54. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 3, 30–47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146483

54. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Momenty setrvačnosti

Homogenní deska tvaru trojúhelníku o stranách délek a, b, c a o hmotnosti m má vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo k rovině desky moment setrvačnosti

$$J_0 = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$

a) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru pravidelného šestiúhelníku o straně délky a a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.
b) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru čtverce o straně délky a a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.
c) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru pravidelného n-úhelníku o poloměru r kružnice opsané a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.
d) Ověřte výsledky úloh a), b) užitím výsledku úlohy c).
e) Pomocí výsledku úlohy c) odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru kruhu o poloměru r a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.

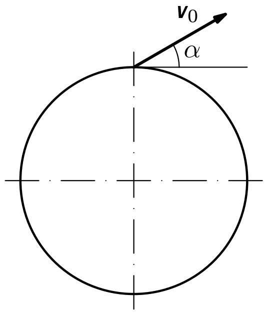
K řešení využijte *Steinerovu větu.* Všechny momenty setrvačnosti odvoďte vzhledem k ose kolmé k rovině desky.

2. Vrh šikmo vzhůru v radiálním gravitačním poli Země

Střela je vystřelena šikmo vzhůru z povrchu Země pod úhlem α vzhledem k tečné rovině povrchu (obr. 1) počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, jejíž velikost je rovna polovině velikosti 1. kosmické rychlosti. Určete

a) největší výšku nad povrchem Země, které střela dosáhne.

b) velikost rychlosti střely v okamžiku, kdy dosáhne maximální výšky.
c) Jak by se změnily výsledky úloh a) a b), pokud by těleso bylo vrženo šikmo vzhůru pod stejným úhlem první kosmickou rychlostí?



Obr. 1

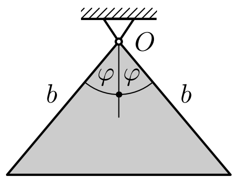
Při řešení části a) a b) počítejte se zakřivením povrchu Země (Zemi považujte za kouli). Vliv atmosféry a rotaci Země zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha = 30°$, $R_Z = 6\,400$ km.

3. Trojúhelníkové kyvadlo

Homogenní desku tvaru rovnoramenného trojúhelníku s ramenem délky b a úhlem u hlavního vrcholu 2φ připevníme hlavním vrcholem k vodorovné ose otáčení kolmé k rovině desky, čímž získáme kyvadlo (obr. 2).

a) Určete periodu jeho kmitů s malou amplitudou výchylky.
b) Určete, jakou velikost musí mít úhel φ, aby doba kyvu byla 1,00 s.

Úlohu a) řešte obecně, úlohu b) číselně pro $b = 1{,}20$ m.



Obr. 2

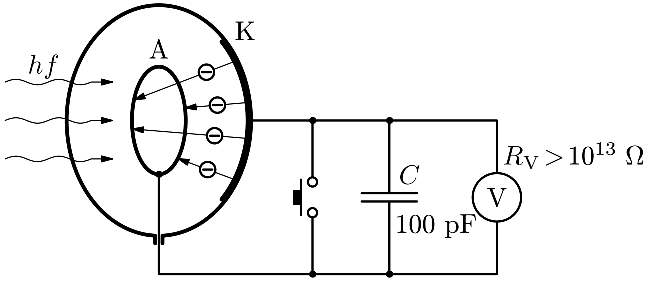
Pro stanovení momentu setrvačnosti desky můžete použít vzorec (1) uvedený v první úloze.

4. Měření Planckovy konstanty

Osvětlíme-li katodu vakuové fotonky zapojenou podle obr. 3 monochromatickým světlem o frekvenci vyšší, než je mezní frekvence f_0, zachycují se některé elektrony vyražené z katody na anodě, která se nabíjí záporně. Obvodem prochází nepatrný proud a napětí na fotonce a připojeném kondenzátoru s kvalitním dielektrikem se zvyšuje, až dosáhne brzdného napětí U_0, kdy ani kinetická energie nejrychlejších vyražených elektronů nepostačí k překonání energetického rozdílu $U_0 e$. Napětí měříme voltmetrem s velkým vstupním odporem.

Fotonka byla postupně osvětlena paprsky spektra rtuťové výbojky o různých vlnových délkách. Změřené hodnoty brzdného napětí jsou zapsány v tabulce:

λ/nm	576,0	546,1	491,6	435,8	404,7
U_0/V	0,405	0,530	0,750	1,120	1,310



Obr. 3

a) Ověřte, že závislost brzdného napětí na frekvenci světla je lineární v souladu s Einsteinovou rovnicí pro fotoelektrický jev. Vypočítané hodnoty frekvencí a změřené hodnoty brzdného napětí vyneste do grafu v Excelu a získanými body proložte přímku. Její rovnici určete lineární regresí.*)
b) Z rovnice určete mezní vlnovou délku λ_0, výstupní práci elektronu W_0 a Planckovu konstantu h, včetně chyby měření.
c) Je možné fotonku použít v infračerveném oboru záření?

