdots$
−1	$\cdots$	9	7	5	3	1	−1	−3	−5	−7	−9	−11	$\cdots$
−2	$\cdots$	13	10	7	4	1	−2	−5	−8	−11	−14	−17	$\cdots$
−3	$\cdots$	17	13	9	5	1	−3	−7	−11	−15	−19	−23	$\cdots$
−4	$\cdots$	21	16	11	6	1	−4	−9	−14	−19	−24	−29	$\cdots$
−5	$\cdots$	25	19	13	7	1	−5	−11	−17	−23	−29	−35	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Obr. 1

Postupujme následujícím způsobem: Definujme (bijektivní) zobrazení $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ předpisem

$$f(z) = -z + 1.$$

Tedy 0 je zobrazena na 1, 1 je zobrazena na 0, 10 na −9 atd.

Nyní se přesvědčíme, že pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{Z}$ je

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \qquad \text{a} \qquad f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y).$$

Skutečně,

$$f(x + y) = -(x + y) + 1 = (-x + 1) + (-y + 1) - 1 = \\ = f(x) + f(y) - 1 = f(x) \oplus f(y).$$

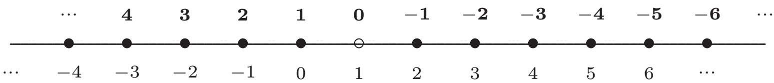
Podobně

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= -(x \cdot y) + 1 = -(-x+1) \cdot (-y+1) - x - y + 2 = \\ &= -(-x+1) \cdot (-y+1) + (-x+1) + (-y+1) = \\ &= -f(x) \cdot f(y) + f(x) + f(y) = f(x) \odot f(y). \end{aligned}$$

Takovému zobrazení f se říká *izomorfismus* příslušných objektů, v našem případě dvou kopií oboru celých čísel. Abstraktně je nelze od sebe rozeznat! Formálně takovou situaci zapíšeme formulí

$$(\mathbb{Z}, +, .) \simeq (\mathbb{Z}, \oplus, \odot).$$

Všimněme si ještě toho, že naše nová verze oboru celých čísel zaměnila roli kladných a záporných čísel. Číselnou osu můžeme znázornit následovně (obr. 2): horní tučná stupnice je zde vyobrazena v porovnání s obvyklou stupnicí.



Obr. 2

Naše nová verze celých čísel není zdaleka jediná. Formulujme a dokažme následující obecnou větu.

Věta 1 *Nechť $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je obor celých čísel s obvyklými operacemi $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení). Nechť b je libovolné celé číslo. Potom*

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, \oplus, \odot),$$

kde nové binární operace $\oplus$ a $\odot$ jsou definovány takto:

$$x \oplus y = x + y - b \qquad a \qquad x \odot y = a \cdot (x \cdot y - b \cdot x - b \cdot y + b^2) + b,$$

kde $a = 1$, nebo $a = -1$. „Nulou“ oboru $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ je číslo b a „jedničkou“ číslo $a + b$.

Důkaz: Definujeme-li bijektivní zobrazení $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ předpisem

$$f(z) = a \cdot z + b, \quad a = \pm 1,$$

dostáváme pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{Z}$ rovnosti:

$$f(x+y) = a\cdot(x+y)+b = (a\cdot x+b)+(a\cdot y+b)-b = f(x)\oplus f(y)$$

a jelikož $\frac{1}{a} = a$, je

$$\begin{aligned}f(x\cdot y) &= a\cdot x\cdot y+b = \frac{1}{a}\cdot(a\cdot x+b)\cdot(a\cdot y+b)-\frac{a\cdot b}{a}\cdot x-\frac{a\cdot b}{a}\cdot y-\frac{b^2}{a}+b = \\ &= \frac{1}{a}\cdot[f(x)\cdot f(y)-b\cdot(a\cdot x+b)+b^2-b\cdot(a\cdot y+b)+b^2-b^2]+b = \\ &= a\cdot[f(x)\cdot f(y)-b\cdot f(x)-b\cdot f(y)+b^2]+b = f(x)\odot f(y).\end{aligned}$$

Zobrazení f je tedy izomorfismus.

Stejný postup poslouží k důkazu zcela obecné věty, kterou můžeme samozřejmě ihned aplikovat na obory čísel racionálních, reálných i komplexních.

Věta 2 *Nechť P je obor čísel racionálních, či reálných, či komplexních s operacemi $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení). Nechť $a \neq 0$ a b jsou libovolné prvky pole P. Potom*

$$(P, +, \cdot) \simeq (P, \oplus, \odot),$$

kde nové binární operace $\oplus$ a $\odot$ jsou definovány takto:

$$x\oplus y = x+y-b \qquad a \qquad x\odot y = \frac{1}{a}\cdot\left(x\cdot y-b\cdot x-b\cdot y+b^2\right)+b.$$

„Nulou" pole $(P, \oplus, \odot)$ je prvek b a „jedničkou" prvek $a+b$.

Závěrečná poznámka. V některých učebnicích algebry lze nalézt úlohy požadující rozhodnout či dokázat, zda celá či racionální čísla s danými (novými) operacemi tvoří „obor integrity"; jedná se o ne úplné porozumění příslušným konstrukcím. Typicky takové úlohy naleznete v učebnici [1, s. 50] pro volby (v našem značení) $(a, b) = (1, 1), (-1, 1)$ a $(1, -1)$.

Literatura

[1] Hungerford, T. W.: *Abstract Algebra, an Introduction.* Saunders College Publishing, 1990.