55. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 3, 36–54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146537

SOUTĚŽE

55. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

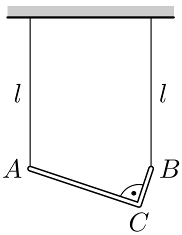
KATEGORIE A

1. Zavěšený nosník

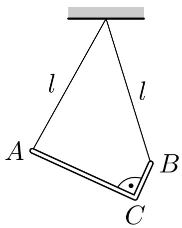
Homogenní nosník ve tvaru písmene L zanedbatelné tloušťky, jehož delší rameno má třikrát větší délku než rameno kratší a jehož celková délka je l a celková hmotnost m, je zavěšen na dvou svislých lanech stejné délky l (obr. 1).

a) Jakými silami $\boldsymbol{T}_A$ a $\boldsymbol{T}_B$ působí lana v bodech A a B?

b) Jakými silami budou lana působit, upevníme-li je v jednom bodě (obr. 2)?



Obr. 1



Obr. 2

2. Analýza pohybu

Pohyb rozjíždějícího se trolejbusu byl sledován zezadu laserovým dálkoměrem. První měření bylo provedeno krátce po startu, další vždy po jedné sekundě. Naměřené vzdálenosti zadního konce trolejbusu od sonaru jsou zapsány v tabulce:

t/s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s/m	5,5	6,7	8,5	11,5	15,3	20,0	25,5	31,8	38,5

a) Z naměřených hodnot sestrojte v Excelu (nebo v jiném vhodném programu) *xy bodový graf* a užitím *polynomické regrese* (stupně nejméně 5) nalezněte funkci vyjadřující závislost dráhy trolejbusu na čase v měřeném časovém úseku.
b) Dvojím derivováním této funkce určete vztahy vyjadřující, jak se v závislosti na čase měnily rychlost a zrychlení trolejbusu. Sestrojte grafy těchto funkcí.
c) Určete velikost rychlosti a zrychlení trolejbusu na začátku a na konci měřeného úseku.
d) Určete, jaké bylo největší zrychlení trolejbusu a kdy ho dosáhl.

3. Spalování vodíku

V pevné uzavřené nádobě o objemu $V = 50{,}0$ l je směs vodíku a kyslíku o celkové hmotnosti $m = 50{,}0$ g. V nádobě je tlak $p_1 = 3{,}0 \cdot 10^5$ Pa a teplota $t_1 = 20$ °C.

a) Jaká látková množství n_1 a n_2 vodíku a kyslíku jsou v nádobě?
b) Jaké teplo Q se uvolní při zažehnutí směsi elektrickou jiskrou? Výhřevnost vodíku je $H = 12{,}0 \cdot 10^7\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.
c) Jaký bude tlak p_2 v nádobě, když teplota (výměnou tepla s okolím) klesne na $t_2 = 100$ °C, a jaká bude při této teplotě hmotnost m_v zkondenzované vody?

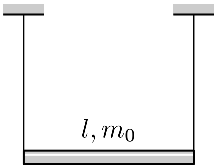
Řešte nejprve obecně, pak číselně. Normální atmosférický tlak je $p_\mathrm{a} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, molární hmotnost vodíku $M_\mathrm{m1} = 2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$, molární hmotnost kyslíku $M_\mathrm{m2} = 32{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Molární plynová konstanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$. V obecném řešení částí b) a c) považujte látková množství n_1 a n_2 za známé.

4. Zvučící dráty

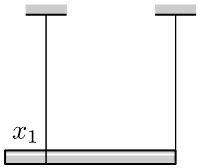
Tyč délky l a hmotnosti m_0 je svými konci zavěšena na dvou stejných drátech (obr. 3). Při tomto zatížení každý z drátů po drnknutí vydává základní tón výšky c v přirozeném ladění, tj. tón s frekvencí $f_\mathrm{c} = 264$ Hz.

a) Nyní levý závěs posunujeme k pravému závěsu (obr. 4) tak, aby dráty zněly v intervalu kvarty, tj. poměr frekvencí tónů levého a pravého drátu je $f_1/f_2 = 4/3$. Určete posunutí x_1 levého drátu a frekvence f_1 a f_2.
b) V původním uspořádání zavěsíme na tyč závaží (obr. 5). Určete hmotnost m závaží a vzdálenost x_2 místa jeho zavěšení od levého konce tyče, aby po drnknutí levý drát vydával tón e a pravý

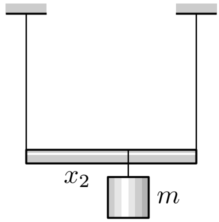
drát tón g. Poměr frekvencí tercie c–e je $f_\mathrm{e}/f_\mathrm{c} = 5/4$, kvinty c–g $f_\mathrm{g}/f_\mathrm{c} = 3/2$. Frekvence tónu je přímo úměrná odmocnině z velikosti napínající síly, tj. $f = k\sqrt{F}$.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

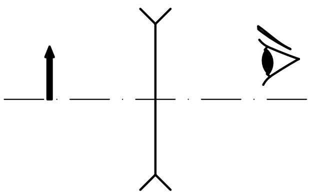
5. Rozptylka a zrcadlo

a) Přes rozptylku o ohniskové vzdálenosti f pozorujeme předmět kolmý k optické ose (obr. 6). Do jaké vzdálenosti od čočky musíme předmět umístit, aby jeho zdánlivý obraz vytvořený čočkou byl dvakrát zmenšený, tj. aby příčné zvětšení bylo $Z_1 = 1/2$? Určete též polohu obrazu.

