

Rozhledy matematicko-fyzikální

Miroslava Jarešová; Jaroslav Zhouf
Spirály a jejich význam v praxi

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 3, 5–19

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146312>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Spirály a jejich význam v praxi

Miroslava Jarešová, SŠPST a VOŠ Chrudim

Jaroslav Zhouf, PedF UK Praha

Abstract. First, the article describes the occurrences of spiral curves in nature and in human artefacts. Then, it studies the description of spirals by means of mathematical formulas.

1. Historie a užití

Se spirálami je možno se setkat prakticky všude. Jedním z prvních, kdo před 2300 lety popsal tuto křivku, byl *Archimédes*. Tzv. *Archimédova spirála* se vyskytuje např. jako trajektorie bodu, který se pohybuje po polopřímce od jejího počátečního bodu v pólu O konstantní rychlostí, zatímco polopřímka se sama otáčí kolem pólu při konstantní úhlové rychlosti (tento pohyb se může vyskytnout např. při pohybu mouchy lezoucí po hodinové ručičce od středu hodin na její druhý konec).

Ve výše popsané situaci jsme uvažovali případ, kdy spirála je křivka ležící v rovině. V praktickém životě se však také můžeme setkat s křivkami v prostoru, kdy můžeme říci, že průmět této prostorové křivky do roviny kolmé na její podélnou osu rovněž tvoří spirálu, jak je uvedeno



Obr. 1

v níže popsaných příkladech. Archimédova spirála se také vyskytuje v různých mechanismech ve strojnictví jako tzv. *Archimédův šroub* (technicky se této křivce říká závitnice). Na jejím principu pracují např. vrtáky a šrouby (obr. 1). Tvaru spirály se říká *helix* a právě takové spirály se asi nejčastěji vyskytují v technické praxi. Také popínavé rostliny, jako je např. svlačec (obr. 2), šplhají ke Slunci se závitý tvaru *helix* tak, jak tuto spirálu popsal Archimédes.



Obr. 2

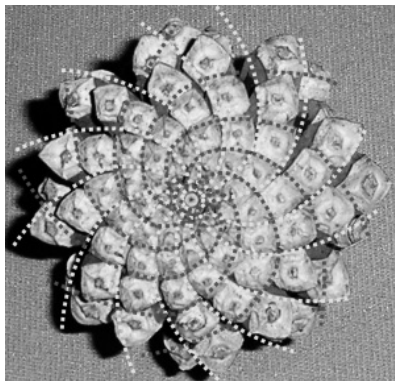
Logaritmická spirála je křivka, u níž vzdálenost bodu od pólu roste exponenciálně s velikostí úhlu. První, kdo se zabýval problémem logaritmické spirály, byl *René Descartes* přibližně kolem roku 1638. Nezávisle na Descartovi zkoumal logaritmickou spirálu *Evangelista Torricelli*, který zároveň stanovil vzorec pro výpočet délky křivky. Tato spirála sehrála svoji roli také v životě *Jacoba Bernoulliho*, který ji nejspíš zkoumal natolik, že si nakonec nechal vytesat na svou hrobku nápis **EADEM MUTATA RESURGO**, což znamená asi **AČ ZMĚNĚN, STÁLE ZŮSTÁVÁ STEJNÝ**. Tento text také dost výstižně charakterizuje křivku samotnou – mluvíme o tzv. *evoluční vlastnosti spirály*.

Další výstižné názvy pro tuto křivku jsou *Fibonacciho spirála*, *ekvalingulární spirála*, *růstová spirála*, *Bernoulliho spirála* nebo *spira mirabilis*.

Všimněme si, kde všude se s touto spirálou můžeme setkat. Zajímavé je např. uspořádání semen slunečnice [6], z nichž část je ve spirálách ve směru hodinových ručiček a část ve spirálách vinoucích se opačným směrem. Podobně je tomu i u některých jiných rostlin, jako jsou např. třapatka (obr. 3) nebo borové šišky (obr. 4).