5. Digitální fotoaparát *(ke studijnímu textu)*

Obraz vytvořený objektivem digitální zrcadlovky je zachycen obdélníkovým snímacím čipem CMOS o rozměrech $a = 23{,}7$ mm, $b = 15{,}6$ mm,

*) Použití lineární regrese je podrobně vysvětleno na podobné úloze ve studijním textu Teplotní závislosti fyzikálních veličin na str. 28 až 31. Text se nachází na webových stránkách FO.

na kterém se nachází $16{,}2 \cdot 10^6$ citlivých bodů, pixelů, tvořících čtvercovou síť. Na objektivu zrcadlovky je vyznačeno, že optickým zoomem můžeme ohniskovou vzdálenost měnit od $f_1 = 18$ mm do $f_2 = 105$ mm. Světelnost objektivu se přitom mění od 1 : 1,35 do 1 : 5,6. Zjednodušeně si můžeme objektiv představit jako tenkou spojku a světelnost pak chápat jako poměr průměru D otvoru, do kterého je vsazena, k ohniskové vzdálenosti f.

Při průchodu světla objektivem dochází k Fraunhoferovu ohybu na kruhovém otvoru, v jehož důsledku se bodový zdroj monofrekvenčního světla nezobrazí ani při přesném zaostření úplně ostře, ale jako světlý kroužek.

a) Určete vzdálenost středů sousedních pixelů.

b) Určete poloměr světlého kroužku, který vznikne na čipu zobrazením vzdáleného bodového zdroje zeleného světla o vlnové délce 550 nm nezacloněným objektivem
   1) při volbě ohniskové vzdálenosti f_1,
   2) při volbě ohniskové vzdálenosti f_2.
   Velikost kroužku porovnejte s rozměry pixelu.

c) Posuďte, co může velikost interferenčního kroužku ovlivnit.

6. *Praktická úloha*: **Měření indukčnosti cívky**

Úkoly:

a) Sestavte obvod podle obr. 4. Použijte zdroje o napětí přibližně 5 V (například plochou baterii), cívku 1 200 závitů z rozkladného transformátoru, výkonovou diodu, stejnosměrný ampérmetr, stejnosměrný voltmetr, kvalitní kondenzátor o kapacitě alespoň 8 μF (ne elektrolytický) a páčkový spínač.

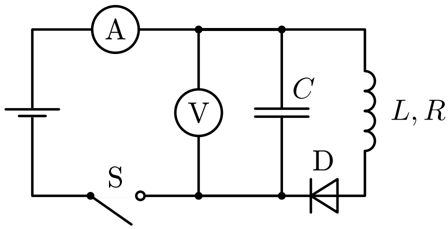
   Měření proveďte:
   - na cívce s uzavřeným jádrem,
   - na cívce s rovným jádrem,
   - na cívce bez jádra.

   Kapacitu kondenzátoru změřte některou běžnou metodou (např. pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu střídavého proudu). Voltmetr by měl mít co největší odpor a rozsahy např. 20 V a 200 V.

b) Při sepnutém spínači změřte proud I procházející cívkou a napětí U_1 na kondenzátoru. Pak přepněte voltmetr na vyšší rozsah (používáte-li ručkový přístroj, změňte také jeho polaritu) a rozepněte spínač. Dojde k překmitnutí obvodu LC a na kondenzátoru se objeví velké na-

pětí opačné polarity, které se bude zvolna zmenšovat v důsledku vybíjení kondenzátoru přes voltmetr. Změřte napětí U_2 bezprostředně po rozepnutí spínače.
Pro každý typ cívky měření několikrát zopakujte .

c) Odvoďte vztah pro výpočet indukčnosti cívky z kapacity C kondenzátoru, napětí U_1, U_2 a proudu I. Ztráty energie během překmitnutí na odporu cívky a na diodě zanedbejte.
d) Vypočtěte indukčnosti cívky s uzavřeným jádrem, s rovným jádrem a bez jádra.

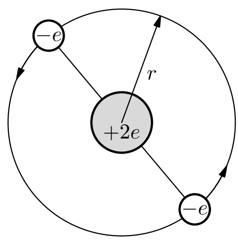


Obr. 4

7. Rutherfordův model atomu helia

(ke studijnímu textu)

V Rutherfordově modelu je atom hélia tvořen jádrem, složeným ze dvou protonů a dvou neutronů, a dvěma elektrony kroužícími kolem jádra po společné kružnici ve vzájemné vzdálenosti $2r$ (obr. 5). Ionizační práce potřebná k odtržení jednoho elektronu z atomu je $W_1 = 24{,}6$ eV, ionizační práce potřebná poté k úplné ionizaci je $W_2 = 54{,}4$ eV.



