Milan Cvrček

Bohrův model atomu vodíku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 4, 9–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146266

Bohrův model atomu vodíku

Milan Cvrček, Univerzita Hradec Králové

Úvod

V roce 1913 navrhl dánský fyzik Niels Bohr model atomu vodíku založený na tom, že elektron obíhá kolem jádra po kruhových drahách splňujících následující podmínky:

I. Existují stabilní dráhy, na kterých elektron nevyzařuje elektromagnetické záření.

II. K vyzařování dochází při přechodech ze stabilní dráhy s vyšší energií na dráhu s energií nižší.

III. Na stabilní dráze je velikost momentu hybnosti elektronu celočíselným násobkem Planckovy konstanty $\hbar$ (h vydělené 2π).

Za výzkum struktury atomů a jimi emitovaného záření obdržel Niels Bohr v roce 1922 Nobelovu cenu.

Bohrův model atomu umožňuje pomocí jednoduchých předpokladů charakterizovat atom vodíku: určit jeho poloměr a energii potřebnou k přechodu mezi jednotlivými drahami. To např. vysvětluje existenci spektrálních čar a dovoluje spočítat jejich frekvence. To všechno je také námětem úlohy, která je obsahem tohoto článku.

Výsledky, které jsou ve shodě s těmi, které pro tuto situaci dává kvantová mechanika, jsou dosažené pomocí aparátu klasické fyziky, kdy celkový postup je zcela v mezích školské fyziky a matematiky. Jedná se proto o úlohu, která by mohla být zařazena i do běžné výuky na střední škole.

Úloha se dále věnuje také zpřesnění výsledků dosažených v klasické teorii Bohrova modelu, tedy za předpokladu nekonečně hmotného jádra. Zde provádíme i korekci na jeho konečnou hmotnost: jádro se bude pohybovat. Zjištěné odchylky jsou měřitelné; díky tomu bylo objeveno deuterium. V dalších bodech zadání pak používáme dosažených výsledků k dalším zajímavým výpočtům, kdy zjišťujeme hodnoty hmotnosti elektronu a Planckovy konstanty h. Tyto postupy byly v historii skutečně použity.

Problémy

Při řešení následujících problémů vycházejte z Bohrova modelu atomu:

1. Určete poloměr atomu vodíku v základním stavu.
2. Vypočítejte energii elektronu v základním stavu.
3. Zjistěte frekvenci a vlnovou délku fotonu vyzářeného při přechodu elektronu ze čtvrté na druhou hladinu.
4. Určete vlnočet $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ fotonu, který vznikne při takovémto přechodu mezi hladinami. Konstanta v tomto vztahu se nazývá Rydbergova konstanta a značí se R_∞.
5. Uvedený vztah pro energii byl odvozen z modelu atomu vodíku předpokládajícího nehybné (tj. nekonečně hmotné, proto označení R_∞) jádro. Proveďte korekci vztahu tak, aby zohledňoval i pohyb jádra. Použijte vztah pro vlnočet.
6. Jak se budou lišit délky spektrální čáry H_α u vodíku, deuteria a tritia? H_α je první čára tzv. Balmerovy série (tj. série ležící ve viditelném spektru); jde o čáru odpovídající přechodu elektronu z třetí na druhou hladinu.
7. Vlastností tohoto vylepšeného modelu se dá využít i ke zjištění hmotnosti elektronu. Rydbergovu konstantu můžeme určit pomocí spektroskopických měření. Z této hodnoty a známé hmotnosti jader (zjištěné např. pomocí hmotnostního spektrografu) můžeme přímo určit hmotnost elektronu. Proveďte, když předpokládáte, že znáte R_H a R_D i obě hmotnosti daných jader.
8. Rydbergova konstanta se dá určit měřením a přitom je kombinací dalších konstant. Toho lze s výhodou využít ke zjištění některé z nich. Tato metoda je vhodná ke zjištění hodnoty h. Určete Planckovu konstantu h, znáte-li vlnovou délku vodíkové čáry H_α a všechny ostatní konstanty ve vyjádření Rydbergovy konstanty (známé z jiných experimentů).

Řešení problémů

1. Elektron se pohybuje po kruhové dráze, tedy na něj působí dostředivá síla, pro jejíž velikost platí

$$F = \frac{m_\mathrm{e} v^2}{r},$$

kde m_e je hmotnost elektronu, v jeho rychlost na oběžné dráze poloměru r. Touto silou je ale Coulombovská síla, jejíž velikost je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2},$$

kde e je náboj elektronu a ε_0 permitivita vakua. Je tedy

$$\frac{m_\mathrm{e} v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}. \tag{1}$$

Nyní využijeme podmínku III, která říká, že

$$m_\mathrm{e} v r = n\hbar,$$

kde n je libovolné přirozené číslo (později bude udávat číslo energetické hladiny). Z tohoto vztahu plyne

$$v = \frac{n\hbar}{m_\mathrm{e} r},$$

což dosadíme do (1) a postupně dostaneme

$$\frac{m_\mathrm{e}\left(\dfrac{n\hbar}{m_\mathrm{e} r}\right)^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2},$$

$$r = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_\mathrm{e} e^2}. \tag{2}$$

