Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Procvičme se v určování obsahů rovinných obrazců

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 1, 35–39

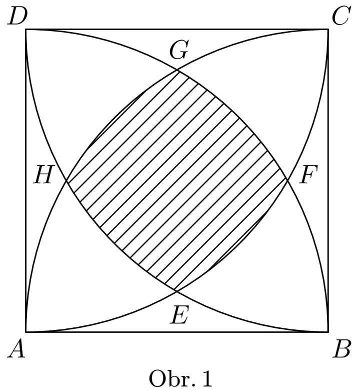
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146347`

Procvičme se v určování obsahů rovinných obrazců

Emil Calda, MFF UK Praha

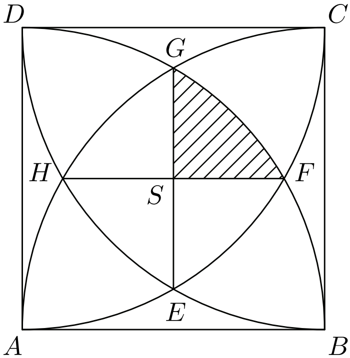
Abstract. Two approaches to a problem concerning the area of a given plane figure are demonstrated.

Představte si nejprve, že je dán jednotkový čtverec $ABCD$ a že máte určit množinu všech bodů, které leží v jeho rovině a které od každého vrcholu tohoto čtverce mají vzdálenost nejvýše rovnou jedné. Nemělo by vám činit potíže zdůvodnit, že touto množinou je průnik čtyř kruhů s jednotkovými poloměry a se středy v bodech A, B, C, D, který je znázorněn šrafováním na obr. 1. Budete však umět určit jeho obsah? Pokuste se o to nejprve sami a teprve pak se podívejte na dva způsoby, kterými obsah tohoto obrazce vypočítáme v následujících řádcích.



Obr. 1

První způsob je založen na tom, že daný útvar rozložíme na několik nepřekrývajících se částí, jejichž obsahy určit umíme. V našem případě rozložíme obrazec $EFGH$, jehož obsah máme určit, podle obr. 2 na čtyři shodné části SEF, SFG, SGH a SHE, kde S je střed čtverce $ABCD$, a určíme obsah jedné z nich – třeba obsah vyšrafovaného útvaru SFG. Z obr. 2 je vidět, že jeho obsah O dostaneme tak, že od obsahu O_1 kruhové výseče AFG odečteme obsah O_2 trojúhelníku AFG a k tomuto rozdílu přičteme obsah O_3 pravoúhlého trojúhelníku SFG; platí tedy $O = O_1 - O_2 + O_3$.



Obr. 2

Kruhová výseč AFG je částí kruhu se středem v bodě A a s poloměrem rovným jedné; vzhledem k tomu, že její středový úhel je 30°, tj. jedna dvanáctina plného úhlu, platí pro její obsah:

$$O_1 = \frac{\pi}{12}$$

Trojúhelník AFG je shodný s trojúhelníkem ABF, jehož obsah je roven polovičnímu součinu délky základny AB a velikosti příslušné výšky; vzhledem k tomu, že $|AB| = 1$ a že příslušná výška (tj. výška z vrcholu F) má velikost rovnou $\frac{|BC|}{2} = \frac{1}{2}$, platí pro jeho obsah, a tedy i pro obsah O_2 trojúhelníku AFG:

$$O_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

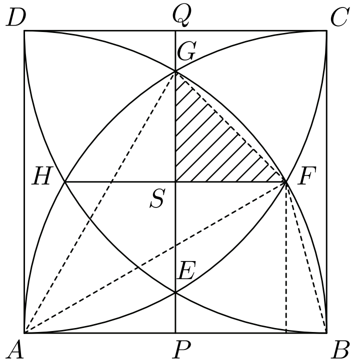
K určení obsahu trojúhelníku SFG, který je pravoúhlý a rovnoramenný, si dobře prohlédněte obr. 3, v němž P je střed strany AB a Q je střed strany DC. Ověřte si, že platí

$$|SG| = \frac{1}{2}|BC| - |GQ|,$$

kde

$$|GQ| = |PQ| - |GP| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

neboť GP je výška rovnostranného trojúhelníku ABG, jehož strany mají délku rovnou jedné.