Obr. 5

a) Určete velikost F výsledné síly působící na každý z elektronů, poloměr r trajektorie elektronů a frekvenci f, se kterou obíhají kolem jádra.
b) Podle zákonů klasické elektrodynamiky by měl Rutherfordův model vyzařovat elektromagnetické vlnění o stejné frekvenci, s jakou obíhají elektrony kolem jádra. Určete jeho vlnovou délku ve vakuu λ.
c) Po odtržení jednoho elektronu vznikne tzv. vodíkupodobný ion, jehož elektron v Rutherfordově modelu rovněž obíhá po kružnici. Určete její poloměr r'.

KATEGORIE B

1. Trestný kop

Fotbalista kope trestný kop ze vzdálenosti $d = 25$ m a chce zasáhnout místo, které je ve výšce $h = 2{,}40$ m nad zemí.

a) Jakou nejmenší rychlost musí udělit míči, aby vybrané místo zasáhl? Jaký přitom musí zvolit elevační úhel a jaká bude doba letu míče?

b) Pod jakým úhlem musí míč kopnout, aby vybrané místo zasáhl při počáteční rychlosti míče $v_0 = 18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a aby přitom doba letu míče byla co nejkratší?

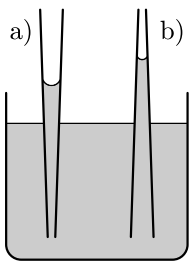
Rozměry míče a odpor prostředí zanedbejte.

2. Kapilární trubice

Kapilární trubice, jejíž vnitřní průměr se plynule mění tak, že vnitřní stěna kapiláry tvoří kuželovou plochu s vrcholovým úhlem $2\alpha = 0{,}4°$, je ponořena do kapaliny o hustotě ϱ a povrchovém napětí σ tak, aby v úrovni okolní hladiny byl poloměr kapiláry $r_0 = 0{,}30$ mm. Jakou výšku h zaujme hladina kapaliny v kapiláře, je-li ponořena svisle

a) užším koncem dole (obr. 1a),

b) užším koncem nahoře (obr. 1b)?



Obr. 1

Řešte nejprve obecně, pak pro vodu o hustotě $\varrho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a povrchovém napětí $\sigma_1 = 73\cdot10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ a líh o hustotě $\varrho_2 = 790\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a povrchovém napětí $\sigma_2 = 22\cdot10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Předpokládejte, že obě kapaliny stěny kapiláry dokonale smáčí.

3. Dopplerův jev

Nepohyblivý pozorovatel vnímá zvukové vlny z přibližujícího se zdroje zvuku v rychlejším sledu než zvukové vlny ze vzdalujícího se zdroje. Jev popsal v roce 1842 *Christian Doppler* a podle svého objevitele nese název Dopplerův jev. Vyhledejte na internetu, v Tabulkách nebo v jiné literatuře příslušný vzorec a řešte následující úlohy:

a) Policista s absolutním hudebním sluchem zaznamenal, že výška tónu motocyklu během průjezdu se zmenšila přesně o jednu malou tercii, což odpovídá v přirozeném ladění poměru frekvencí 6 : 5. Určete velikost rychlosti motocyklu.

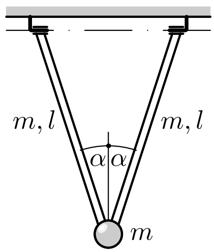
b) Při tréninku F1 mikrofon umístěný v bezprostřední blízkosti vozovky dlouhého rovinného úseku snímal zvuk vozu projíždějícího rychlostí 306 km/h. O kolik půltónů se v temperovaném ladění snížila výška zvuku motoru během průjezdu kolem mikrofonu?

Výškový interval jedné oktávy se skládá z 12 půltónových intervalů, tj. obsahuje třináct tónů s frekvencemi f_0 až f_{12}, přičemž poměr krajních frekvencí je $f_{12} : f_0 = 2 : 1$. Frekvence jednotlivých tónů tvoří v temperovaném ladění geometrickou posloupnost. Obě úlohy řešte za bezvětří při teplotě 24 °C, kdy rychlost zvuku ve vzduchu je 346 m/s.

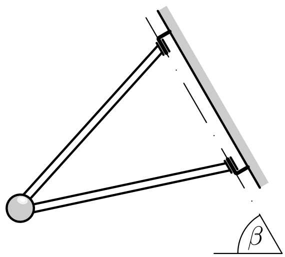
4. Kyvadlo

Těleso zanedbatelných rozměrů o hmotnosti m je upevněno na konci dvou spojených tyčí, které navzájem svírají úhel 2α, každá z nich má také hmotnost m a jejich délka je l. Konce tyčí jsou upevněny na závěsu, který umožňuje kývání kolem osy, procházející jejich koncovými body. Budeme předpokládat, že amplituda kmitů je malá.

a) Jaká bude doba kmitu tohoto kyvadla, je-li osa vodorovná (obr. 2)?
b) S jakou dobou kmitu bude toto kyvadlo kmitat, bude-li osa, na níž jsou tyče zavěšeny, svírat s vodorovnou rovinou úhel $\beta < 90°$ (obr. 3)?