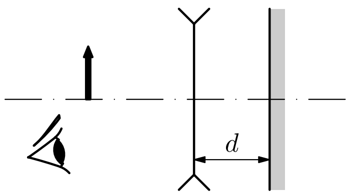
b) Za rozptylku umístíme kolmo na optickou osu rovinné zrcadlo do vzdálenosti d od čočky a budeme pozorovat obraz předmětu vytvořený paprsky, které po průchodu rozptylkou a odrazu od zrcadla znovu prošly rozptylkou (obr. 7). Kde se bude nacházet a jaké bude jeho výsledné příčné zvětšení?

c) Jak bychom museli zvolit vzdálenost d, aby byl výsledný obraz čtyřikrát menší než předmět? Kde v tomto případě výsledný obraz uvidíme?

V případech a), b) nakreslete také obrázky znázorňující průchod paprsků čočkou.



Obr. 6



Obr. 7

6. *Praktická úloha*: **Měření vzájemné indukčnosti**

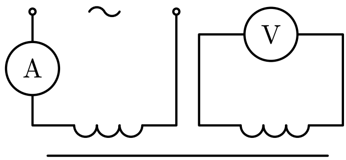
Teorie: V cívce o indukčnosti L vznikne při průchodu proudu i celkový magnetický tok (součet magnetických toků všech závitů) $\Phi_\mathrm{c} = Li$. Mějme dvě cívky o indukčnostech L_1 a L_2 umístěné tak, aby magnetické pole první cívky zasahovalo do závitů druhé cívky a naopak. Prochází-li první cívkou proud i_1, vznikne v druhé cívce magnetický tok $\Phi_{12} = M_{12}i_1$ a naopak, jestliže druhou cívkou prochází proud i_2, vznikne v první cívce magnetický tok $\Phi_{21} = M_{21}i_2$. Dá se dokázat, že platí $M_{12} = M_{21} = M$. Veličina M se nazývá *vzájemná indukčnost* cívek.

Úkol:

Určete vzájemnou indukčnost dvou cívek z rozkladného transformátoru o 600 a 1 200 závitech, které jsou navléknuty na dlouhém rovném jádru a vzájemně se dotýkají.

Provedení úlohy:

1. způsob: Do první cívky přivedeme přes ampérmetr střídavý proud o frekvenci 50 Hz ze síťového transformátoru a k druhé cívce připojíme voltmetr (obr. 8).



Obr. 8

Změny proudu v první cívce indukují v druhé cívce napětí. Platí

$$\Phi_2 = Mi_1 = MI_{1\mathrm{m}} \sin \omega t,$$

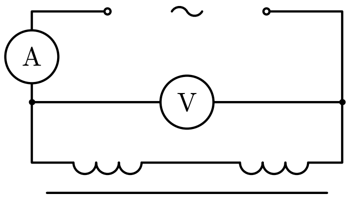
$$u_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -MI_{1\mathrm{m}}\omega \cos \omega t = -U_{2\mathrm{m}} \cos \omega t,$$

$$M = \frac{U_{2\mathrm{m}}}{\omega I_{1\mathrm{m}}} = \frac{U_2}{\omega I_1},$$

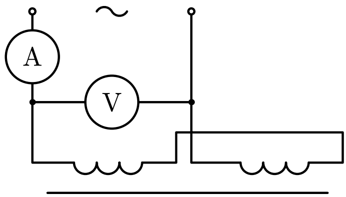
kde U_2 a I_1 jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, které přečteme na měřicích přístrojích. Primární cívku volte a) s 600 závity, b) s 1 200 závity. Každé měření proveďte pětkrát při různých hodnotách proudu. Jako zdroj proudu použijte síťový transformátor s odbočkami na sekundárním vinutí nebo regulujte proud reostatem. Nepřekročte maximální hodnoty proudu vyznačené na cívkách.

2. způsob: Sériovým spojením obou cívek dostaneme jedinou cívku o indukčnosti $L_\mathrm{A} = L_1 + L_2 + 2M$ (obr. 9), nebo o indukčnosti $L_\mathrm{B} = L_1 + L_2 - 2M$ (obr. 10). V obou případech má výsledná cívka také rezistanci rovnou součtu $R_1 + R_2$ odporů obou vinutí a pro její impedanci a indukčnost platí

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\omega^2 L^2 + (R_1 + R_2)^2}, \qquad L = \frac{\sqrt{Z^2 - (R_1 + R_2)^2}}{\omega}.$$



Obr. 9



Obr. 10

Měřením podle obr. 9 a 10 určíme L_A a L_B. Pak

$$M = \frac{L_\mathrm{A} - L_\mathrm{B}}{4}.$$

Také měření podle obr. 9 a 10 proveďte pětkrát při různých hodnotách proudu. Odpory vinutí R_1 a R_2 změřte ohmmetrem nebo pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu stejnosměrného proudu.

Výsledky získané oběma způsoby porovnejte.