Obr. 3

Pro obsah O_3 trojúhelníku SFG proto máme:

$$O_3 = \frac{1}{2} \cdot |SG| \cdot |SF| = \frac{1}{2}\,|SG|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah O útvaru SFG je tedy

$$O = O_1 - O_2 + O_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

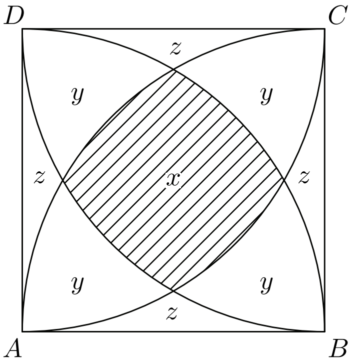
A protože obsah obrazce $EFGH$ je roven čtyřnásobku obsahu útvaru SFG, docházíme k závěru, že obsah obrazce $EFGH$ vyšrafovaného na obr. 1 je roven

$$\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}.$$

Při řešení druhým způsobem rozložíme na nepřekrývající se části celý čtverec $ABCD$; obsahy jednotlivých útvarů, na něž se daný čtverec rozpadá, označíme podle obr. 4 písmeny x, y, z. Pokusíme se nyní sestavit soustavu rovnic, ze které by se daly neznámé x, y, z vypočítat.

Protože obsah daného jednotkového čtverce $ABCD$ je roven součtu všech devíti částí, z nichž je podle obr. 4 složen, platí

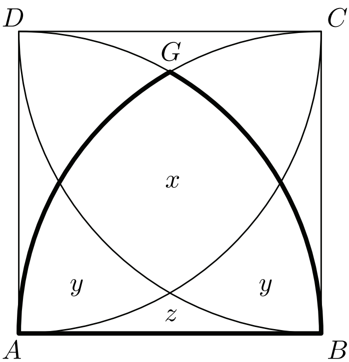
$$x + 4y + 4z = 1.$$



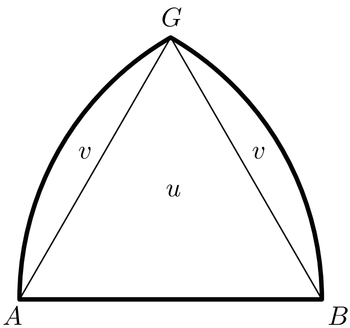
Obr. 4

Protože obsah každého ze čtyř čtvrtkruhů s poloměrem rovným jedné a se středy v jednotlivých vrcholech čtverce $ABCD$ je roven součtu všech šesti částí, z nichž je složen, platí

$$x + 3y + 2z = \frac{\pi}{4}.$$



Obr. 5



Obr. 6

K získání třetí rovnice si všimněme obrazce ABG, který je na obr. 5 silně vytažen. Jeho obsah vyjádříme dvěma způsoby: jednak jako součet

$x+2y+z$, jednak podle obr. 6 jako součet $u+2v$, kde u je obsah rovnostranného trojúhelníku ABG, jehož strany mají délku rovnou jedné, takže $u=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Z obr. 6 je dále vidět, že součet $u+v$ udává obsah kruhové výseče se středem v bodě A a se středovým úhlem $60°$, takže je $u+v=\frac{\pi}{6}$. Platí tedy

$$x+2y+z=(u+2v)=2(u+v)-u=\frac{2\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tímto způsobem jsme získali soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$x+4y+4z=1$$
$$x+3y+2z=\frac{\pi}{4}$$
$$x+2y+z=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Čtenář se může přesvědčit, že tato soustava má jediné řešení, a to

$$x=1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3},$$
$$y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12},$$
$$z=1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}.$$

Obsah obrazce $EFGH$ vyšrafovaného na obr. 1 je tedy roven

$$1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$

Uvedené a ještě další postupy výpočtu obsahu daného geometrického obrazce lze nalézt např. v publikacích [1], [2], [3].

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem*, Prometheus, Praha, 2006.

[2] Zhouf, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*, Prometheus, Praha, 2006, s. 187, 358–359.

[3] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2009, s. 75, 139.