Obr. 2



Obr. 3

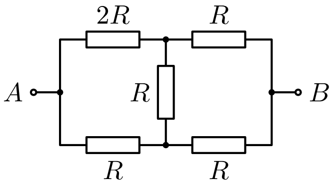
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $\alpha = 20°$, $\beta = 60°$, $l = 20$ cm.

5. Rezistory

Na obr. 4 je znázorněno zapojení 5 rezistorů o odporech R, resp. $2R$. Po určité době provozu dojde k přepálení jednoho z těchto rezistorů, což způsobí změnu celkového odporu mezi body A a B.

a) Určete odpor mezi body A a B pro všechny možné situace, které mohou nastat.

b) Na základě řešení části a) stanovte, který z rezistorů je poškozen, jestliže je celkový odpor obvodu 1. co nejmenší, 2. co největší.
c) Určete, jaký byl odpor R_{AB} obvodu, než došlo k poškození rezistoru.
d) O kolik procent se může celkový odpor obvodu přepálením jednoho rezistoru změnit 1. nejméně, 2. nejvíce.



Obr. 4

6. *Praktická úloha*: **Skákání pružného míčku**

Úkoly:

a) Stáhněte si po internetu volně dostupný program AUDACITY z adresy `http://audacity.sourceforge.net/`, nainstalujte jej do počítače vybaveného mikrofonem a seznamte se v potřebném rozsahu s jeho ovládáním.
b) Nahrajte zvuky, které vzniknou při skákání pingpongového míčku nebo hopíku puštěného z výšky asi půl metru na podlahu.
c) Ze záznamu určete časy t_1 až t_{11}, ve kterých došlo k prvním 11 odrazům míčku od podlahy, a zapište je do tabulky v Excelu, ve kterém provedete následující výpočty.

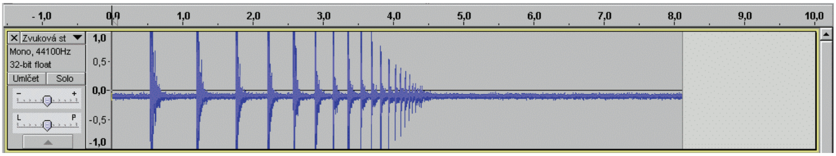
odraz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t/s											
τ/s											—
h/m											—
τ_{i+1}/τ_i										průměr	
směrodatná odchylka											

d) Vypočítejte doby trvání $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ jednotlivých poskoků a ověřte, že tvoří geometrickou posloupnost. Určete její kvocient q.

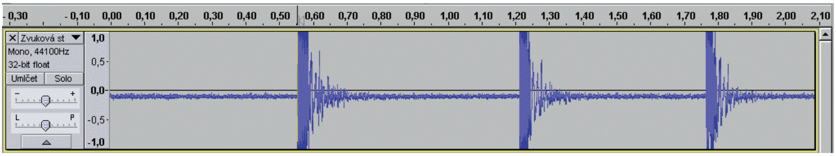
e) Z doby trvání prvního poskoku τ_1 a kvocientu q vypočítejte celkovou dobu poskakování míčku jako součet nekonečné geometrické řady a porovnejte ji s dobou odečtenou ze záznamu.
f) Zdůvodněte, proč kvocient q je roven *koeficientu restituce*, který je definován jako poměr rychlosti po odrazu ku rychlosti při dopadu.
g) Vypočítejte výšky jednotlivých poskoků a sestrojte graf jejich závislosti na pořadí odrazu.

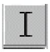
Poznámky k provedení záznamu:

Záznam zvuku spusťte tlačítkem *Record*  a ukončete tlačítkem *Stop* . Měli byste získat podobný průběh:



Pomocí nástroje *Lupa*  roztáhneme graf ve vodorovném směru:

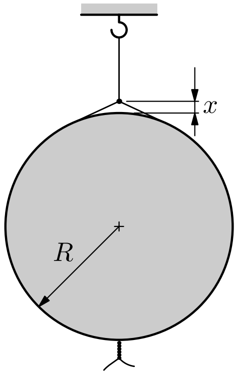


Tlačítkem *Výběr*  upravíme kurzor a umístíme jej na záznam prvního odrazu. Po kliknutí se v dolní části obrazovky objeví příslušný čas. Stejně určíme i časy dalších odrazů.

7. Zavěšený disk

Okolo válcového disku o poloměru $R = 20$ cm a hmotnosti $m = 2$ kg opatřeného po obvodu jemnou drážkou byl těsně ovinut ocelový drát o průměru $d = 0{,}60$ mm, pod drát byla provléknuta nit a disk byl zavěšen na háček (obr. 5). Ocel, ze které je vyroben drát, má modul pružnosti v tahu $E = 220$ GPa a mez úměrnosti 300 MPa. Za předpokladu, že normálové napětí drátu před zavěšením disku bylo zanedbatelné, určete
a) vzdálenost x bodu upevnění nitě od obvodu disku,
b) normálové napětí drátu po zavěšení disku,
c) délku té části drátu, která se nedotýká disku.

