Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 2, 58–62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146475

NAŠE SOUTĚŽ

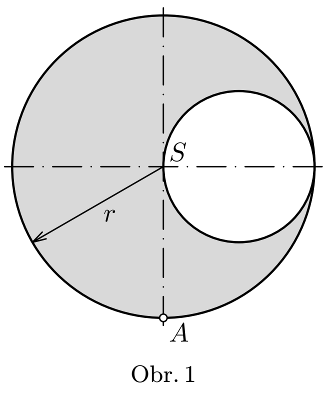
Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. srpna 2012* na adresu redakce.

Úloha 27. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku s celočíselnými délkami stran má poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku také celočíselnou hodnotu. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 28. Vodorovná homogenní kruhová deska o poloměru r, ze které byl vyříznut otvor o poloměru $0{,}5r$, je podepřena v bodě A (obr. 1).



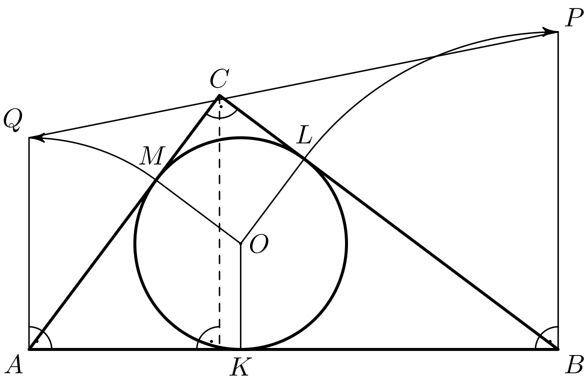
Obr. 1

Určete body B, C na obvodu desky, do kterých musíme umístit další dvě podpěry, mají-li být všechny zatíženy stejně. Počítejte i s možností, že některá podložka je na obvodu otvoru. Tření mezi deskou a podpěrami je malé; síly v bodech A, B, C proto mají svislý směr.

Úlohu řešte graficky i početně. (*Přemysl Šedivý*)

Řešení úloh z čísla 4/2011

Úloha 23. Pravoúhlému trojúhelníku ABC je vepsána kružnice, která se dotýká odvěsny AC v bodě M a odvěsny BC v bodě L. Úsečku AM otočíme kolem bodu A do polohy AQ kolmé k AB a analogicky otočíme úsečku BL kolem bodu B do polohy BP kolmé k AB, přičemž body C, P, Q leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB.



Dokažte, že bod C leží na úsečce PQ, právě když $|AQ| = |BP|$.

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: (podle Michala Řepíka)

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník se standardním značením. Tvrzením je ekvivalence

$$C \in PQ \Leftrightarrow |AQ| = |BP|\,,$$

budeme jej proto dokazovat jako dvě implikace.

Dokažme nejdříve implikaci zprava, tedy $|AQ| = |BP| \Rightarrow C \in PQ$. Je-li $|AQ| = |BP|$, pak je pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný. Pak zřejmě pro velikosti úseček AQ a BP platí $|AQ| = |BP| = \frac{c}{2}$. A protože i výška na stranu AB má velikost $\frac{c}{2}$, musí být body C, P, Q kolineární, neboť všechny leží od strany AB ve stejné vzdálenosti.

Zbývá dokázat implikaci zleva $C \in PQ \Rightarrow |AQ| = |BP|$. V tomto případě body A, B, P, Q určují lichoběžník $ABPQ$, kde bod C leží na straně PQ. Patu výšky na stranu AB trojúhelníku ABC označme N. Obsah lichoběžníku $ABPQ$ můžeme určit jako součet obsahů lichoběžníků $ANCQ$ a $NBPC$. Vyjádříme délky používaných úseček pomocí délek stran a, b, c trojúhelníku ABC:

$$|NC| = \frac{ab}{c}, \qquad |AN| = \frac{b^2}{c}, \qquad |NB| = \frac{a^2}{c},$$

což plyne z Eukleidových vět a z obsahu trojúhelníku ABC,

$$|AQ| = \frac{b+c-a}{2}, \qquad |BP| = \frac{a+c-b}{2},$$

což plyne z vlastností kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Pro obsahy jednotlivých lichoběžníků potom platí

$$S_{ANCQ} = \frac{b^2}{2c}\left(\frac{b+c-a}{2} + \frac{ab}{c}\right) = \frac{b^2}{4c^2}\left(c^2 - ac + bc + 2ab\right),$$

$$S_{NBPC} = \frac{a^2}{2c}\left(\frac{a+c-b}{2} + \frac{ab}{c}\right) = \frac{a^2}{4c^2}\left(c^2 + ac - bc + 2ab\right),$$

$$S_{ABPQ} = \frac{c}{2}\left(\frac{b+c-a}{2} + \frac{a+c-b}{2}\right) = \frac{c^2}{2}.$$