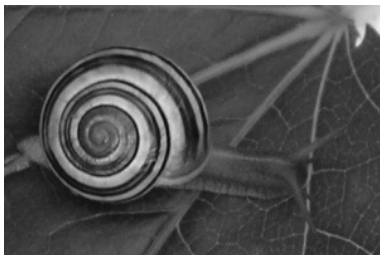
Obr. 3



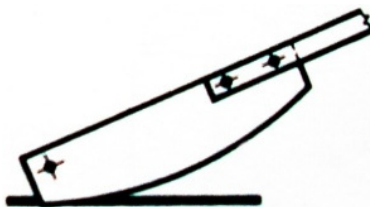
Obr. 4

Tvar logaritmické spirály má většina neživých částí živých organismů – ulity měkkýšů (obr. 5), rohy, drápy, sloní kly. Také pavoučí sítě jsou tkány v podobě logaritmické spirály. Zůstaneme-li ještě u hmyzu, pak i moucha, když letí např. ke zdroji světla, letí v takovém směru, aby svíral stále stejný úhel se směrem paprsků (v praxi to ale pozorujeme méně, protože cíl je obvykle hodně vzdálený a my pak pohyb vnímáme spíš jako přímočarý). Tvar logaritmické spirály má také např. řezná část nože na plech (obr. 6), aby byla využita ta její vlastnost, že tečna

v libovolném bodě bříty svírá konstantní úhel s vektorem poloměru křivosti v témže bodě.



Obr. 5



Obr. 6

Asi nejničivějšími logaritmickými spirálami o průměru několika set kilometrů jsou hurikány. Podobné spirály vytvářejí i proudy nízkého tlaku vzduchu – severně od rovníku rotují ve směru hodinových ručiček, zatímco na jižní polokouli se otáčejí opačně. Už viktoriánští astronomové popsali výjimečnou trajektorii Merkuru – oběžná dráha má tvar obrovité spirály. Víme také, že existují spirální galaxie.

O dalších spirálách se v této úvodní části zmíníme jen stručně, podrobněji si o nich řekneme v hlavní části tohoto článku.

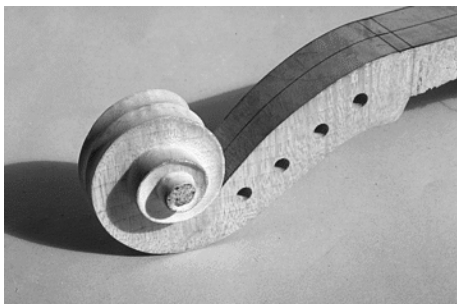
Hyperbolickou spirálu objevil *Piere Varignon* v roce 1704. Dále ji pak studoval *Johann Bernoulli* v letech 1710–1713 a též *Roger Cotes*.

Fermatovu spirálu navrhl *Pierre de Fermat* (1601–1665) v roce 1636.

Lituuovu spirálu navrhl *Roger Cotes*. *Colin Maclaurin* použil tento výraz v knize *Harmonia Mensurarum* v roce 1722. Lituus znamená háček. S touto spirálou se můžeme setkat např. u historických památek (obr. 7 – Varhanní fontána v Římě) nebo také u zakončení strunných hudebních nástrojů (obr. 8).



Obr. 7



Obr. 8

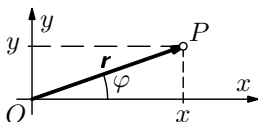


Obr. 9

Poznámka: Je jistě zajímavé, že jedna z prvních spirál zřejmě vznikla v době íónského řádu (6. stol. př. n. l.), kdy vznikaly tzv. íónské sloupy. Hlavice íónského sloupu (obr. 9) je spirálovitě zakončena pomocí kružnicových oblouků, které na sebe navazují (obdoba tzv. *zlaté spirály*).

2. Matematické vyjádření spirál

Ještě než se začneme zabývat matematickým popisem spirál, ukážeme, jakým způsobem jsou zavedeny tzv. *polární souřadnice*, které se velmi často k matematickému vyjádření spirál používají. Polární souřadnice jsou určeny pomocí vzdálenosti bodu $r \geq 0$ od počátku O a polárním úhlem $\varphi \geq 0$, který odčítáme od dané poloosy x vycházející z počátku proti směru chodu hodinových ručiček (obr. 10).