Tření mezi drátem a diskem se během deformace drátu neuplatní.



Obr. 5

Při řešení využijte aproximace goniometrických funkcí $\sin\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.

KATEGORIE C

1. Dopravní nehoda

Při rekonstrukci dopravní nehody na železničním přejezdu bylo zjištěno: Rychlík pohybující se rychlostí 33,6 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ začal intenzivně brzdit stálou silou ve vzdálenosti 340 m před překážkou na přejezdu. V čase 5,0 s po začátku brzdění byl vlak ve vzdálenosti 192 m před překážkou. Obě vzdálenosti jsou měřeny od předku lokomotivy.

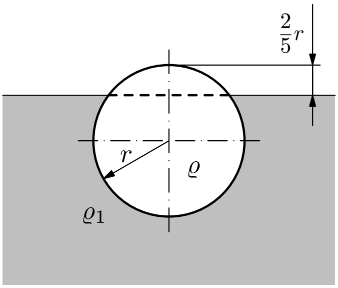
a) Určete velikost zrychlení vlaku.
b) Určete čas měřený od začátku brzdění, v němž došlo k nárazu do překážky.
c) Sestrojte graf závislosti dráhy na čase v časovém intervalu od okamžiku začátku brzdění do času 30 s. V grafu vyznačte čas a dráhu v okamžiku nárazu a v okamžiku zastavení vlaku.

Předpokládejme, že náraz nijak neovlivnil pohyb rychlíku, tedy velikost zrychlení byla konstantní až do úplného zastavení vlaku.

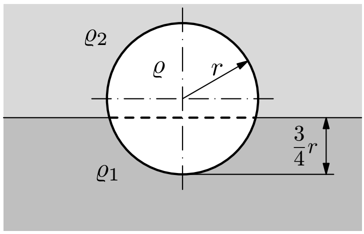
2. Plovoucí váleček

a) Homogenní váleček, jehož průměr je menší než jeho výška, byl položen na hladinu vody o hustotě $\varrho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ v široké kádince tak, že jeho podélná osa je rovnoběžná s hladinou. Nad hladinu přitom vyčnívají $\frac{2}{5}$ poloměru válečku (obr. 1). Určete hustotu materiálu válečku.

b) Na hladinu vody pak opatrně nalijeme další kapalinu, která se s vodou nemísí, o hustotě $\varrho_2 < \varrho_1$ tak, aby váleček byl zcela pod její hladinou. Rozhraní obou kapalin se nyní nachází ve výšce $\frac{3}{4}$ poloměru od nejnižšího bodu válečku (obr. 2). Určete hustotu ϱ_2 přilité kapaliny.



Obr. 1

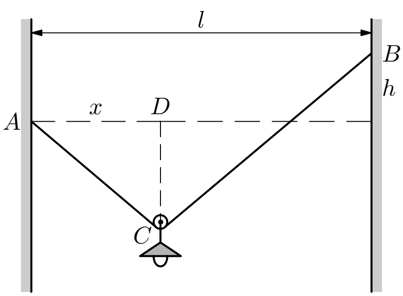


Obr. 2

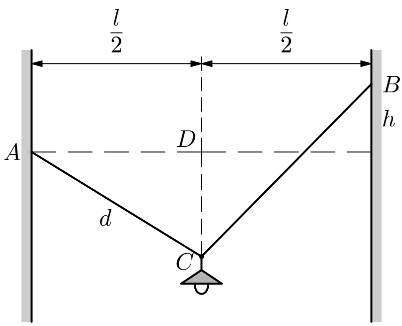
Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

3. Zavěšení lampy

Nad ulicí mezi domy, která má šířku $l = 10$ m, chceme zavěsit lampu o hmotnosti $m = 15$ kg na ocelovém lanku délky $L = 13$ m upevněném v protilehlých bodech A a B, přičemž bod B je o $h = 2$ m výše než bod A.



Obr. 3



Obr. 4

a) V jaké vzdálenosti x od stěny s bodem A se bude lampa nacházet, zavěsíme-li ji pomocí malé kladky, která sjede do nejnižšího bodu (obr. 3)?
b) V jaké vzdálenosti d od bodu A musíme lampu připevnit k lanku, aby se nacházela uprostřed mezi domy (obr. 4)?

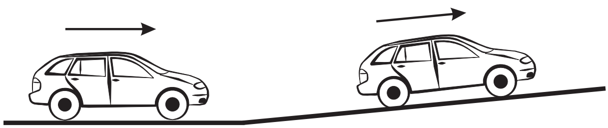
V obou případech určete velikosti sil, kterými bude lanko působit v bodech A a B. Úlohu a) včetně velikosti sil řešte obecně i číselně, v úloze b) stačí konečné řešení číselné. Hmotnost lanka je v porovnání s hmotností lampy zanedbatelná.