7. Kosmologický rudý posuv

Velikost rudého posuvu spektrálních čar ve spektrech astronomických objektů se udává číslem

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

kde λ_0 je vlnová délka ve vztažné soustavě spojené se zdrojem záření a λ vlnová délka změřená pozemským spektrometrem.

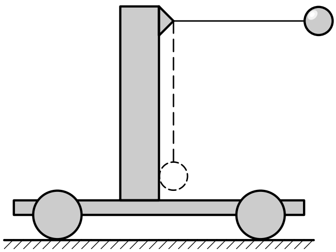
a) Jakou rychlostí v by se od nás musel vzdalovat objekt, abychom v jeho spektru změřili rudý posuv $z = 0{,}20$?
b) Za jakou dobu by takto rychle letící objekt urazil dráhu 30 *kpc* rovnou průměru spirálního disku naší Galaxie?

c) Nechť na daném objektu proběhly dvě soumístné události, zaregistrované přijetím signálů, které na Zem dorazily s časovým odstupem $\tau = 150$ hodin. Jakou dobu τ_0 mezi oběma událostmi by změřil pozorovatel pohybující se s daným objektem?
d) Jaká doba τ_1 uplynula mezi oběma událostmi podle pozorovatele na Zemi?
e) Porovnejte klidovou a kinetickou energii daného objektu ve vztažné soustavě spojené se Zemí.

KATEGORIE B

1. Kyvadlo na vozíku

Na vodorovných kolejničkách se nachází vozík o hmotnosti M. Na vozík zavěsíme kyvadlo tvořené nití zanedbatelné hmotnosti a kuličkou o hmotnosti m a vychýlíme je o úhel 90° (obr. 1). Součet délky závěsu a poloměru kuličky je l. Po uvolnění kulička narazí dokonale nepružně do vozíku.



Obr. 1

a) Určete změnu polohy Δx a pohybový stav vozíku po dokonale nepružném nárazu kyvadla do vozíku. Zdůvodněte.
b) Určete největší velikost V rychlosti vozíku vzhledem k zemi.
c) Určete velikost F tahové síly působící na nit bezprostředně před nárazem.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l = 0{,}20$ m, $M = 4m$.

2. Plyn ve válci s pístem a pružinou

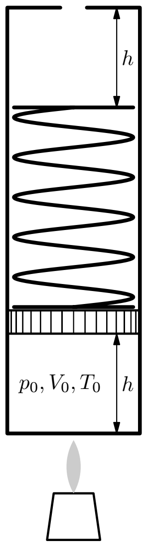
Ve válcové nádobě s malým otvorem v horní podstavě je volně pohyblivým pístem zanedbatelné hmotnosti uzavřen ideální dvouatomový plyn. Uvnitř nádoby nad pístem je tlačná pružina o tuhosti k. V počátečním stavu má plyn objem V_0, tlak p_0 a teplotu T_0, píst se nachází ve výšce h nad dnem nádoby, mezi horním koncem pružiny a horním víkem je též vzdálenost h (obr. 2). Nyní plyn zahřejeme tak, že se jeho objem ztrojnásobí.

a) Určete konečný tlak p_1 a konečnou teplotu T_1.
b) Určete práci W', kterou plyn při rozpínání vykonal.
c) Určete teplo Q, které plyn přijal.

Ideální plyn s dvouatomovými molekulami má vnitřní energii

$$U = \frac{5}{2}nRT.$$

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty
$p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa,
$V_0 = 1{,}50 \cdot 10^{-3}$ m^3,
$T_0 = 293$ K,
$h = 0{,}120$ m,
$k = 3\,000$ N $\cdot$ m^{-1}.



Obr. 2

3. Hod míčkem

Honza se snaží přehodit míčkem zeď, která má výšku $H = 5{,}0$ m. Stojí přitom ve vzdálenosti $L = 4{,}0$ m před zdí a míček pouští ve chvíli, kdy je jeho ruka ve výšce $h = 2{,}0$ m nad zemí.

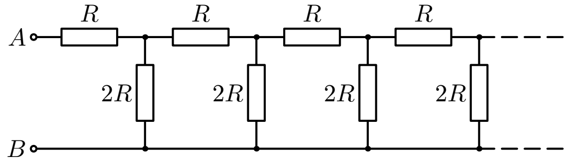
a) Jakou počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ musí Honza hodit míček, aby přeletěl zeď, má-li její velikost v_0 být co nejmenší? Jaký musí přitom zvolit elevační úhel α_0?
b) Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti za zdí dopadne takto vržený míček na zem?
c) Jaká bude velikost rychlosti dopadu v_1 a úhel dopadu α_1?
d) Určete polohu nejvyššího bodu trajektorie.

Tloušťku zdi, průměr míčku a odpor vzduchu zanedbejte.

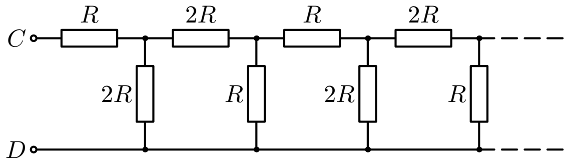
Poznámka: Řešitelům doporučujeme studijní text *Vrhy* (knihovnička FO č. 56).