Obr. 10

Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztahy

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Kladnou poloosu x , tvořenou body s polárními úhly $\varphi = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, budeme nazývat *polární osou*, počátek O *pólem*. Úsečce OP budeme říkat *průvodič* bodu P .

Po zavedení polárních souřadnic se již budeme zabývat matematickým popisem jednotlivých křivek.

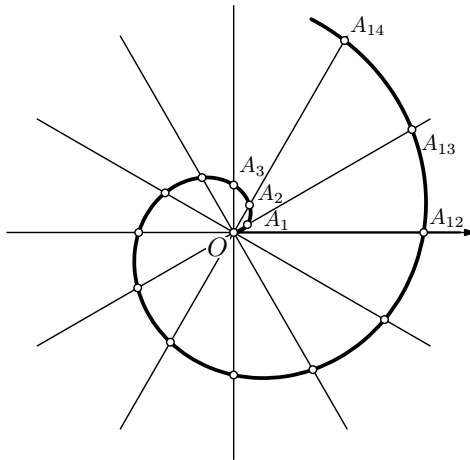
2.1 Archimédova spirála

Její rovnice má v polárních souřadnicích r, φ tvar

$$r = a\varphi, \quad (1)$$

kde a je daná kladná konstanta a úhel φ probíhá množinu všech nezáporných čísel.

Podle rovnice spirály nakreslíme její přibližný tvar. Úhel 2π s vrcholem O rozdělíme na několik stejných částí, v našem případě zvolíme 12 částí. Z bodu O pak provedeme 12 dělicích polopřímek (obr. 11).



Obr. 11

Tyto polopřímky budou svírat s polární osou po řadě úhly

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2 = 2\varphi_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}, \quad \dots$$

Z rovnice křivky nalezneme příslušné délky průvodičů

$$r_1 = \frac{\pi}{6}a, \quad r_2 = 2r_1 = \frac{\pi}{3}a, \quad \dots$$

K sestrojení bodů spirály, které leží na zvolených polopřímkách, zbývá už jen nanést na tyto polopřímky od pólu délky r_1, r_2, r_3 atd. Tímto způsobem dostaneme body spirály A_1, A_2, A_3 atd., kterými je na obr. 11 proložena plynulá čára – výsledná spirála.

Abychom sestrojili body, které odpovídají hodnotám $\varphi \geq 2\pi$, provedeme následující úvahu. Nechť $\varphi_{13} = \frac{2\pi}{12} + 2\pi$, příslušná hodnota průvodiče pak bude

$$r_{13} = a \left(\frac{2\pi}{12} + 2\pi \right) = \frac{2\pi}{12}a + 2\pi a.$$

Tato hodnota se liší od hodnoty r_1 příslušející prvnímu bodu, který leží na vyšetřované polopřímce, o $2\pi a$. Naneseme-li na ni od bodu A_1 už dříve sestrojeného, úsečku délky $2\pi a$, dostaneme další bod A_{13} naší spirály. Stejně můžeme sestroit i body na ostatních polopřímkách; nové hodnoty úhlu φ se budou lišit od hodnot φ pro body dříve sestrojené pokaždé o 2π .

Archimédovu spirálu je také možno modelovat na počítači. K tomu je vhodné přejít od polárních souřadnic k parametrickému vyjádření v kartézských souřadnicích. V tomto případě máme

$$x = r \cos \varphi = a\varphi \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = a\varphi \sin \varphi,$$

kde φ je parametr, $\varphi \geq 0$.

2.2 Logaritmická spirála

Rovnice logaritmické spirály v polárních souřadnicích r, φ má tvar

$$r = ae^{b\varphi},$$

kde $a > 0, b > 0$ jsou konstantní parametry, úhel φ probíhá interval $(0; +\infty)^*$. Pokud zlogaritmujeme obě strany rovnosti, dostaneme

$$\ln \frac{r}{a} = b\varphi.$$

Z tohoto vztahu vznikl název *logaritmická spirála*.

