Rozhledy matematicko-fyzikální

Miloš Přinosil

Extrémy funkcí v krajních bodech intervalu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 3, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146366

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2010

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Extrémy funkcí v krajních bodech intervalu

Miloš Přinosil, PřF MU Brno

Abstract. The article deals with inequalities that can be proved by determination of extremes of a suitable function on a given interval. We show on examples of linear, quadratic and/or more generally, convex and concave functions that it suffices to investigate such functions in endpoints of an interval.

Jednou z užitečných metod důkazů algebraických nerovností je využití vlastností vhodné funkce jedné proměnné, kterou můžeme sestavit z výrazů vystupujících v dané nerovnosti. Z jejího průběhu, přesněji monotonie a konvexnosti, lze totiž poměrně snadným způsobem určit body lokálních extrémů, a tedy i maximální, resp. minimální hodnoty, jichž může daný výraz na daném intervalu nabývat.

Obzvlášť snadný je případ *lineární funkce*. Jak víme, na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá tato funkce v bodě a svého minima a v bodě b svého maxima, je-li rostoucí; naopak je to, je-li funkce klesající. V obou případech tedy pro „omezení" dané funkce stačí vyšetřit její hodnoty v obou krajních bodech. Ukažme si, jak tento poznatek netradičně využít, na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad 1. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$a + b + c - abc \leq 2.$$

Řešení: Podíváme-li se, kde všude ve výrazu V na levé straně nerovnosti vystupuje např. proměnná a, zjistíme, že jde vlastně o lineární výraz. Řešme tedy nerovnici

$$V(x, b, c) \leq 2$$

s neznámou x a pevnými hodnotami b, c. Ze zadání výrazu V plyne

$$V(x, b, c) = Px + Q, \quad \text{kde } P = 1 - bc \text{ a } Q = b + c.$$

Protože $x \in \langle 0, 1\rangle$, stačí vyšetřit naši lineární funkci pouze v krajních bodech $x = 0$ a $x = 1$. Pro čísla $b, c \in \langle 0, 1\rangle$ tak stačí ověřit dvě nerovnosti

(rovnou to provedeme ve dvou sloupcích)

$$V(0,b,c) \le 2, \qquad V(1,b,c) \le 2,$$
$$b+c \le 2, \qquad 1+b+c-bc \le 2,$$
$$(1-c)(b-1) \le 0.$$

Vidíme, že obě nerovnosti (díky omezením na čísla b, c) platí.

Opakovaným využitím linearity lze dokázat následující zobecněnou nerovnost pro n čísel z daného intervalu.

Příklad 2. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k \le n-1.$$

Řešení: Zadaná nerovnost (pro $n = 3$ jde o nerovnost z příkladu 1) je tvaru

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le n-1,$$

kde V je výraz lineární v každé proměnné $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Úvahou o proměnné $a_1 \in \langle 0, 1\rangle$ usoudíme, že stačí dokázat dvě nerovnosti

$$V(0, a_2, \ldots, a_n) \le n-1 \quad \text{a} \quad V(1, a_2, \ldots, a_n) \le n-1,$$

Uplatníme-li nyní úvahu o proměnné $a_2 \in \langle 0, 1\rangle$, zjistíme, že stačí dokázat čtyři nerovnosti

$$V(0,0,a_3,\ldots,a_n) \le n-1, \qquad V(0,1,a_3,\ldots,a_n) \le n-1,$$
$$V(1,0,a_3,\ldots,a_n) \le n-1, \qquad V(1,1,a_3,\ldots,a_n) \le n-1.$$

K nim se zase může uplatnit úvaha o proměnné a_3 atd. Tak dojdeme k závěru, že stačí dokázat 2^n nerovností

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le n-1,$$

kde každé a_i je 0 nebo 1. Nechť tedy m proměnných z $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je rovno 1 a zbylých $n-m$ proměnných je rovno 0. Je-li $m = n$, pak je levá strana dané nerovnosti rovna $n-1$. A je-li $m < n$, pak je levá strana nerovnosti rovna m, což rovněž nepřevyšuje číslo $n-1$.

Stejnou metodu uplatníme i při řešení dvou dalších úloh.