4. Nekonečné sítě

Vypočtěte elektrické odpory R_{AB}, R_{CD} nekonečných sítí znázorněných a) na obr. 3, b) na obr. 4.



Obr. 3



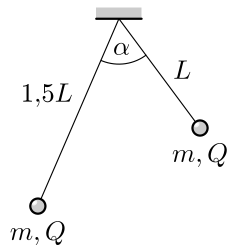
Obr. 4

5. Nabité kuličky

Dvě stejné kuličky zanedbatelných rozměrů, každá o hmotnosti $m = 0{,}10$ g, jsou zavěšeny v témže bodě na tenkých nevodivých vláknech různých délek a nabity stejným nábojem Q. Jedno vlákno má délku $L = 10$ cm, druhé délku $1{,}5L$ a navzájem svírají úhel $\alpha = 60^\circ$ (obr. 5). Určete:

a) velikost náboje kuliček,

b) velikosti sil, které napínají vlákna.



Obr. 5

6. *Praktická úloha*: **Voltampérová charakteristika žárovky**

Úkoly:

a) Proměřte pečlivě voltampérovou charakteristiku žárovky na malé napětí, tj. závislost $I = I(U)$, a ověřte, že splňuje tzv. „třípětinový zákon“

$$I \approx C \cdot U^{\frac{3}{5}}, \qquad (*)$$

kde C je konstanta dané žárovky.

Ověření proveďte programem Excel
1) lineární regresí,
2) mocninnou regresí naměřených hodnot.

b) Odvoďte vztah (∗) z poznatků, že odpor R wolframového vlákna je přibližně přímo úměrný jeho termodynamické teplotě T a zářivý tok (zářivý výkon) žárovky Φ je podle Stefanova–Boltzmannova zákona přímo úměrný čtvrté mocnině termodynamické teploty vlákna. Platí tedy $R = AT$, $\Phi = BT^4$, kde A a B jsou pro danou žárovku konstanty.

Pomůcky: žárovka na malé napětí (např. 6 V/0,2 A; 24 V/0,1 A apod.), napájecí zdroj, reostat, voltmetr, ampérmetr, spojovací vodiče

Poznámky ke zpracování výsledků měření programem Excel:

1) Pro použití *lineární regrese* linearizujeme mocninnou závislost

$$I = CU^n$$

přechodem k číselným hodnotám a logaritmováním, čímž dojdeme ke vztahu

$$\log\{I\} = \log\{C\} + n\log\{U\}.$$

Tabulku naměřených hodnot proudu a napětí doplníme o sloupce logaritmů:

$\frac{U}{\text{V}}$	$\frac{I}{\text{mA}}$	$\log\{U\}$	$\log\{I\}$

Kurzorem označíme sloupce s hodnotami $\log\{U\}$ a $\log\{I\}$ a z nabídky *Graf* zvolíme typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů), čímž se zobrazí soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich z nabídky zvolíme *Přidat spojnici trendu* a vybereme *Typ trendu a regrese lineární*. Tím se zobrazí přímka, která proloží zobrazené body v grafu. Zobrazíme též *Rovnici regrese* a *Hodnotu spolehlivosti*. Rovnice získané přímky se zobrazí ve tvaru $y = kx + q$, kde k je hledaný exponent ve vztahu (∗). Číselnou hodnotu konstanty C dané žárovky určíme jako 10^q. Hodnota *koeficientu determinace* R^2 dává informaci o tom, do jaké míry skutečný průběh vyšetřované závislosti odpovídá hypotéze. Pokud se blíží k jedné, můžeme hypotézu považovat za potvrzenou.

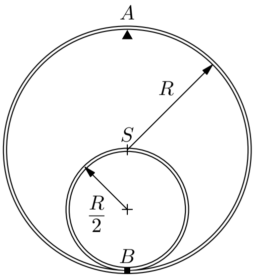
2) Pohodlněji zpracujeme naměřené hodnoty, jestliže použijeme první dva sloupce tabulky a zvolíme *Typ trendu a regrese mocninný*. Jinak postupujeme stejně jako při lineární regresi. Rovnice regrese bude mít tvar $y = Cx^n$, který odpovídá ověřovanému vztahu $(*)$ a grafem je odpovídající křivka. Koeficient determinace vyjde stejný jako při lineární regresi.

7. Kmitání spojených obručí

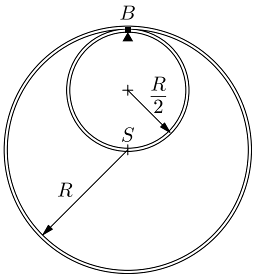
Uvnitř tenké kovové obruče o hmotnosti M a o poloměru R je v bodě B pevně připojena obruč s poloměrem $R/2$ o stejném obdélníkovém průřezu a ze stejného materiálu (obr. 6).

a) Spojené obruče podepřeme v bodě A a mírně rozkmitáme (obr. 6).
b) Spojené obruče podepřeme v bodě B a mírně rozkmitáme (obr. 7).
c) Spojené obruče postavíme bodem B na vodorovnou podložku a mírně vychýlíme (obr. 8).

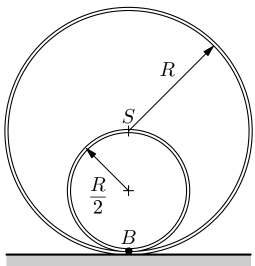
Jaké budou doby kmitu v jednotlivých případech? Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $R = 30$ cm.