Konstrukce logaritmické spirály:

Budeme-li postupně polárnímu úhlu přiřazovat hodnoty, které tvoří aritmetickou posloupnost, bude polární poloměr nabývat hodnot, které tvoří geometrickou posloupnost, tj. např. při pevném $\varphi_1 > 0$ budeme volit

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_1, \quad \varphi_2 = 2\varphi_1, \quad \varphi_3 = 3\varphi_1, \quad \dots,$$

*) Pokud by úhel φ probíhal interval $(-\infty; 0)$, pak by spirála směřovala i na „druhou“ stranu a stáčela by se k počátku.

odkud je

$$r_0 = ae^{b\varphi_0} = a, \quad r_1 = ae^{b\varphi_1}, \quad r_2 = ae^{b\varphi_2} = a(e^{b\varphi_1})^2,$$

$$r_3 = ae^{b\varphi_3} = a(e^{b\varphi_1})^3, \dots$$

Abychom např. dostali osm různých polopřímek, zvolíme

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{3\pi}{4}, \dots, \quad \varphi_8 = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$

a vypočteme příslušné hodnoty průvodiče, tj.

$$r_0 = a, \quad r_1 = ae^{b\frac{\pi}{4}}, \quad r_2 = a(e^{b\frac{\pi}{4}})^2, \quad r_3 = a(e^{b\frac{\pi}{4}})^3, \dots, \quad r_8 = a(e^{b\frac{\pi}{4}})^8.$$

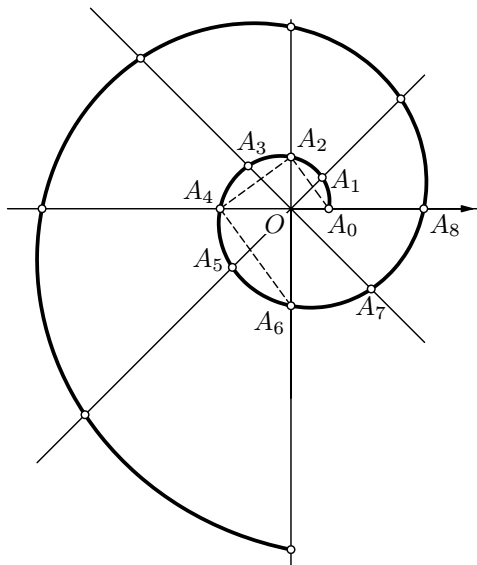
Když tedy rozdělíme úhel $\varphi = 2\pi$ na osm stejných částí a nanese­me na příslušné polopřímky úsečky odpovídající hodnotám průvodiče, do­staneme prvních devět bodů spirály (obr. 12).

Konstrukci dalších bodů lze provést geometricky. Všimněte si, že např. $r_2^2 = r_0r_4$, tj. poloměr, který odpovídá úhlu $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, je geometrickým průměrem poloměrů r_0 a r_4 , které odpovídají úhlům φ_0 a $\varphi_4 = \pi$. Úsečky A_0A_2 a A_2A_4 jsou tedy (podle Euklidovy věty o výšce) navzájem kolmé.

Analogicky bychom mohli postupovat i v dalším případě, kdy $r_4^2 = r_2r_6$, neboli r_4 je geometrickým průměrem hodnot r_2 , r_6 , které odpovídají úhlům $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi_6 = \frac{3\pi}{2}$. Na základě této úvahy můžeme opět říci, že bod A_6 dostaneme jako průsečík přímky OA_2 a kolmice vedené bodem A_4 na úsečku A_2A_4 .

Pomocí stejných úvah zjistíme, že přímky A_1A_3 a A_3A_5 jsou vzájemně kolmé, přímky A_3A_5 a A_5A_7 jsou vzájemně kolmé atd.