4. Automobil

Automobil Felicia o hmotnosti 1 600 kg jede za bezvětří po vodorovné silnici rychlostí 90 km·h^{-1}. Průměr kol automobilu je 65 cm, maximální výkon motoru automobilu udávaný výrobcem je 40 kW. Při pohybu působí na automobil odporová síla prostředí daná vztahem

$$F = \frac{1}{2} C \varrho S v^2,$$

kde $C = 0{,}35$, $S = 2{,}4\ \mathrm{m}^2$, a valivý odpor. Tření v ložiskách kol neuvažujte.



Obr. 5

a) Určete tahovou sílu a výkon motoru automobilu: 1. v zimě, když má automobil na disky kola nasazeny zimní pláště s ramenem valivého odporu $\xi = 0{,}003$ m a $\varrho = 1{,}22\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; 2. v létě, když má automobil nasazeny na disky letní pláště, kdy $\xi = 0{,}001\,6$ m a $\varrho = 1{,}02\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.
b) Je z technického hlediska možné, aby automobil za podmínek uvedených v a) jel po vodorovné silnici rychlostí 150 km · h^{-1} v zimě i v létě?
c) Po určité době jízdy se ráz silnice změní a vodorovná silnice přechází ve svah o stoupání 4 %. Automobil pokračuje dál ve své jízdě rychlostí 90 km·h^{-1}. Určete tahovou sílu a výkon motoru automobilu při jízdě do tohoto kopce, jede-li rovnoměrným pohybem.

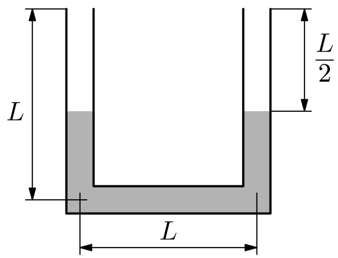
d) Aby řidič snížil spotřebu při jízdě v létě, rozhodl se vyměnit původní letní pláště za kvalitnější, čímž došlo ke snížení valivého odporu o 10 % původního. Určete, jak se změní rameno valivého odporu po této výměně a jak tato výměna plášťů ovlivní spotřebu benzinu v létě při jízdě po rovině vzhledem k původnímu stavu.

5. U-trubice

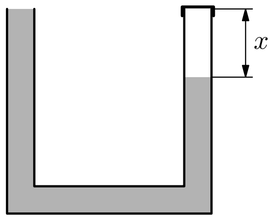
Trubice tvaru písmene U má stejně dlouhá ramena délky $L = 20$ cm o stejném průřezu $S = 0{,}50\ \mathrm{cm}^2$. Trubice je do poloviny výšky naplněna rtutí (obr. 6). Pravé rameno trubice nahoře uzavřeme a levé rameno za stálé teploty 20 °C doplníme rtutí až po okraj (obr. 7).

a) Jaká bude výška x vzduchového sloupce v pravém rameni?
b) Jaká bude výška y vzduchového sloupce v pravém rameni, když se teplota trubice zvýší z 20 °C na 80 °C?
c) Určete hmotnost rtuti, která při tomto zvýšení teploty z trubice vyteče.

Teplotní roztažnost skla a kapilární jevy můžeme zanedbat. Atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Hustota rtuti při 20 °C je $\varrho_1 = 13\,546\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Teplotní součinitel objemové roztažnosti rtuti $\beta = 0{,}20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$.



Obr. 6



Obr. 7

6. *Praktická úloha*:
Určení výsledné tuhosti dvou pružin spojených paralelně a sériově
Pomůcky:

Dvě pružiny o různé tuhosti, několik větších závaží s háčky, váhy a sada závaží, stopky, kousek drátu.

Teorie:

Mechanický oscilátor tvořený pružinou o tuhosti k a hmotnosti m_0, na které je zavěšeno těleso o hmotnosti m, kmitá s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}. \qquad (*)$$

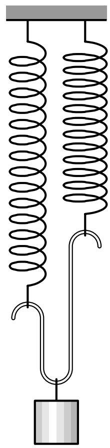
Úkoly:

a) Na dvě různé pružiny zavěšujte postupně závaží o různé hmotnosti a změřte periody kmitání takto získaných oscilátorů. Užitím vztahu $(*)$ určete experimentálně tuhosti obou pružin.

b) S použitím výsledků získaných v úkolu a) určete teoreticky výslednou tuhost obou pružin, jsou-li spojeny: 1) sériově, 2) paralelně.

c) Na obě pružiny spojené 1) sériově, 2) paralelně zavěšujte různá závaží a stejným způsobem jako v úkolu a) určete experimentálně výslednou tuhost spojených pružin. Získané hodnoty porovnejte s výsledky výpočtů v úkolu b).

Poznámka k provedení: Na paralelně spojené pružiny zavěšujte závaží pomocí delšího dvojitého háčku, který si zhotovíte z kousku drátu (obr. 8). Tím dosáhnete, že obě pružiny budou deformovány stejně. Jsou-li délky nezatížených pružin různé, připravíme dvojháček nesymetrický. Hmotnost dvojháčku přičtěte k hmotnosti závaží.