Obr. 6



Obr. 7



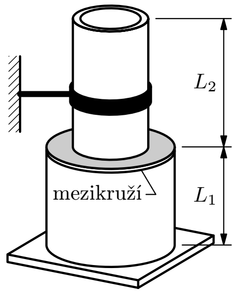
Obr. 8

KATEGORIE C

1. Nádoba z trubek

Dva zbytky trubek různých délek L_1 a L_2 a různých vnitřních průřezů S_1 a S_2, odříznuté kolmo k ose, byly svařeny s mezikružím z tenkého plechu tak, aby měly společnou osu. Takto vzniklá nádoba byla upevněna vertikálně, širší část dole (obr. 1). Zespoda je k nádobě přitlačována záklopka. Aby záklopka neodpadla, musí na ni zdola působit síla o velikosti nejméně F_0. Když do nádoby nalijeme vodu o objemu V_0, zvýší se minimální síla potřebná k udržení záklopky na dvojnásobek. Když přidáme znovu vodu o objemu V_0, zvýší se síla potřebná k udržení záklopky opět na dvojnásobek, tedy na $4F_0$. Když pak přidáme ještě vodu o objemu $3/8V_0$, zvětší se minimální síla potřebná k udržení záklopky o F_0 a nádoba bude plná.

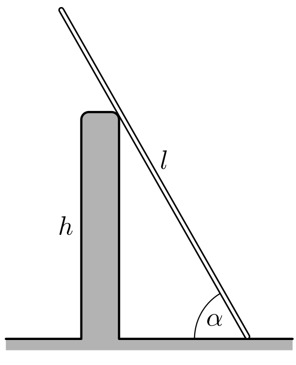
a) Jaký je poměr průřezů trubek $S_1 : S_2$?
b) Jaký je poměr délek trubek $L_1 : L_2$?
c) Vodu vylijeme, nádobu obrátíme a zespodu opět přitlačíme záklopku o stejné hmotnosti stejnou minimální silou. Jak se změní minimální síla, kterou musíme záklopku přidržovat, přidáme-li vodu o objemu V_0, znovu o objemu V_0 a po doplnění nádoby po horní okraj?



Obr. 1

2. Lať opřená o zeď

Lať o délce l a hmotnosti m je opřena o zeď výšky $h = 0{,}6l$ tak, že s vodorovnou rovinou svírá úhel α (obr. 2). Těžiště latě je uprostřed, horní konec latě přesahuje přes zeď. Horní konec zdi je hladký, takže mezi ním a latí nevzniká tření.



Obr. 2

a) Určete velikost a směr síly, kterou lať působí dolním koncem na vodorovnou rovinu.
b) Jaký musí být součinitel f smykového tření mezi dolním koncem lati a vodorovnou rovinou, aby lať nesklouzla dolů?

3. Brzdění automobilů

Osobní automobil pohybující se rychlostí $v_1 = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ dojíždí nákladní automobil pohybující se rychlostí $v_2 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. V okamžiku, kdy se nachází ve vzdálenosti $L = 15$ m za nákladním automobilem, začne brzdit se zrychlením o velikosti $a = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Na jakou minimální vzdálenost l_{min} se automobily přiblíží?
b) Jakou nejvyšší rychlostí $v_{1\mathrm{m}}$ může jet osobní automobil před začátkem brzdění, aby nedošlo ke srážce?
c) Jak se změní výsledky a) a b), začne-li nákladní automobil brzdit současně s osobním automobilem, ale může brzdit jen se zrychlením o velikosti $a/2$?

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

4. Kulička ve vagónu

Vagón tažený lokomotivou se začal z klidu rozjíždět po přímých vodorovných kolejích rovnoměrně zrychleným pohybem. Pozorovatel ve vagónu zjistil, že mezi přední a zadní stěnou vagónu je vzdálenost $l = 18{,}0$ m a že malá plná homogenní kulička, která se na počátku nacházela u přední stěny vagónu, během rozjíždění přejela za dobu $t = 12{,}0$ s k zadní stěně. Po nepružném nárazu na zadní stěnu se neodrazila a zůstala na místě.

a) Určete velikost a_0 zrychlení vagónu.
b) Určete dráhu s ujetou vagónem během pohybu kuličky ve vagónu.
c) Určete velikost v_1 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně před nárazem a velikost v_2 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně po nárazu.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Valivý odpor a odpor vzduchu při pohybu kuličky zanedbejte. Moment setrvačnosti koule je $\frac{2}{5}mr^2$.

5. Ohřev vody

Ve varné konvici s užitečným tepelným výkonem $P = 2\,000$ W uvedeme do varu vodu o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg. Voda nalévaná do konvice má vždy počáteční teplotu $t_0 = 20$ °C. V průběhu ohřívání občas zjistíme, že k uvaření čaje či kávy potřebujeme více nebo naopak méně vody, než jsme původně do varné konvice nalili. Uvažujme tři režimy ohřívání:

a) Vodu o hmotnosti $m = 1{,}00$ kg uvedeme do varu najednou.
b) Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_1 = 0{,}60$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C přidáme vodu o hmotnosti $m_2 = 0{,}40$ kg.
c) Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_0 = 1{,}40$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C odlijeme vodu o hmotnosti $m_2 = 0{,}40$ kg.

Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti teploty vody v konvici na čase pro jednotlivé režimy ohřívání.

Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, teplota varu vody $t_\mathrm{v} = 100$ °C. Únik tepla do okolí zanedbáváme.

6. *Praktická úloha*: **Studium modelu plynu v nádobě**

Úloha navazuje na článek 1.5 v učebnici Bartuška, K., Svoboda, E.: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. Pozorně jej prostudujte.

Mějme nádobu, kterou symbolicky rozdělíme na dvě části stejného vnitřního objemu. Do nádoby napustíme plyn s počtem N částic stejného druhu a budeme v náhodně vybraných okamžicích zjišťovat počet N_l částic v levé polovině nádoby a počet N_p částic v pravé polovině nádoby ($N_\mathrm{l} + N_\mathrm{p} = N$). Provedeme simulační experiment s náhodným rozdělením 7 částic v levé a v pravé polovině nádoby.

Úkoly:

a) Rozdělení 7 částic budete simulovat házením 7 stejných mincí. Předem dohodou stanovíme, že dopad konkrétní mince lícem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v levé polovině nádoby a dopad rubem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v pravé polovině nádoby. Všech 7 mincí vezmeme do dlaní, důkladně protřepeme a hodíme na vodorovnou ohraničenou plochu. Po dopadu zjistíme počet N_l mincí, které dopadly lícem navrch, a počet N_p mincí, které dopadly rubem navrch. Výsledek pokusu, tj. rozdělení na N_l a N_p, zaznamenáme čárkou v příslušném řádku 2. sloupce tabulky.

Takto provedeme nejméně 220 pokusů. Poté zapíšeme počty čárek v jednotivých políčkách. V 3. sloupci spočteme změřenou pravděpodobnost, tj. poměr počtu konkrétního stavu a celkového počtu pokusů, výsledek vyjádříme desetinným číslem zaokrouhleným na 3 platné číslice. V posledních dvou sloupcích uvedeme výsledky teoretické pravděpodobnosti, tj. poměr předpokládaného počtu stavů s daným rozdělením a počtu stavů všech možných rozdělení. Tento teoretický rozbor až pro 4 částice je uveden ve zmíněné učebnici.

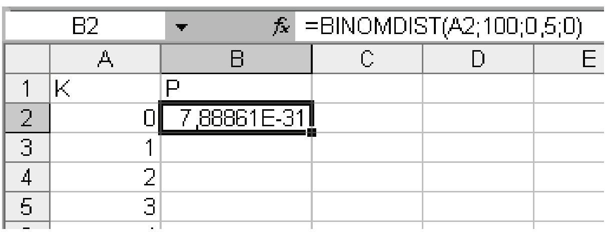
$N_l - N_p$	Změřený počet stavů	Změřená pravděpodobnost	Teoretická pravděpodobnost	
	Čárky – počet	Desetinné číslo (3 platné číslice)	Zlomek	Desetinné číslo (3 platné číslice)
0 – 7				
1 – 6				
2 – 5				
3 – 4				
4 – 3				
5 – 2				
6 – 1				
7 – 0				
Součet				

b) Sestrojte v Excelu sloupcové grafy závislosti změřené a teoretické pravděpodobnosti rozdělení na počtu částic ve zvolené (levé) polovině nádoby (oba grafy v jednom obrázku).

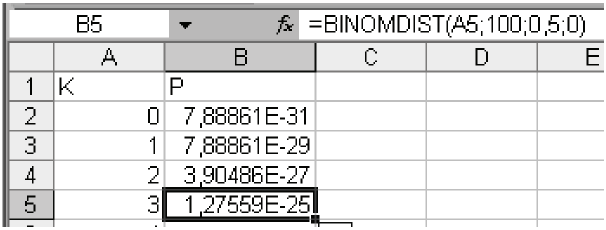
Statistika, kterou vyšetřujeme, patří mezi *binomická rozdělení*. Teoretická pravděpodobnost, že ve zvolené polovině nádoby bude K částic z celkového počtu N, je

$$p(K,N) = \frac{\binom{N}{K}}{2^N} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-K)}{2^N \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot K}.$$

V Excelu ji můžeme vypočítat pomocí statistické funkce BINOMDIST, kam jako parametry dosadíme K; N; 0,5; 0. Chceme-li například vypočítat rozdělení pravděpodobnosti pro $N = 100$, použijeme tabulku podle obr. 3. Do prvního sloupce vložíme čísla od 0 do 100 a do buňky B2 funkci BINOMDIST s parametry A2; 100; 0,5; 0 (obr, 3a). Druhý sloupec pak vypočítáme posouváním vyplňovacího táhla (obr. 3b). Z vyplněné tabulky pak vytvoříme *xy bodový graf.*



Obr. 3a



B5 =BINOMDIST(A5;100;0,5;0)

	A	B	C	D	E
1	K	P			
2	0	7,88861E-31			
3	1	7,88861E-29			
4	2	3,90486E-27			
5	3	1,27559E-25			

Obr. 3b

c) Vyšetřete rozdělení teoretické pravděpodobnosti pro různá N a výsledky porovnejte. Zformulujte závěr, který vyplývá pro skutečné, tj. obrovské soubory částic (řádově 10^{23}).