Pokud tímto způsobem budeme pokračovat dál, můžeme sestrojít li­bovolný počet bodů spirály ležících na vzájemně kolmých přímkách. Pro přesnější zakreslení spirály je však třeba ještě sestrojít řadu bodů, které budou ležet mezi dosud sestrojenými body. Sestrojíme-li jich dostatečné množství a spojíme je plynulou čarou, dostaneme křivku odpovídající logaritmické spirále, jak je znázorněna na obr. 12.



Obr. 12

Jiná konstrukce logaritmické spirály:

Rovnici logaritmické spirály je možno také zapsat v kartézských souřadnicích s parametrem φ

$$x = r \cos \varphi = ae^{b\varphi} \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi = ae^{b\varphi} \sin \varphi,$$

což je tvar vhodný pro vykreslování spirály pomocí počítače.

Pro hodnoty $b \rightarrow 0$ se bude „první závit“ spirály blížit kružnici (pro $b = 0$ vznikne kružnice). Změnu polárního poloměru lze vyjádřit derivací

$$\frac{dr}{d\varphi} = abe^{b\varphi} = br.$$

Z toho vyplývá, že rychlost rozšiřování závisí pouze na hodnotě b , hodnota a určuje vzdálenost počátku spirály od jejího pólu ($r_0 = a$ pro $\varphi_0 = 0$).

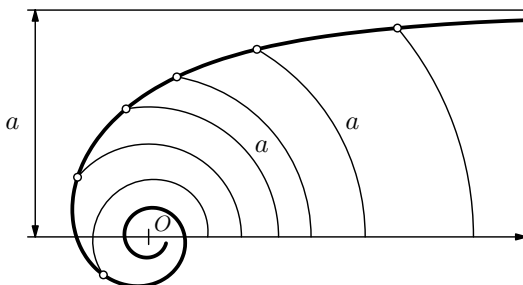
2.3 Hyperbolická spirála

Hyperbolická spirála má v polárních souřadnicích rovnici

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad (a = \text{konst.} > 0, \varphi \in (0; +\infty)).$$

Bude-li se úhel φ blížit k nule, délka průvodiče neomezeně poroste. Pro $\varphi = \pi$ je $r_0 = \frac{a}{\pi}$, pro $\varphi = 2\pi$ je průvodič poloviční $r = \frac{a}{2\pi} = \frac{r_0}{2}$, pro $\varphi = 3\pi$ je $r = \frac{r_0}{3}$ atd.

Při neomezeném vzrůstu úhlu φ se hodnoty poloměru r blíží k nule, ale nikdy jí nedosáhnou. To znamená, že křivka se neomezeně blíží k pólu O , ovine se kolem něj, ale nikdy ho nedosáhne (obr. 13). Takový bod nazýváme *asymptotickým bodem* křivky.



Obr. 13

Konstrukce hyperbolické spirály:

Abychom sestrojili danou křivku, přepíšeme její rovnici na tvar

$$a = r\varphi.$$

Z faktu, že

$$r\varphi = \text{konst.},$$

vyplývá způsob konstrukce spirály, který nyní popíšeme.

Sestrojíme řadu soustředných kružnic se středem v pólu a na každé z nich od jejího průsečíku s polární osou oblouk délky a . Délka každého oblouku se rovná součinu příslušného úhlu φ s poloměrem r kružnice, tj. $r\varphi$. Krajní bod každého oblouku, který tak obdržíme, tedy bude bod, který náleží dané spirále s rovnicí $r\varphi = a$ (obr. 13)*).

*) Toto můžeme ovšem provést pouze myšlenkově, prakticky toto lze provést jen přibližně (jednalo by se o rektifikaci kružnice).

V závislosti na tom se poloměry uvažovaných kružnic zvětšují, oblouky se neustále „narovňávají“ a blíží se tvaru úseček, které jsou kolmé k polární ose. To ukazuje, že body spirály se při přibližování úhlu φ k 0 blíží přímce, která je rovnoběžná s polární osou a prochází od ní ve vzdálenosti a (důkaz dále). Vzdálenost bodů spirály od této přímky se stále zmenšuje, nikdy však nepřejde v nulu. V tomto případě říkáme, že se spirála *asymptoticky blíží* ke zmíněné přímce.

