Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Důkaz dvojitou indukcí ve dvou příkladech

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 3, 8–12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146478`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

MATEMATIKA

Důkaz dvojitou indukcí ve dvou příkladech

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article explains a method of proving statements which depend on two natural variables. The method is used in two examples.

Důkaz dvojitou indukcí

Metoda důkazu matematickou indukcí je vám jistě známá. Chceme-li dokázat, že nějaká věta $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n (nebo pro všechna přirozená čísla počínaje jiným číslem než jedničkou), postupujeme tak, že dokážeme:

platí $V(1)$ a pro každé přirozené číslo n platí $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Jak však postupovat, chceme-li dokázat, že věta $V(m,n)$ s přirozenými proměnnými m, n platí pro všechna přirozená čísla m, n? Dokázat, že platí $V(1,1)$ a že pro všechna přirozená m, n platí implikace $V(m,n) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(m+1,n+1)$, zřejmě nestačí! Tímto způsobem bychom dokázali jen to, že tato věta platí pro $m = n = 1$, $m = n = 2$, $m = n = 3$ atd., nikoliv třeba pro $m = 5$, $n = 3$. Podaří-li se nám však dokázat, že pro všechna přirozená m platí $V(m,1)$, jsme na dobré cestě, neboť pak stačí dokázat už jen to, že při jakékoli volbě čísla m pro všechna n platí $V(m,n)$. Řečeno podrobněji:

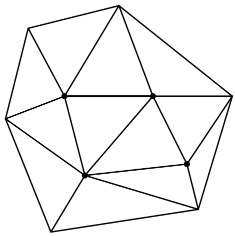
Při důkazu, že věta $V(m,n)$ platí pro všechna přirozená čísla m, n, postupujeme takto:

1. Dokážeme indukcí, že pro všechna m platí $V(m,1)$, tj. dokážeme:
   a) platí $V(1,1)$,
   b) pro všechna m platí $V(m,1) \Rightarrow V(m+1,1)$.
2. Dokážeme indukcí, že pro libovolné, ale pevné m platí $V(m,n)$ pro všechna n, tj. dokážeme:
   a) platí $V(m,1)$,
   b) pro všechna n platí $V(m,n) \Rightarrow V(m,n+1)$.

Poznámka: Všimněte si, že bod 2a) tohoto postupu nemusíme provádět, pokud se nám podařilo dokázat bod 1. Konkrétní užití si ukážeme v následujícím příkladu, v němž odvodíme dvě tvrzení, ve kterých vystupují přirozená čísla m, n; tato tvrzení pak dokážeme.

Úloha s dvěma tvrzeními a jejich přímé důkazy

Konvexní n-úhelník, v němž je dáno m vnitřních bodů, je pokryt nepřekrývajícími se trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou podle obr. 1 v m daných bodech a ve vrcholech n-úhelníku. Určete počet těchto trojúhelníků a počet všech úseček, které jsou jejich stranami.



Obr. 1: $n = 6$, $m = 4$

Řešení: K určení počtu t těchto trojúhelníků vyjádříme dvěma způsoby součet S všech jejich vnitřních úhlů. Je zřejmě $S = t \cdot 180°$ a protože součet vnitřních úhlů n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$, platí dále

$$S = (n-2) \cdot 180° + m \cdot 360°.$$

Z rovnosti

$$t \cdot 180° = (n-2) \cdot 180° + m \cdot 360°$$

snadno vypočteme $t = 2m + n - 2$.

Poznámka: Všimněte si, že podle tohoto výsledku závisí počet trojúhelníků, na něž je daný n-úhelník rozložen, pouze na číslech m, n a nikoli na způsobu, kterým je rozklad proveden. Uveďme ještě, že počet těchto trojúhelníků se dá určit pomocí Eulerova vzorce pro rovinné grafy, viz [1].

Počet p všech úseček, které jsou stranami těchto trojúhelníků, určíme takto: úseček, které jsou společnou stranou dvou trojúhelníků, je $3t - n$ a jsou počítány dvakrát, úseček, které jsou stranou jediného trojúhelníku, je n a jsou počítány jednou. Znamená to, že platí

$$p = \frac{3t-n}{2} + n = \frac{3t+n}{2},$$

odkud dosazením za t dostaneme $p = 3m + 2n - 3$.

Ověřte podle obr. 1, že pro hodnoty $m = 4$, $n = 6$ je $t = 12$, $p = 21$, což je v souladu se získanými výsledky:

$$t = 2 \cdot 4 + 6 - 2 = 12, \qquad p = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 = 21.$$

Dva výsledky, s nimiž jsme se seznámili v předchozím oddílu, ověříme nyní pomocí dvojité matematické indukce; uvědomíme si přitom, že číslo n je rovno aspoň třem.