7. Lyžař

Lyžařskou sjezdovou dráhu můžeme modelovat nakloněnou rovinou o stálém úhlu sklonu $\alpha = 17{,}5°$ k vodorovné rovině. Mezi nadmořskou výškou startu a cíle je rozdíl $h = 630$ m. Na startu je připraven závodník o hmotnosti $m = 80$ kg. Součinitel smykového tření mezi skluznicí a svahem je $f = 0{,}070$. Aerodynamické vlastnosti lyžaře charakterizuje odporový součinitel $C = 0{,}70$ a obsah řezu kolmého ke směru pohybu $S = 0{,}70\ \mathrm{m}^2$. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}25\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

a) Určete, s jakým zrychlením by se lyžař pohyboval, jaké rychlosti by dosáhl v cíli a jak dlouho by jel po této dráze, kdyby na něj nepůsobily žádné odporové síly.
b) Zjistěte, zda samotné smykové tření podstatně ovlivní výsledky z úlohy a).
c) Při větších rychlostech se při jízdě výrazně projeví vliv odporu vzduchu. Stanovte, jaké největší rychlosti lyžař dosáhne, a odhadněte, jak dlouho by jízda trvala, kdyby ji skoro celou absolvoval touto rychlostí.

Úlohu řešte nejprve obecně a pak pro dané hodnoty.

KATEGORIE D

1. Dva automobily před přechodem pro chodce

Světelný semafor na přechodu pro chodce je nastaven tak, že s určitým zpožděním po stisknutí tlačítka chodcem se pro provoz vozidel rozsvítí po zelené na dobu 1,0 s žlutá, na dobu 14,0 s červená, na dobu 1,0 s žlutá a pak opět zelená. K přechodu přijížděly dva automobily ve dvou jízdních pruzích vedle sebe rychlostí o velikosti 50 km/h. Oba začaly zpomalovat v okamžiku rozsvícení červené barvy. První automobil za dobu 7,0 s rovnoměrně zpomaleného pohybu snížil rychlost na 30 km/h a za další dobu 4,0 s rovnoměrně zpomaleného pohybu zastavil přesně na hranici přechodu. Druhý automobil rovnoměrně zpomaleným pohybem zmenšil rychlost za dobu 3,0 s na 20 km/h a poté se stále pohyboval rovnoměrně.

a) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase každého automobilu po dobu svícení červeného světla.
b) Rozhodněte, na jakou barvu světla semaforu vjel druhý automobil na přechod.

2. Rozjezd vlaku do tunelu

Dva chlapci, David a Jakub, se zajímali o železnice. Pozorovali vlak stojící na semaforu, který se nacházel v jisté vzdálenosti před tunelem. Z délky vagónů a lokomotivy věděli, že délka celého vlaku je 270 m. David během rozjíždění vlaku naměřil čas posunutí vlaku z klidu o jeho vlastní délku 60 s. Jakub na svých stopkách zjistil, že vjezd do tunelu trval 36 s. Během celého pozorování se vlak rozjížděl rovnoměrně zrychleným pohybem.

a) Z uvedených údajů postupnými výpočty určete velikost rychlosti, kterou měl vlak v okamžiku, kdy se celý ocitl v tunelu.
b) Označme d délku vlaku, t_1 čas změřený Davidem, t_2 čas změřený Jakubem a v_2 hledanou rychlost. Úlohu a) vyřešte obecně a poté ve výsledném vzorci proveďte zkoušku z hlediska jednotek (tzv. rozměrovou zkoušku). Dosazením zkontrolujte číselný výsledek získaný v části a).

3. Kolotoč

Malý Pavlík o hmotnosti $m = 21$ kg sedí na kolotoči, který se otáčí rovnoměrně s periodou $T = 6{,}0$ s. Poloměr kružnice, po které se pohybuje, je $r = 3{,}1$ m.

a) Určete velikost a_d dostředivého zrychlení.
b) Určete velikost F_G tíhové síly a velikost F celkové síly, které na Pavlíka působí, a úhel α mezi těmito silami $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{F}$.
c) Kolotoč zastaví rovnoměrně zpomaleným pohybem za dobu $t = 9{,}0$ s. Určete velikost a_t tečného zrychlení během zastavování a úhel φ ve stupních, který Pavlík během zastavování kolotoče opíše.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

4. Bedna na nakloněné rovině

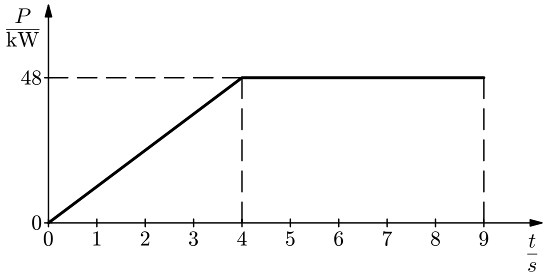
Dva brigádníci měli naložit na korbu automobilu ve výšce $h = 1{,}40$ m dřevěnou bednu o hmotnosti $m = 90$ kg a po dopravě do cílového místa ji opět složit. K naložení a ke složení měli k dispozici fošny délek $l_1 = 2{,}80$ m a $l_2 = 4{,}80$ m. Součinitel smykového tření mezi bednou a fošnou je $f = 0{,}45$.

a) Kterou fošnu musí použít, aby bednu při nakládání na korbu vytlačili menší silou?
b) Kterou fošnu musí použít, aby k vytlačení bedny vykonali menší práci?
c) Stejným způsobem porovnejte velikosti sil a práci při skládání bedny.