Pokud bychom chtěli znázornit hyperbolicou spirálu graficky pomocí počítače, je výhodné přejít k parametrickému vyjádření v kartézských souřadnicích, tj.

$$x = \frac{a}{\varphi} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{\varphi} \sin \varphi.$$

Pomocí tohoto vyjádření se dá dokázat, že při $\varphi \rightarrow 0$ se spirála přibližuje přímce, která je rovnoběžná s polární osou. Platí totiž

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} a \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a,$$

neboť

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1.$$

Další spirály, se kterými je možno se v praxi také setkat, nyní popíšeme už poněkud stručněji.

2.4 Fermatova spirála

Fermatova spirála je spirála, která je pomocí polárních souřadnic popsána rovnicí

$$r^2 = a^2 \varphi,$$

kde $a = \text{konst.} > 0$, $\varphi \in \langle 0; +\infty \rangle$. Po odmocnění dostaneme rovnici

$$r = a\sqrt{\varphi}.$$

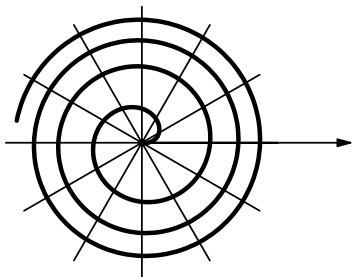
Spirála popsaná touto rovnicí je na obr. 14.

Pokud bychom ji chtěli znázornit na počítači, je opět vhodné napsat její parametrické vyjádření v kartézských souřadnicích

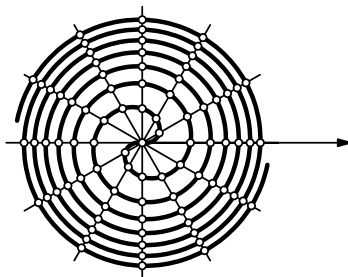
$$x = a\sqrt{\varphi} \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{\varphi} \sin \varphi, \quad \text{kde } \varphi \geq 0.$$

Pokud bychom připustili i $r < 0$, pak z rovnice $r^2 = a^2 \varphi$ dostaneme vedle $r = a\sqrt{\varphi}$ ještě druhou hodnotu $r = -a\sqrt{\varphi}$ pro danou hodnotu φ .

Vznikne tak spirála, která je středově souměrná podle pólu (obr. 15) a je také nazývána Fermatova spirála.



Obr. 14

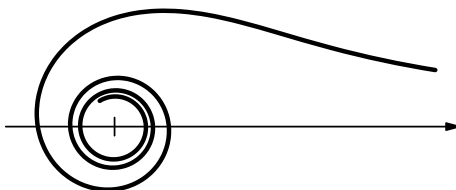


Obr. 15

2.5 Lituuova spirála

Lituuova spirála je spirála o rovnici v polárních souřadnicích r, φ tvaru

$$r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}, \quad \text{kde } a = \text{konst.} > 0, \varphi > 0.$$



Obr. 16

Pokud bychom chtěli tuto spirálu znázornit pomocí počítače (obr. 16), je opět vhodné ji vyjádřit parametricky v kartézských souřadnicích

$$x = \frac{a}{\sqrt{\varphi}} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{\sqrt{\varphi}} \sin \varphi, \quad \varphi > 0.$$

Shrnutí:

Pokud napíšeme rovnici spirály pomocí polárních souřadnic r, φ v obecnějším tvaru

$$r = a\varphi^b, \quad a = \text{konst.} > 0, b = \text{konst.} \in \mathbb{R},$$

potom dostaneme

- pro $b = 1$ Archimédovu spirálu o rovnici $r = a\varphi$,
- pro $b = -1$ hyperbolickou spirálu o rovnici $r = \frac{a}{\varphi}$,
- pro $b = \frac{1}{2}$ Fermatovu spirálu o rovnici $r = a\sqrt{\varphi}$,
- pro $b = -\frac{1}{2}$ Lituuovu spirálu o rovnici $r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$.