Příklad 3. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, A, b, B, c, C splňující rovnosti

$$a + A = b + B = c + C = s$$

platí

$$a \cdot B + b \cdot C + c \cdot A \leq s^2.$$

Řešení: Levou stranu dokazované nerovnosti (označme ji např. L) můžeme upravit následujícím způsobem

$$L = a \cdot B + b \cdot C + c \cdot A =$$
$$= a(s - b) + b(s - c) + c(s - a) = (a + b + c) \cdot s - (ab + bc + ca).$$

Vidíme, že upravený výraz L je lineární vzhledem ke každé z proměnných a, b, c, kde $a, b, c \in \langle 0, s\rangle$, a tudíž své největší hodnoty nutně nabývá v krajních bodech tohoto intervalu. Vzhledem k symetrii stačí určit hodnotu výrazu L pouze pro trojice $(0, 0, 0)$, $(s, 0, 0)$, $(s, s, 0)$, (s, s, s). Snadno určíme

$$L(0, 0, 0) = 0, \quad L(s, 0, 0) = s^2, \quad L(s, s, 0) = s^2, \quad L(s, s, s) = 0,$$

čímž je důkaz hotov.

Příklad 4. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - a_{k+1}) \leq \frac{n}{2},$$

kde $a_{n+1} = a_1$. Například pro $n = 4$ jde o nerovnost

$$a_1(1 - a_2) + a_2(1 - a_3) + a_3(1 - a_4) + a_4(1 - a_1) \leq 2.$$

Řešení: Levá strana nerovnosti je lineární výraz vzhledem ke každé z proměnných a_i, proto nabývá největší hodnoty v jednom z krajních bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Opět tedy stačí otestovat hodnotu levé strany v bodech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_k \in \{0, 1\}$ pro každé k. Všimněme si, že každý sčítanec $a_k(1-a_{k+1})$ je buď 1 (je-li $a_k = 1$ a $a_{k+1} = 0$), nebo 0 (v ostatních případech). Nechť tedy m udává počet indexů k, pro něž $(a_k, a_{k+1}) = (1, 0)$, a nechť l udává počet indexů k, pro něž $(a_k, a_{k+1}) = (1, 1)$. Potom počet všech proměnných $a_k = 0$ bude roven $n - m - l$, neboť proměnných $a_k = 1$ je právě $m + l$ (za každou jedničkou následuje buď nula nebo jednička). Protože levá strana nerovnosti je rovna m, stačí dokázat, že $m \leq \frac{n}{2}$. To je však zřejmé, neboť z definice počtu m a významu počtu $n-m-l$ plyne $n-m-l \geq m$, odkud zřejmě $n \geq n-l \geq 2m$, čili $m \leq \frac{n}{2}$. Důkaz je hotov.

V dalších třech úlohách poměrně neobvykle využijeme vhodně zvolenou *kvadratickou funkci*. Připomeňme si nejprve, jak vypadá její graf na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Tím je, jak jistě víme, oblouk paraboly, o jejíž orientaci ve svislém směru rozhoduje koeficient kvadratického členu. Je-li kladný, pak je příslušná parabola „otevřená nahoru“, a proto maximální hodnoty dosahuje funkce v jednom z krajních bodů a, b. Je-li koeficient kvadratického členu záporný, pak je parabola „otevřená dolů“, tudíž svého minima dosáhne opět v bodě a nebo b. Tedy v obou případech nalezení maxima, resp. minima opět spočívá ve výpočtu a porovnání hodnot dané funkce v krajních bodech daného intervalu.

Příklad 5. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 1, 3\rangle$ platí nerovnost

$$(a+b+c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Po ekvivalentních úpravách postupně dostáváme

$$(a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd \leq 0.$$

Vidíme, že levá strana nerovnosti je v každé ze čtyř proměnných kvadratický výraz ve tvaru x^2+px+q s kladným koeficientem 1 u x^2, takže nikde uvnitř daného intervalu $\langle 1, 3\rangle$ nemůže mít hodnotu větší, než jsou obě hodnoty v krajních bodech $x = 1$ a $x = 3$. Největší hodnoty tedy musí nutně nabývat v krajním bodě 1 nebo 3. Stačí proto původní nerovnost ověřit pro libovolnou čtveřici sestavenou z těchto dvou hodnot.

Je-li v takové čtveřici k čísel rovno číslu 3 a ostatních $4-k$ čísel rovno 1, pak dostáváme

$$(3k+4-k)^2 \geq 3(9k+4-k),$$

$$(2k+4)^2 \geq 27k+12-3k,$$

$$4k^2-8k+4 \geq 0,$$

$$(k-1)^2 \geq 0,$$

což je zřejmé. Přitom rovnost nastane jen tehdy, je-li $k=1$, tj. jedno z čísel a, b, c je rovno 3 a ostatní se rovnají 1.