Všechny závěry podložte výpočty.

5. Rozjezd automobilu s daným časovým průběhem výkonu

Automobil o hmotnosti $m = 1\,400$ kg se rozjíždí z klidu. Jeho okamžitý užitečný výkon závisí na čase podle grafu:



Obr. 1

a) Určete velikost v_1 rychlosti v čase $t_1 = 4{,}0$ s a velikost v_2 rychlosti v čase $t_2 = 9{,}0$ s. Využijte obsah plochy pod grafem.
b) Do tabulky doplňte v jednotlivých časech kinetickou energii E_k automobilu a velikost v okamžité rychlosti. Poté sestrojte graf závislosti rychlosti na čase.

$\frac{t}{\text{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{E_k}{\text{kJ}}$										
$\frac{v}{\text{m·s}^{-1}}$										

c) Rozhodněte, na kterém úseku byl pohyb automobilu rovnoměrně zrychlený, a určete velikost a jeho zrychlení. Na zbývajícím úseku určete průměrné zrychlení a_p automobilu. Průměrným zrychlením rozumíme podíl přírůstku velikosti rychlosti a odpovídajícího časového intervalu.

6. *Praktická úloha*: **Studium pohybu kuličky po nakloněné rovině**

Úkol:

Určete velikost zrychlení pohybu kuličky po nakloněné rovině grafickou metodou.

Pomůcky:

lišta se žlábkem, kulička, délkové měřidlo, stopky

Návod:

Lištu délky aspoň 160 cm na jednom konci podložíme tak, aby doba proběhnutí kuličky po celé liště byla zhruba 3 s až 5 s. V dolní části lišty zvolíme pro všechna měření cílovou polohu a od ní naměříme úseky např. po 25 cm tak, aby se jich na délku lišty vešlo aspoň 6. Během měření budeme dráhu postupně o jeden úsek zvětšovat. Na každé dráze provedeme 5 měření časů, z nichž vypočteme aritmetický průměr. Ke stabilizaci kuličky na startu použijeme vhodné těleso, např. dřevěný kvádr ze stavebnice, které v okamžiku startu kuličky uvolníme. Čas průchodu kuličky cílem lze registrovat též použitím kvádru na úrovni cílové čáry, kdy stopky stiskneme v okamžiku nárazu. Dráhy a časy zapíšeme do tabulky:

$\frac{s}{\mathrm{m}}$	$\frac{t_1}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_2}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_3}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_4}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_5}{\mathrm{s}}$	$\frac{\bar{t}}{\mathrm{s}}$	$\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$
0	-	-	-	-	-	0	0
0,25							
0,50							
0,75							
1,00							
1,25							
1,50							

Zpracování výsledků:

Pomocí počítačového programu Excel sestrojíme graf závislosti okamžité rychlosti na uražené dráze. Nejprve vytvoříme tabulku a zapíšeme do ní naměřená data, tj. hodnoty dráhy s a naměřených časů t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, a to včetně nulové dráhy. Do dalších dvou sloupců vložíme vzorec pro výpočet aritmetického průměru $\bar{t}$ pěti naměřených časů a vzorec pro výpočet konečné okamžité rychlosti v z dráhy s a z průměrného času $\bar{t}$.

Kurzorem označíme dvojici sloupců s hodnotami $\bar{t}$ a v a vložíme *Graf*. Zvolíme typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů), čímž se zobrazí soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich z nabídky zvolíme *Přidat spojnici trendu* a vybereme *Typ trendu a regrese lineární*. V nabídce Možnosti volíme $y = 0$. Tím se zobrazí přímka vycházející z počátku, která proloží zobrazené body v grafu.

Zobrazíme též *Rovnici regrese*, tj. rovnici získané přímky. Ta se zobrazí ve tvaru $y = kx$, což je rovnice přímé úměrnosti s konstantou (směrnicí) k. Podle rovnice $v = at$ je směrnice přímky hledaná velikost zrychlení a. Graf přeneseme do protokolu a zformulujeme závěr.

7. Dvě družice Země

Dvě družice A a B se pohybují po kruhových trajektoriích v rovině rovníku kolem Země. Družice A oběhne Zemi přesně 12krát za sluneční den (tj. přesně za 24 hodin), družice B přesně 13krát. Rovníkový poloměr Země je $R = 6\,378$ km. Hmotnost Země je $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

a) Která družice má větší úhlovou rychlost a která větší obvodovou rychlost? Zdůvodněte.

b) Určete minimální a maximální vzdálenost mezi družicemi.

c) Určete největší celočíselný počet oběhů, které může družice na kruhové trajektorii kolem Země za dobu 24 hodin vykonat, a odpovídající výšku h_1 nad zemským povrchem, jestliže tato výška z důvodu atmosféry nesmí být menší než 400 km.