2.6 Sinová spirála

Touto spirálou se poprvé zabýval *Maclaurin*. Sinovou spirálu lze v polárních souřadnicích popsat rovnicí

$$r^m = a^m \sin(m\varphi),$$

kde a, m jsou konstanty, $a > 0$, m je racionální číslo. Po otočení soustavy souřadnic o úhel $\frac{\pi}{2m}$ je možno psát

$$r^m = a^m \cos(m\varphi).$$

Shrňme si nyní stručně případy sinové spirály, se kterými se můžeme setkat (i když už to nejsou spirály v pravém slova smyslu).

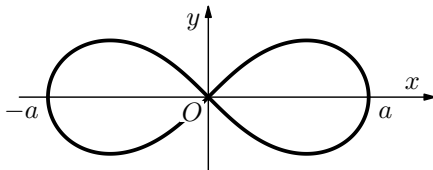
1. Pro $m = 1$ je $r = a \cos \varphi$. Zde stačí brát $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$, neboť křivka se pro $\varphi \geq 2\pi$ „namotává“ sama na sebe. Dostaneme rovnici kružnice

$$x^2 + y^2 = ax.$$

Toto se dá velmi snadno ukázat např. tak, že rovnici $r = a \cos \varphi$ vynásobíme r , takže dostaneme $r^2 = ar \cos \varphi$, což převedeme na tvar $x^2 + y^2 = ar \cos \varphi = ax$. Toto je středový tvar rovnice kružnice

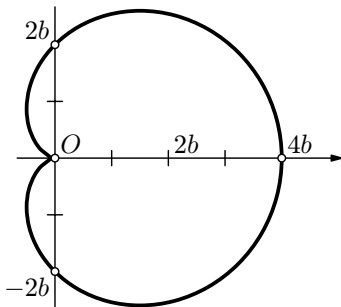
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

2. Pro $m = 2$ je $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Z podmínky $\cos 2\varphi \geq 0$ dostaneme $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \rangle$. Obdržíme rovnici Bernoulliho lemniskáty (obr. 17) v polárních souřadnicích tak, jak ji popsal *Jacob Bernoulli* v roce 1694.



Obr. 17

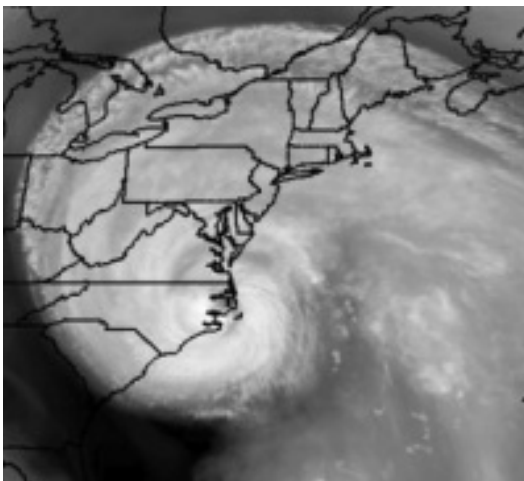
3. Pro $m = -1$ je $r = \frac{a}{\cos \varphi}$, kde $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Vznikne přímka o rovnici $x = a$, což opět ukážeme velmi snadno. Stačí přepsat výše uvedenou rovnici na tvar $r \cos \varphi = a$ a uvědomit si, že $x = r \cos \varphi = a$.
4. Pro $m = -2$ je $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$, kde $\varphi \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$. Dostaneme rovnosou hyperbolu o rovnici $x^2 - y^2 = a^2$. K tomu, abychom to ukázali, je nutno v rovnici $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ nejprve odstranit zlomek, dále pak použít součtový vzorec $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, který po dosazení převede rovnici do tvaru $r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2$. Odtud již obdržíme výše uvedenou rovnici rovnosé hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$. Zde je ale opět nutné připustit $r < 0$.
5. Pro $m = -\frac{1}{2}$ je $r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, kde $\varphi \in (-\pi; \pi)$. Dostaneme parabolu o rovnici $y^2 = 4a(a - x)$. V tomto případě je přechod od rovnice v polárních souřadnicích k rovnici v kartézských souřadnicích složitější než v předchozích případech. Jedna z možností je nejprve použít vzorec $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$ a přepsat rovnici na tvar $r = \frac{2a}{1 + \cos \varphi}$, potom odstranit zlomek, levou stranu rovnice přepsat na tvar $r + r \cos \varphi = r + x$ a takto vzniklou rovnici přepsat na tvar $r = 2a - x$, umocnit na druhou a za r^2 dosadit $r^2 = x^2 + y^2$. Dostaneme $x^2 + y^2 = x^2 - 4ax + 4a^2$. Po úpravě takto vzniklé rovnice již dostaneme kýženou rovnici paraboly $y^2 = 4a(a - x)$ v kartézské soustavě souřadnic.
6. Pro $m = \frac{1}{2}$ je $r = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$. Vznikne kardioida $r = 2b(1 + \cos \varphi)$, kde $a = 4b$ (obr. 18). V tomto případě při přechodu z prvního do druhého tvaru rovnice opět stačí použít vzorec $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$. Po dosazení dostaneme $r = a \frac{1 + \cos \varphi}{2} = 2b(1 + \cos \varphi)$.