Obr. 8

7. Kruhový děj

Hélium o látkovém množství n se nachází ve stavu p_0, V_0 a T_0 v uzavřené nádobě s pohyblivým pístem. Tento plyn se nejprve rozpíná za stálého tlaku, až jeho objem dosáhne čtyřnásobku původního objemu (stav 1), pak se tento plyn ochladí tak (stav 2), aby následujícím adiabatickým stlačením dosáhl původního stavu.

a) Vyjádřete tlak, teplotu a objem ve stavech 1 a 2 pomocí počátečních veličin p_0, V_0, T_0.

b) Načrtněte ve vhodném měřítku tento děj do p-V diagramu.

c) Určete účinnost tohoto kruhového děje.

Poissonova konstanta je $\varkappa = \frac{5}{3}$.

KATEGORIE D

1. Regionální vlak

Regionální vlak se rozjížděl ze zastávky tak, že rovnoměrně zrychleným pohybem dosáhl za dobu $t_1 = 40$ s rychlosti o velikosti $v = 63\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Poté se touto rychlostí pohyboval rovnoměrně a na dráze $s_3 = 280$ m rovnoměrně zpomaleným pohybem v další stanici zastavil. Celková dráha uražená vlakem mezi stanicemi je 4,20 km.

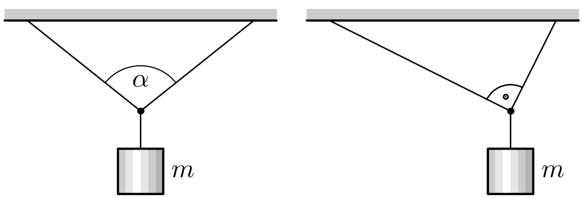
a) Určete velikost a_1 zrychlení vlaku během rozjíždění a velikost a_3 zrychlení vlaku během brzdění.
b) Určete dráhu s_1 uraženou během rozjíždění a čas t_3, po který vlak brzdil.
c) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase.
d) Určete průměrnou rychlost v_p jízdy vlaku mezi stanicemi.

Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty.

2. Zavěšené těleso

Pevné vlákno zanedbatelné hmotnosti je svými konci zavěšeno na vodorovném trámku. Na vlákně je uzlík, z něhož vychází další vlákno se zavěšeným tělesem o hmotnosti $m = 2{,}7$ kg.

a) Uzlík je ve středu vlákna. Napnuté části horního vlákna svírají úhel α (obr. 1a). Určete velikosti sil, jimiž jsou levá a pravá část vlákna napínány v případech, kdy $\alpha = 20°,\ 60°,\ 90°,\ 135°,\ 160°$. Při jakém úhlu α je každá část horního vlákna napínána stejnou silou jako dolní vlákno?
b) Uzlík rozděluje horní vlákno na dvě části s poměrem délek 2 : 1, přičemž horní konce jsou zavěšeny v takové vzdálenosti, že části vlákna svírají pravý úhel (obr. 1b). Určete velikosti sil, jimiž jsou levá a pravá část vlákna napínány.



Obr. 1a Obr. 1b

3. Dva sudy

Na vodorovné rovině stojí vedle sebe dva sudy stejné výšky $h_0 = 1{,}00$ m. První sud má objem $V_1 = 600$ l a průměr d_1, druhý má průměr $d_2 = d_1/2$. Oba sudy jsou propojené ve třetině výšky vodorovnou trubicí s uzávěrem.

a) Velký sud je zcela naplněný vodou, druhý prázdný. Určete objem vody, která proteče do menšího sudu po otevření uzávěru.

b) Malý sud je zcela naplněný vodou, velký prázdný. Určete objem vody, která proteče do většího sudu po otevření uzávěru.

c) Určete v obou případech změnu potenciální energie vody při protečení.

Hustota vody je $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Tloušťku pláště a dna obou sudů zanedbejte.

4. Posouvání bedny

Na podlaze leží bedna o hmotnosti $m = 35$ kg. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou je $f = 0{,}51$. Tři chlapci chtěli bednu posunout co nejdále. Marek působil na bednu silou 140 N po dobu 6,0 s, poté Dan silou 180 N po dobu 4,0 s a nakonec Jarda silou 220 N po dobu 2,0 s. Určete dráhu, kterou bedna urazila působením každého z chlapců. Směr působení všech tří sil na bednu je vodorovný.