K dokončení důkazu dodejme, že úvahu z jeho závěru o „obecné“ hodnotě k bylo možno nahradit (s ohledem na symetrii) konkrétním dosazením pěti čtveřic (a, b, c, d):

$$(1,1,1,1), \quad (1,1,1,3), \quad (1,1,3,3), \quad (1,3,3,3), \quad (3,3,3,3)$$

Příklad 6. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ platí nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + 1 \right)^2 \geq 4 \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Například pro $n=3$ se jedná o nerovnost

$$(a_1+a_2+a_3+1)^2 \geq 4(a_1^2+a_2^2+a_3^2).$$

Řešení: Uvažme rozdíl

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + 1 \right)^2 - 4 \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Je patrné, že jde o kvadratický výraz vzhledem ke každé z proměnných a_k $(k=1,2,\ldots,n)$, přičemž vzhledem k a_k je to kvadratický výraz se záporným koeficientem -3 u členu a_k^2. Grafem příslušné funkce je tedy parabola otevřená směrem dolů, čili své nejmenší hodnoty na daném intervalu $\langle 0,1 \rangle$ funkce nutně dosahuje při $a_k = 0$ nebo $a_k = 1$. Stačí proto dokázat zadanou nerovnost pro případ, kdy každé z čísel a_k $(k=1,2,\ldots,n)$ je rovno 0 nebo 1. Nechť tedy l je počet těch čísel

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, která jsou rovna 1, všechna zbylá a_k jsou pak rovna 0. Tehdy má zkoumaná nerovnost tvar $(l+1)^2 \geq 4l$, neboli $(l-1)^2 \geq 0$, což je však zřejmé.

Příklad 7. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k - 2a_{k+1}) \leq \frac{n}{2},$$

kde $a_{n+1} = a_1$. Například pro $n = 3$ jde o nerovnost

$$a_1(a_1 - 2a_2) + a_2(a_2 - 2a_3) + a_3(a_3 - 2a_1) \leq \frac{3}{2}.$$

Řešení: Levou stranu nerovnosti můžeme považovat za výraz proměnné a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Je to kvadratický výraz s kladným koeficientem 1 u členu a_k^2, který proto na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ dosahuje své největší hodnoty v jednom z jeho krajních bodů. Stačí tedy dokázat platnost dané nerovnosti za předpokladu, že každé z čísel a_k je rovno 0 nebo 1.

Nechť tedy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je posloupnost nul a jedniček. Jsou-li v této posloupnosti některé dva sousední členy rovny jedné (např. $a_k = a_{k+1} = 1$), nahradíme druhý z nich (tzn. a_{k+1}) nulou, přičemž členy a_n a a_1 považujeme rovněž za sousední. Je zřejmé, že hodnota levé strany dané nerovnosti tímto vzroste aspoň o 1, neboť se změní pouze tato část součtu $a_k(a_k - 2a_{k+1}) + a_{k+1}(a_{k+1} - 2a_{k+2})$, a to z hodnoty $-2a_{k+2}$ na hodnotu 1. Po konečném počtu takových změn získáme takovou posloupnost nul a jedniček $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, ve které žádné dva sousední členy nejsou rovny jedné. Počet jedniček v této posloupnosti jistě nepřevyšuje číslo $\frac{n}{2}$, a proto rovněž i

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k(a'_k - 2a'_{k+1}) \leq \frac{n}{2},$$

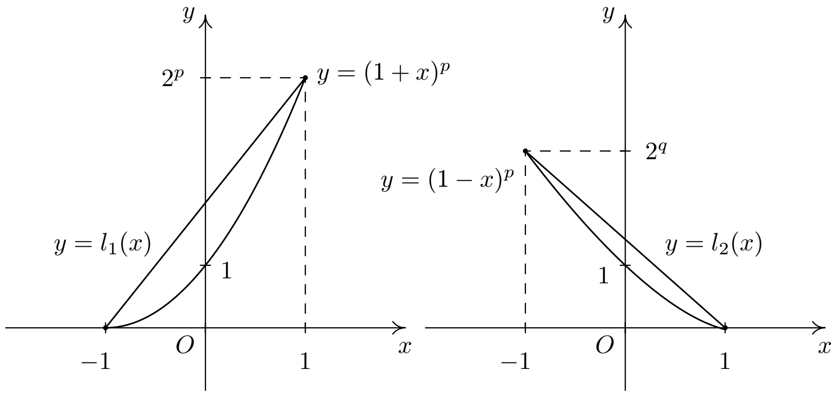
neboť každý sčítanec je roven buď nule (je-li $a'_k = 0$), nebo jedné (je-li $a'_k = 1$, pak totiž $a'_{k+1} = 0$). Tím je důkaz hotov.

Ve třetí části článku budeme pracovat s funkcemi, kterým v matematice říkáme *konvexní* a *konkávní* (viz [2, str. 112]). Při řešení první úlohy však vystačíme se znalostí grafů *mocninných* funkcí.