Ověření prvního tvrzení matematickou indukcí

Dokážeme nejprve, že pro všechna přirozená čísla m, n, kde $n \geq 3$, pro počet $t = t(m,n)$ trojúhelníků platí

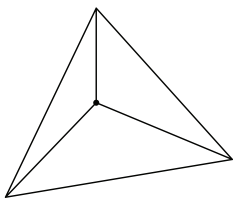
$$t(m,n) = 2m + n - 2.$$

1. Dokážeme indukcí, že pro všechna přirozená m platí rovnost pro $t(m,3)$:

a) pro $m = 1$, $n = 3$ je

$$t(1,3) = 2 \cdot 1 + 3 - 2 = 3,$$

což podle obr. 2 vskutku platí;



Obr. 2: $n = 3$, $m = 1$; $t = 3$

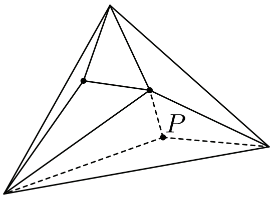
b) budeme předpokládat, že $t(m,3) = 2m + 3 - 2 = 2m + 1$ platí, a dokážeme, že

$$t(m+1,3) = 2(m+1) + 3 - 2 = 2m + 3.$$

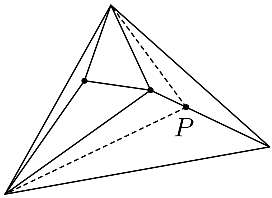
Připojíme-li tedy k daným m bodům další bod, zvětší se počet trojúhelníků o dva, neboť platí: je-li připojený bod (na obr. 3a je to bod P) uvnitř některého z uvažovaných trojúhelníků, přibudou tři nové a „odpadne“ původní; je-li připojený bod (na obr. 3b je to bod P) uvnitř strany některého z trojúhelníků, přibudou čtyři nové, ale dva „odpadnou“. Znamená to, že platí

$$t(m+1,3) = t(m,3) + 2 = (2m+1) + 2 = 2m+3;$$

bod 1 je tím dokázán.



Obr. 3a



Obr. 3b

2. Dokážeme indukcí, že pro libovolné číslo m platí rovnost pro $t(m,n)$ pro všechna $n \geq 3$:

a) podle bodu 1 rovnost pro $t(m,3)$ platí;

b) budeme předpokládat, že $t(m,n) = 2m+n-2$ platí, a dokážeme, že

$$t(m,n+1) = 2m + (n+1) - 2 = 2m+n-1.$$

Připojíme-li k n vrcholům n-úhelníku další vrchol, zvětší se počet trojúhelníků o jeden, takže máme

$$t(m,n+1) = t(m,n) + 1 = (2m+n-2) + 1 = 2m+n-1;$$

tím je dokázán i bod 2, takže důkaz dané věty je dokončen.

Ověření druhého tvrzení matematickou indukcí

Dokážeme dále, že pro všechna přirozená čísla m, n, kde $n \geq 3$, pro počet $p = p(m,n)$ úseček, které jsou stranami uvedených trojúhelníků, platí

$$p(m,n) = 3m + 2n - 3.$$

1. Dokážeme indukcí, že pro všechna přirozená čísla m platí rovnost pro $p(m,3)$:

a) pro $m = 1$, $n = 3$ je

$$p(1,3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 = 6,$$

což podle obr. 2 platí.

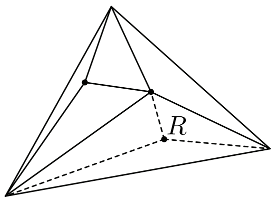
b) budeme předpokládat, že $p(m,3) = 3m + 2 \cdot 3 - 3 = 3m + 3$ platí, a dokážeme, že

$$p(m+1,3) = 3(m+1) + 2 \cdot 3 - 3 = 3m + 6.$$

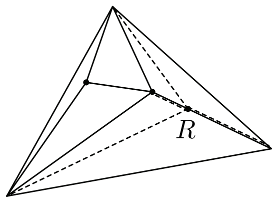
Připojíme-li k daným m bodům další bod, zvětší se počet úseček o tři; je-li totiž připojený bod (na obr. 4a je to bod R) uvnitř některého z uvažovaných trojúhelníků, počet úseček vzroste o tři; je-li připojený bod (na obr. 4b je to bod R) uvnitř některé z původních úseček, přibudou čtyři nové, ale jedna, na níž leží připojený bod, „odpadne“. Platí tedy

$$p(m+1,3) = p(m,3) + 3 = (3m+3) + 3 = 3m + 6;$$

tím je bod 1 dokázán.



Obr. 4a



Obr. 4b

2. Dokážeme indukcí, že pro libovolné m platí rovnost pro $p(m,n)$ pro všechna $n \geq 3$:

a) podle bodu 1 rovnost pro $p(m,3)$ platí;

b) budeme předpokládat, že $p(m,n) = 3m + 2n - 3$ platí, a dokážeme, že

$$p(m,n+1) = 3m + 2(n+1) - 3 = 3m + 2n - 1.$$

Připojíme-li k vrcholům daného n-úhelníku další vrchol, zvětší se počet úseček o dvě, takže platí

$$p(m,n+1) = p(m,n) + 2 = (3m + 2n - 3) + 2 = 3m + 2n - 1.$$

Tím je dokázán i bod 2, takže důkaz druhého tvrzení je dokončen.

L i t e r a t u r a

[1] Calda, E.: Rovinné grafy a počet disjunktních částí roviny, *Matematika–fyzika–informatika* **11**, 2 (2001), s. 65–71.