Nyní vyjádříme obsah lichoběžníku $ABPQ$ jako součet obsahů lichoběžníků $ANCQ$ a $NBPC$:

$$\frac{b^2}{4c^2}\left(c^2 - ac + bc + 2ab\right) + \frac{a^2}{4c^2}\left(c^2 + ac - bc + 2ab\right) = \frac{c^2}{2}$$

Výraz na levé straně upravme vytknutím $c^2/2$:

$$\frac{c^2}{2}\left[\frac{b^2}{2c^2}\left(1 - \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 2\frac{ab}{c^2}\right) + \frac{a^2}{2c^2}\left(1 + \frac{a}{c} - \frac{b}{c} + 2\frac{ab}{c^2}\right)\right] = \frac{c^2}{2}$$

Rovnost nastává, právě když je výraz v hranatých závorkách roven jedné. Volme substituci $a/c = x$, $b/c = y$. Potom je

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

a ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\frac{y^2}{2}(1-x+y+2xy)+\frac{x^2}{2}(1+x-y+2xy)=1,$$

$$y^2-xy^2+y^3+2xy^3+x^2+x^3-x^2y+2x^3y=2,$$

$$x\left(x^2-y^2\right)-y\left(x^2-y^2\right)+2xy\left(x^2+y^2\right)=1,$$

$$\left(x^2-y^2\right)(x-y)=x^2-2xy+y^2,$$

$$(x-y)^2(x+y)=(x-y)^2.$$

Pro $x \neq y$ obdržíme $x+y=1$, tj.

$$a+b=c.$$

To je ovšem v rozporu s trojúhelníkovou nerovností, a proto tento případ nenastane.

Je-li $x=y$, je

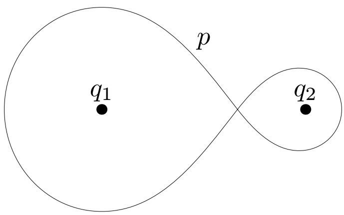
$$a=b.$$

Pravoúhlý trojúhelník ABC je rovnoramenný a pak zřejmě platí, že

$$|AQ|=|BP|.$$

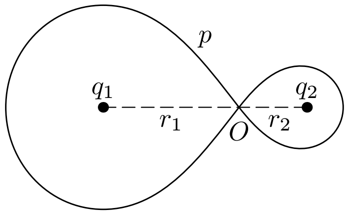
Tím je důkaz dokončen.

Úloha 24. *Dva bodové náboje.*
Ve všech bodech křivky p na obrázku je potenciál elektrického pole vytvořeného dvěma bodovými náboji $q_1 = 4$ nC a $q_2 = 1$ nC ve vakuu roven $\varphi = 900$ V. Určete vzdálenost nábojů l. Konstanta Coulombova zákona $k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ C^{-2}.



(*Přemysl Šedivý, námět úlohy je převzat z Moskevské olympiády*)

Řešení: Elektrické pole je v našem případě souměrné vzhledem k ose procházející oběma náboji. Otáčením křivky p okolo této osy dostaneme ekvipotenciální plochu. Vektor $\boldsymbol{E}$ intenzity elektrického pole v libovolném bodě ekvipotenciální plochy je k této ploše kolmý. V bodě O znázorněném na obrázku, kde se křivka p kříží, je směr vektoru intenzity neurčitý.



To je možné jen v případě, že velikost vektoru intenzity v tomto bodě je nulová. Proto

$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2},$$

kde r_1, r_2 jsou vzdálenosti bodu O od nábojů q_1 a q_2. Pro potenciál v bodě O platí

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$r_1 = \frac{k(q_1 + \sqrt{q_1 q_2})}{\varphi}, \qquad r_2 = \frac{k(q_2 + \sqrt{q_1 q_2})}{\varphi}.$$

Pak

$$l = r_1 + r_2 = \frac{k(q_1 + 2\sqrt{q_1 q_2} + q_2)}{\varphi} = \frac{k(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}{\varphi} = 9 \text{ cm}.$$

Stav soutěže po 24 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha) – 12 bodů
Ondřej Lomič (SPŠ stavební, Opava) – 7 bodů
Libor Drozdek (G Holešov) – 4 body