Obr. 18

MATEMATIKA

Jak již bylo řečeno v úvodní části, se spirálami se v praktickém životě setkáváme téměř všude, což lze ilustrovat i dalšími obrázky. Obr. 19 a obr. 20 jsou astronomické snímky ze dne 25. září 2003, obr. 19 představuje fotografii logaritmické spirály hurikánu Isabel, obr. 20 je logaritmická spirála galaxie M51. I s dalšími spirálami je možno se setkat ve vesmíru, řada fotografií je uvedena např. na Internetu na stránkách [7].

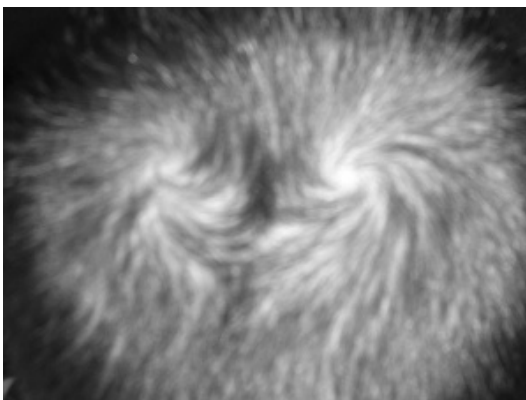


Obr. 19



Obr. 20

Pokud bychom ve svém okolí začali hledat další spirály, stačí se zahledět např. na lidské vlasy (obr. 21), pavoučí síť, ale i např. různé ozdobné mříže. Kuriózní je např. i pohyb křídel letící mouchy. Její křídla nekonají jednoduché kmity, jak by se obecně dalo předpokládat, ale opisují osmičku ve tvaru lemniskáty (obr. 17). Na závěr jedna zajímavost: zkuste se podívat na pružinu (což je prostorová spirála) kolmo na směr podélné osy – nevidíte sice spirálu, ale jinou velice zajímavou křivku – cykloidu. Kdo se více zabývá deskriptivní geometrií, tak ví, že cykloida může také vzniknout jako axonometrický průmět jiné křivky – šroubovice, což je prostorová spirála.



Obr. 21

Literatura

- [1] Jarešová, M., Volf, I.: *Matematika křivek*. MAFY, Hradec Králové, 2006.
- [2] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky*. SPN, Praha, 1981.
- [3] Tarasov, N. P.: *Základy vyšší matematiky pro střední průmyslové školy*. SPN, Praha, 1953.
- [4] Bartsch, H.: *Matematické vzorce*. SNTL, Praha, 1987.
- [5] Zdeborová, Z.: Květ slunečnice a Fibonacciova čísla. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **82**, 1 (2007), s. 1–10.
- [6] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html>
- [7] <http://www.astro.cz>