Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Počet obdélníků zakrývajících dané políčko čtvercové sítě

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 1, 1–4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146556

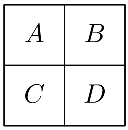
Počet obdélníků zakrývajících dané políčko čtvercové sítě

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the number of rectangles by which every square of $n \times n$ chessboard is covered. Then, the sum of all these numbers is given.

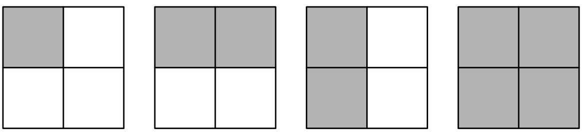
Představme si, že do každého políčka dané čtvercové sítě je zapsáno číslo udávající počet obdélníků nebo čtverců, které toto políčko zakrývají a nepřesahují hranice sítě; pro jednoduchost budeme v následujících úvahách považovat za obdélníky i čtverce. Naším úkolem je určit součet $S(n \times n)$ čísel zapsaných podle tohoto pravidla do všech n^2 políček čtvercové sítě $n \times n$. Pro ilustraci vyřešíme tuto úlohu nejprve pro $n = 2$ a $n = 3$.

Mějme tedy čtvercovou síť 2×2 a určeme, kolik obdélníků této sítě zakrývá políčko A v levém horním rohu na obr. 1.



Obr. 1

Snadno zjistíme, že tyto obdélníky (vyšrafované na obr. 1a) jsou celkem čtyři.



Obr. 1a

Protože stejným počtem obdélníků je pokryto i každé z políček B, C, D, máme výsledek:

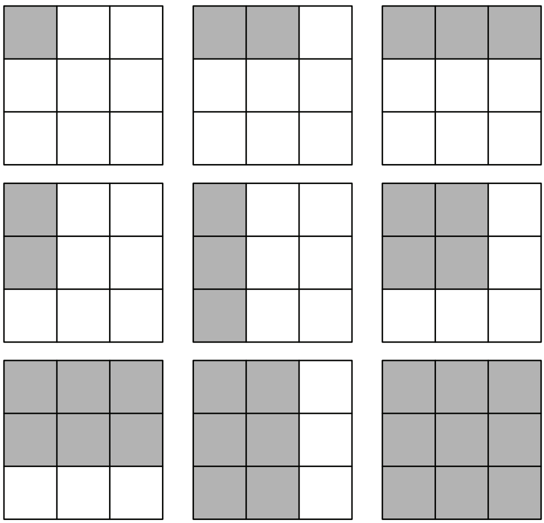
Součet $S(2 \times 2)$ čísel zapsaných do všech čtyř políček sítě 2×2 je $4 + 4 + 4 + 4 = 16$.

Ve čtvercové síti 3×3 je situace poněkud složitější. Určíme nejprve počet obdélníků, jejichž částí je políčko A na obr. 2.

A	E	B
F	K	G
C	H	D

Obr. 2

Z obr. 2a, kde jsou tyto obdélníky vyšrafovány, je vidět, že jich je devět. Stejným počtem obdélníků je však zakryto i každé z políček B, C, D, takže součet čísel zapsaných do těchto čtyř políček je $4 \cdot 9 = 36$. Podobným způsobem se můžeme přesvědčit, že každé z políček E, F, G, H je zakryto dvanácti obdélníky, takže součet čísel v nich zapsaných je $4 \cdot 12 = 48$; pro políčko K dostaneme, že je zakryto šestnácti obdélníky.

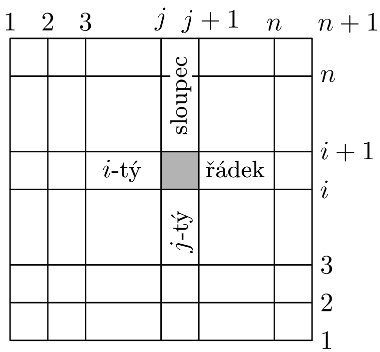


Obr. 2a

Platí tedy: *Součet $S(3 \times 3)$ čísel zapsaných do všech devíti políček sítě 3×3 je* $4 \cdot 9 + 4 \cdot 12 + 16 = 100$.

Přejdeme nyní ke čtvercové síti $n \times n$. Zjistíme nejprve, kolika obdélníky této sítě je zakryto vyšrafované políčko ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci na obr. 3, v němž je $n+1$ vodorovných přímek ohraničujících jednotlivé řádky označeno čísly od 1 do $n+1$ a stejnými čísly také $n+1$ svislých přímek ohraničujících jednotlivé sloupce. Pro každý obdélník, který zakrývá uvedené políčko, platí:

- jeho dolní strana leží pouze v jedné z vodorovných přímek 1, 2, ..., $i-1$, i, $(i \leq n)$, takže pro výběr dolní strany je i možností;
- jeho horní strana leží pouze v jedné z vodorovných přímek $i+1$, $i+2$, ..., n, $n+1$, takže pro výběr horní strany je $n+1-i$ možností;
- jeho levá strana leží pouze v jedné ze svislých přímek 1, 2, ..., $j-1$, j, $(j \leq n)$, takže pro výběr levé strany je j možností;
- jeho pravá strana leží pouze v jedné ze svislých přímek $j+1$, $j+2$, ..., n, $n+1$, takže pro výběr pravé strany je $n+1-j$ možností.



Obr. 3

Počet obdélníků, které zakrývají políčko v i-tém řádku a v j-tém sloupci, je tedy roven součinu $i \cdot (n+1-i) \cdot j \cdot (n+1-j)$.

Ověřme tento výsledek pro políčko K v síti 3×3 na obr. 2, pro které je $n = 3$, $i = 2$, $j = 2$. Dosazením do odvozeného vztahu dostaneme $2 \cdot (3+1-2) \cdot 2 \cdot (3+1-2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ obdélníků zakrývajících toto políčko, což je v souladu s výsledkem získaným výše.

Zjistili jsme tak, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci čtvercové sítě $n \times n$ je zapsáno číslo $i \cdot (n+1-i) \cdot j \cdot (n+1-j)$. Hledaný součet $S(n \times n)$ čísel ve všech políčkách této sítě určíme, když do tohoto výrazu nezávisle na sobě dosadíme za i, j čísla 1, 2, ..., n a získané součiny sečteme; dostaneme tak

$$S(n\times n)=\sum_{i,j=1}^{n} i(n+1-i)j(n+1-j)=\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)\cdot\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j).$$

K dalšímu výpočtu bude zapotřebí znát vzorec pro součet prvních n přirozených čísel a vzorec pro součet jejich druhých mocnin; první z nich je čtenáři jistě známý, druhý (viz např. [1]) možná také, ale pro jistotu připomeneme oba:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Jejich užitím dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)=(n+1)\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} i^2=$$

$$=\frac{(n+1)n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\binom{n+2}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že je

$$\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)=\sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)=\binom{n+2}{3},$$

platí pro součet

$$S(n\times n)=\binom{n+2}{3}\cdot\binom{n+2}{3}=\binom{n+2}{3}^2.$$

Tím je daný úkol splněn:

Součet $S(n\times n)$ čísel zapsaných do všech n^2 políček sítě $n\times n$ je dán výrazem $\binom{n+2}{3}^2$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že tento výsledek je v souladu se součty $S(2\times 2)$ a $S(3\times 3)$, které byly odvozeny v úvodu tohoto článku.

Literatura

[1] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.