Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 3, 60–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146319

NAŠE SOUTĚŽ

V prvních dvou číslech letošního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika Naše soutěž. Byly tam vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů budou sčítat a povede se průběžná výsledková listina. V listině se nebudou rozlišovat úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům se bude periodicky zasílat matematická literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. listopadu 2009* na adresu redakce.

Úloha 5.

a) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n se součet číslic čísla $n^2 + n^4 + n^6$ nerovná číslu $2^2 + 4^2 + 6^2$.

b) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n se součet číslic čísla n^2 nerovná číslu 2009. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 6. Na těleso o hmotnosti m, které se nacházelo v klidu v bodě A, začala v čase $t = 0$ s působit stálá síla $\boldsymbol{F}_1$, která na těleso působila po dobu t_1. Potom působila na těleso stálá síla $\boldsymbol{F}_2$ opačného směru než $\boldsymbol{F}_1$. Působila rovněž po dobu t_1, takže v čase $2t_1$ při průchodu bodem A mělo těleso rychlost $\boldsymbol{v}_2$. Hmotnost tělesa m, dobu t_1 a velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ známe.

a) Určete maximální vzdálenost s tělesa od bodu A v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$ a dobu $t_2 \in \langle 0; 2t_1 \rangle$, za kterou se těleso do této vzdálenosti dostane.

b) Určete velikosti sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$.
Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty $t_1 = 30$ s, $m = 10$ kg, $v_2 = 72$ m $\cdot$ s^{-1}.

c) Pro dané hodnoty sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti tělesa na čase v intervalu $t \in \langle 0; 2t_1 \rangle$.
d) Z grafu sestrojeného v úloze c) určete maximální vzdálenost tělesa od bodu A. Takto určenou hodnotu porovnejte s hodnotou vypočtenou v úloze a).
e) Určete průměrnou rychlost tělesa v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$. Vypočtenou hodnotu průměrné rychlosti vyznačte v grafu úlohy c).

Ve všech částech úlohy považujte těleso za hmotný bod.

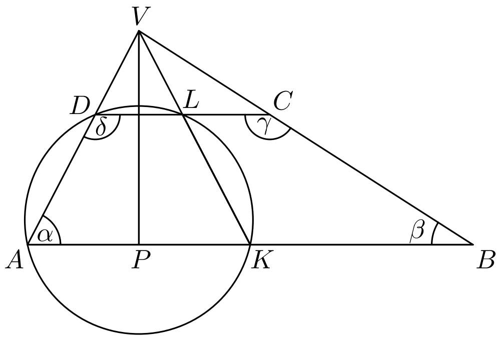
(*Přemysl Šedivý*)

Řešení úloh z čísla 1/2009

Úloha 1. V lichoběžníku $ABCD$ je K střed základny AB a L střed základny CD. Dokažte, že lichoběžníku $AKLD$ lze opsat kružnici, právě když $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$, kde α a β jsou vnitřní úhly při vrcholech A a B lichoběžníku. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Lichoběžníku lze opsat kružnici, právě když je rovnoramenný. Jelikož jsou body K a L středy stran AB a CD, protínají se přímky AD, KL a BC v jednom bodě V. Úhel α může být buď ostrý, nebo tupý.

Uvažujme nejprve, že úhel α je ostrý (obr. 1).



Obr. 1

Lichoběžníku $AKLD$ lze opsat kružnici, právě když je lichoběžník rovnoramenný s delší základnou AB a kratší základnou CD. To je, právě když výška VP trojúhelníku AKV je osou souměrnosti tohoto trojúhelníku, a to je právě když $3 \cdot |AP| = |PB|$, což je právě když

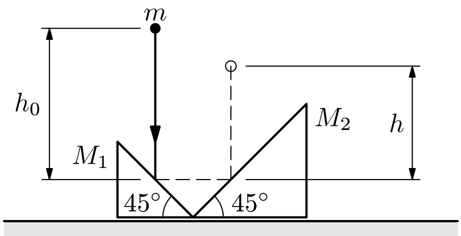
$$\frac{|VP|}{3 \cdot |AP|} = \frac{|VP|}{|PB|},$$

a to je právě když $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

Uvažujme nyní, že úhel α je tupý. Rovnost $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$ je ekvivalentní rovnosti $-\operatorname{tg} \delta = -3 \operatorname{tg} \gamma$, kde $\delta = |\sphericalangle ADC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCD|$, což je ekvivalentní rovnosti $\operatorname{tg} \delta = 3 \operatorname{tg} \gamma$ a přitom úhel δ je ostrý. Tento případ je vyřešen v předchozím odstavci.