Příklad 8. Dokažte, že pro každá reálná čísla $p, q > 1$ a každé x z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ platí nerovnost

$$(1+x)^p + (1-x)^q \leq \max\{2^p, 2^q\}.$$

Řešení: Na obrázcích můžeme vidět grafy funkcí $f_1\colon y = (1+x)^p$ a $f_2\colon y = (1-x)^q$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.



Jejich krajními body jsou proloženy přímky o rovnicích $y = l_1(x)$ a $y = l_2(x)$. Jak je známo o „zakřivení" grafů mocninných funkcí, předpoklady $p > 1$ a $q > 1$ zaručují, že oblouky, jež jsou grafy funkcí f_1 a f_2, leží pod sestrojenými přímkami, takže pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí nerovnosti

$$(1+x)^p \le l_1(x) \quad \text{a} \quad (1-x)^q \le l_2(x).$$

Po jejich sečtení dostáváme nerovnost

$$(1+x)^p + (1-x)^q \le l_1(x) + l_2(x),$$

jejíž pravá strana je zřejmě lineární funkce s hodnotou 2^q v bodě $x = -1$ a hodnotou 2^p v bodě $x = 1$. To znamená, že $l_1(x) + l_2(x) \le \max\{2^p, 2^q\}$ pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$. Tím je důkaz hotov.

Zamysleme se nyní nad tím, co bylo v předchozím řešení nejdůležitější. Využili jsme toho, že grafy obou funkcí ležely mezi každými svými dvěma body pod jejich spojnicí neboli – jinak řečeno – nad každou svou tečnou. V takovém případě říkáme, že daná funkce je na daném intervalu konvexní. Funkce f je na daném intervalu I konvexní, jestliže pro její druhou derivaci platí $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$ [2, str. 113]. Je zřejmé, že taková funkce nemůže mít uvnitř intervalu I lokální maximum, neboť v každém vnitřním bodě intervalu I s nulovou první derivací má (s ohledem na kladnou druhou derivaci) lokální minimum. Obdobně funkce splňující podmínku $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$ je na intervalu I konkávní. Její graf leží v každém bodě intervalu I pod svou tečnou, takže ve vnitřním bodě I nemůže mít maximum.

Tedy při „omezování" obecné *konvexní* funkce *shora* či *konkávní* funkce *zdola* můžeme postupovat podobným způsobem jako u funkce kvadratické. Je-li totiž funkce f konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$f(x) \le \max\{f(a), f(b)\},$$

a obdobně v případě konkávní funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ máme

$$f(x) \ge \min\{f(a), f(b)\}.$$

K uplatnění takové metody je však nutné o případné konvexnosti (konkávnosti) vhodné funkce nejprve rozhodnout. Jak již bylo zmíněno výše, postačující podmínkou je kladné (záporné) znaménko druhé derivace vyšetřované funkce.

Následující úlohu řešili soutěžící matematické olympiády v USA v roce 1980.

Příklad 9. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1\,.$$

Řešení: Z levé strany nerovnosti vytvoříme funkci proměnné a

$$f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

a spočítáme její první a druhou derivaci:

$$f'(a) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(c+a+1)^2} - \frac{c}{(a+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$$

$$f''(a) = \frac{2b}{(c+a+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} \ge 0 \quad \text{pro všechna } a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$$

Funkce f je tedy na intervalu $\langle 0,1\rangle$ konvexní, a proto největší hodnoty dosahuje v jednom z jeho krajních bodů. Stačí tedy ověřit platnost nerovnosti ze zadání pouze pro případ, kdy je každé z čísel a,b,c rovno 0 nebo 1. S ohledem na symetrii vyšetříme pouze trojice $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$:

$$f(0,0,0)=0+1=1, \qquad f(1,0,0)=1+0=1,$$
$$f(1,1,0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1, \qquad f(1,1,1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=1.$$

Tím je důkaz hotov.

Na závěr článku nabízíme čtenářům k samostatné práci dvě úlohy.

Úloha 1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a,b,c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí

$$1\le a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c)\le 9.$$

(Řešení viz [6])

Úloha 2. Dokažte, že pro libovolná čísla $a_1,a_2,\dots,a_n$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}+\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\ge\frac{1}{2}.$$

(Řešení viz [3])

Literatura

[1] Andreescu, T., Gelca, R.: *Putnam and Beyond.* Springer Verlag, New York, 2007.

[2] Hrubý, D., Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, Praha, 1997.

[3] Kourliandtchik, L.: *Powrót do krainy nierówności.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2001.

[4] Lozanski, E., Rousseau, C.: *Winning Solutions.* Springer Verlag, New York, 1996.

[5] Negut, A.: *Problems for the Mathematical Olympiads.* GIL Publishing House, Zalau, 2005.

[6] Úloha MO-B-55-II-4. `http://math.muni.cz/mo`.