5. Házení míčkem

Chlapci házejí vodorovným směrem tenisový míček z balkónů v prvním, třetím a pátém patře nad sebou do koše, který se nachází ve vzdálenosti $d = 15{,}0$ m od kolmice spuštěné z místa hodu k vodorovné rovině. Počáteční výšky hodů nad okolní rovinou jsou $h_1 = 4{,}0$ m, $h_2 = 10{,}0$ m, $h_3 = 16{,}0$ m.

a) Určete velikosti počátečních rychlostí v_{01}, v_{02}, v_{03} tak, aby míček dopadl do koše. Velikosti rychlostí porovnejte a zdůvodněte.

b) Určete velikosti rychlostí v_{d1}, v_{d2}, v_{d3} dopadu míčku do koše. Velikosti rychlostí porovnejte a zdůvodněte.

c) Určete u jednotlivých hodů úhly α_1, α_2, α_3, které svírají rychlosti dopadu s vodorovným směrem.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

6. *Praktická úloha*:
Měření hmotnosti pomocí Archimédova zákona

Úkol:

Změřte pomocí zkumavky plovoucí ve vodě s využitím Archimédova zákona průměrnou hmotnost diaboly.

Pomůcky:

Diaboly, zkumavka, nádoba s vodou, milimetrové měřítko, lepicí páska, posuvné měřidlo.

Návod:

Do zkumavky dáme takový počet diabol, aby zkumavka po vnoření do vody dosáhla svislé polohy. Tím získáme nulovou čáru ponoru, od níž budeme ve směru svisle vzhůru měřit hloubku y ponoru. Po přidání počtu N diabol, každé o hmotnosti m, dosáhne zkumavka hloubky y ponoru splňující podle Archimédova zákona rovnici

$$Nmg = \varrho S y g,$$

kde $S = \pi d^2/4$ je obsah vnějšího příčného řezu zkumavky a ϱ hustota vody. Z rovnice po dosazení plyne závislost hloubky y ponoru na počtu N diabol:

$$y = \frac{4m}{\pi d^2 \varrho} N. \tag{$*$}$$

Provedení:

Průměr d zkumavky změříme posuvným měřidlem na několika místech v horní části zkumavky. Budou-li se hodnoty lišit, použijeme jejich aritmetický průměr.

Jako měřítko je možné použít pásek milimetrového papíru, na němž pro lepší čitelnost stupnici tužkou nebo tenkým fixem zvýrazníme. Pásek lepenkou přilepíme na vnitřní povrch zkumavky.

Zkumavku zatížíme diabolami ve vodě tak, aby dosáhla svislé polohy. Úroveň hladiny podle stupnice zaznamenáme. Nyní budeme do zkumavky přidávat vždy jednu diabolu a na stupnici s přesností na milimetry zjistíme hloubku y ponoru vzhledem k nulové čáře. Postup opakujeme do okamžiku, kdy horní okraj zkumavky dosáhne hladiny.

Zpracování výsledků:

Pomocí počítačového grafického programu, např. Excelu, sestrojíme graf závislosti hloubky y ponoru na počtu N diabol. V případě Excelu si vytvoříme tabulku a zapíšeme do ní naměřená data, tj. hodnoty N a y, a to včetně dvojice $N = 0$, $y = 0$. Kurzorem označíme dvojici sloupců s daty a vložíme *Graf*. Zvolíme typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů), čímž se zobrazí soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich z nabídky zvolíme *Přidat spojnici trendu* a vybereme *Typ trendu a regrese lineární*. V nabídce *Možnosti* volíme $y = 0$. Tím se zobrazí přímka vycházející z počátku, která proloží zobrazené body v grafu. Zobrazíme též *Rovnici regrese*, tj. rovnici získané přímky. Ta se zobrazí ve tvaru $y = ax$, což je rovnice přímé úměrnosti s konstantou (směrnicí) a.

Podle rovnice (∗) je směrnice přímky

$$a = \frac{4m}{\pi d^2 \varrho}.$$

Vyjádřením hmotnosti dostaneme

$$m = \frac{\pi}{4} d^2 \varrho a.$$

Do vzorce dosadíme změřený průměr zkumavky, hustotu vody (z tabulek podle teploty), směrnici přímky získanou počítačovým programem a vypočteme hmotnost diaboly.

Hmotnost diaboly ověříme vážením na technických vahách.

7. Rozpad střely

Střela skládající se ze dvou částí o hmotnostech $m_1 = 0{,}6$ kg a $m_2 = 0{,}9$ kg obsahuje pružinový systém nastavitelný tak, že během letu se obě části v podélné ose střely od sebe oddělí. Energie stlačených pružin je $E = 72$ J. Těleso bylo vystřeleno ze země prakem svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Podélná osa střely zachovává během celého letu svislý směr, přičemž část střely o hmotnosti m_1 je nahoře. V nejvyšší poloze se pružinový systém aktivuje, čímž se obě části od sebe odmrští.

a) Určete velikosti v_1 a v_2 rychlostí obou částí vzhledem k zemi bezprostředně po odmrštění.
b) Určete nejvyšší výšku h_1 nad zemí, do které vystoupí horní část střely.
c) Určete velikosti v_{d1} a v_{d2} rychlostí dopadu obou částí tělesa.

Odpor vzduchu zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. V obecném řešení úloh b), c) považujte v_1, v_2 za dané.