Úloha 2. Na hladkém vodorovném ledě leží dva klíny o hmotnostech M_1 a M_2, jejichž úhly sklonu jsou 45° (obr. 1). Na první klín dopadne volným pádem kulička o hmotnosti m z výšky h_0. Tato kulička se od klínu dokonale pružně odrazí a dopadne na druhý klín, kde opět dojde k dokonale pružné srážce s klínem. Kulička potom vystoupí do výšky h.

a) Určete poměr výšek $\frac{h}{h_0}$.
b) Určete rychlost, s jakou se od sebe klíny vzdalují po odrazu kuličky od druhého klínu.



Obr. 1

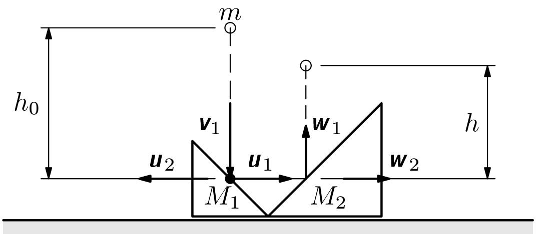
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\frac{M_1}{m} = 10$, $\frac{M_2}{M_1} = 2$, $h_0 = 0{,}5$ m, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tření mezi ledem a klíny zanedbejte.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení: (podle M. Bucháčka)

a) Vektory rychlostí kuliček (s indexem 1) a klínů (s indexem 2) jsou vyznačeny na obr. 2. Označme rychlost před srážkou symbolem $\boldsymbol{v}$, rychlosti po první srážce symbolem $\boldsymbol{u}$ a po druhé srážce $\boldsymbol{w}$. Protože srážky jsou dokonale pružné, platí zde zákon zachování mechanické energie i zákon zachování hybnosti, přičemž vektor hybnosti si vždy můžeme rozložit na vodorovný a svislý směr. Velikost vektoru hybnosti v obou těchto směrech před srážkou i po srážce musí zůstat zachována. Ve svislém směru se po nárazu klín kvůli podložce pohybovat nemůže, a proto se tato změna hybnosti rovná impulsu síly $\boldsymbol{F}$, která bude po dobu Δt působit na klín, současně s tíhovou silou na podložku. Protože je směr této síly kolmý ke směru pohybu, nekoná tato síla práci. Zákon zachování hybnosti ve vodorovném směru zapíšeme již pomocí skalárů. S ohledem na vyznačené směry vektorů rychlostí platí

$$M_1 u_2 = m u_1.$$



Obr. 2

Podle zákona zachování mechanické energie (v tomto případě kinetické) platí

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 u_2^2 + \frac{1}{2} m u_1^2.$$

Z první rovnice vyjádříme u_2 a dosadíme do druhé. Po úpravách získáváme

$$u_1^2 = \frac{M_1}{M_1 + m} v_1^2.$$

Podobně pro druhou srážku ve vodorovném směru platí

$$m u_1 = M_2 w_2,$$

$$\frac{1}{2} m u_1^2 = \frac{1}{2} M_2 w_2^2 + \frac{1}{2} m w_1^2.$$

Z první rovnice opět jako v předchozím případě vyjádříme w_2, po dosazení do druhé rovnice a úpravách dostaneme

$$w_1^2 = \frac{M_2 - m}{M_2} u_1^2 = \frac{M_1}{M_1 + m} \frac{M_2 - m}{M_2} v_1^2.$$

Nyní odvodíme užitím zákona zachování mechanické energie vztah mezi velikostí rychlosti v_1 a výškou h_0. Při přeměně potenciální energie na energii kinetickou platí

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Odtud

$$h_0 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Potom poměr

$$\frac{h}{h_0} = \frac{w_1^2}{v_1^2} = \frac{M_1}{M_1 + m}\frac{M_2 - m}{M_2}.$$

Dále podle zadání dosadíme $M_1 = 10m$, $M_2 = 20m$. Obdržíme

$$\frac{h}{h_0} = \frac{10 \cdot 19}{11 \cdot 20} \doteq 0{,}864.$$

b) Velikost rychlosti v, s jakou se klíny od sebe vzdalují po srážce, určíme jako součet velikostí rychlostí u_2 a w_2 z rovnosti

$$v = u_2 + w_2 = \frac{m}{M_1}u_1 + \frac{m}{M_2}u_1 = \frac{m}{M_1}v_1\sqrt{\frac{M_1}{M_1 + m}} + \frac{m}{M_2}v_1\sqrt{\frac{M_1}{M_1 + m}},$$

$$v = mv_1\sqrt{\frac{M_1}{M_1 + m}}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right).$$

Za v_1 dosadíme z již dříve uvedeného vztahu

$$v_1 = \sqrt{2h_0 g},$$

čímž nakonec dostaneme

$$v = m\sqrt{\frac{2h_0 g M_1}{M_1 + m}}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right).$$

Po dosazení zadaných hodnot obdržíme $v = 0{,}452\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Stav soutěže po 2 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 7 bodů