Poloměr atomu vodíku v základním stavu ($n = 1$) je tedy

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_\mathrm{e} e^2} \doteq 5{,}3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}.$$

2. Celková energie elektronu E_n v daném stavu je určena součtem jeho kinetické energie E_k (viz (1)) a potenciální energie E_p:

$$E_\mathrm{k} = \frac{m_\mathrm{e} v^2}{2} = \frac{m_\mathrm{e} v^2}{r}\frac{r}{2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$E_\mathrm{p} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Máme tedy:

$$E_\mathrm{n} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Za r dosadíme z (2) a dostaneme

$$E_\mathrm{n} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{m_\mathrm{e} e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}.$$

Energie elektronu na první hladině je potom

$$E_1 = -\frac{m_\mathrm{e} e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \doteq -2{,}17 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} \doteq -13{,}56\ \mathrm{eV}.$$

3. Energie fotonu E_f vyzářeného při přechodu ze čtvrté na druhou hladinu bude zřejmě

$$E_\mathrm{f} = E_4 - E_2 = \frac{1}{16} E_1 - \frac{1}{4} E_1 = -\frac{3}{16} E_1.$$

Dále víme, že podle Planckovy kvantové hypotézy o energii ($E = hf$) pro frekvenci f, vlnovou délku λ elektronu a rychlost světla c platí

$$E_\mathrm{f} = 2\pi\hbar f,$$

tedy

$$f = \frac{E_\mathrm{f}}{2\pi\hbar} = -\frac{3E_1}{32\pi\hbar} \doteq 614 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}, \qquad \lambda = \frac{c}{f} \doteq 488\ \mathrm{nm}.$$

4. Protože je

$$E_\mathrm{f} = 2\pi\hbar f = 2\pi\hbar \frac{c}{\lambda} = 2\pi\hbar c\sigma,$$

je

$$\sigma = \frac{E_\mathrm{f}}{2\pi\hbar c}.$$

Do tohoto vztahu dosadíme výraz pro energii a dostaneme

$$\sigma = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \frac{m_\mathrm{e} e^4}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 c\hbar^3} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \frac{m_\mathrm{e} e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) R_\infty,$$

kde Rydbergova konstanta je

$$R_\infty = \frac{m_\mathrm{e} e^4}{8\varepsilon_0^2 c h^3}.$$

5. Má-li jádro konečnou hmotnost m_j, krouží stejně jako elektron kolem společného těžiště. Označme r_e vzdálenost elektronu od těžiště a r_j tutéž vzdálenost pro jádro. Podle definice těžiště platí

$$m_\mathrm{e} r_\mathrm{e} = m_\mathrm{j} r_\mathrm{j}$$

a rovněž musí platit

$$r_\mathrm{e} + r_\mathrm{j} = r.$$

Z těchto dvou rovnic snadno dostaneme

$$r_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{j}}{m_\mathrm{j} + m_\mathrm{e}} r, \qquad r_\mathrm{j} = \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{j} + m_\mathrm{e}} r.$$

Připomeňme nyní jeden z předpokladů Bohrova modelu: na stabilní dráze je velikost momentu hybnosti elektronu celočíselným násobkem konstanty $\hbar$, takže $m_\mathrm{e} v r = n\hbar$. My ovšem nyní máme dvě částice, které se pohybují se stejnou úhlovou rychlostí ω; pro moment hybnosti tak dostáváme

$$m_\mathrm{e} \omega r_\mathrm{e}^2 + m_\mathrm{j} \omega r_\mathrm{j}^2.$$

Bohrova kvantovací podmínka bude proto

$$m_\mathrm{e} \omega r_\mathrm{e}^2 + m_\mathrm{j} \omega r_\mathrm{j}^2 = n\hbar.$$

Protože

$$m_\mathrm{e} \omega r_\mathrm{e}^2 + m_\mathrm{j} \omega r_\mathrm{j}^2 =$$

$$= m_\mathrm{e} \omega \left(\frac{m_\mathrm{j}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{j}} \right)^2 r^2 + m_\mathrm{j} \omega \left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{j}} \right)^2 r^2 = \frac{m_\mathrm{e} m_\mathrm{j}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{j}} \omega r^2,$$

máme

$$\frac{m_\mathrm{e} m_\mathrm{j}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{j}} \omega r^2 = n\hbar.$$

Změní se také podmínka pro velikost dostředivé síly, neboť dostředivá síla působící na elektron závisí na vzdálenosti od těžiště, zatímco elektrická síla na vzdálenosti od jádra:

$$m_{\mathrm{e}}\omega^2 r_{\mathrm{e}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}$$

Dosadíme-li za r_{e}, dostaneme

$$\frac{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{j}}}\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2},$$

což je skoro stejný výraz jako v případě pro nehybné jádro, liší se pouze výrazem pro hmotnost, místo m_{e} v něm vystupuje tzv. redukovaná hmotnost m':

$$m' = \frac{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{j}}}$$

Protože stejná hmotnost vystupuje i v kvantovací podmínce pro moment hybnosti, bude další řešení stejné jako v původní úloze o Bohrově modelu, pouze na místě m_{e} bude všude vystupovat redukovaná hmotnost m'. Můžeme proto rovnou napsat výsledek

$$\sigma = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{m'e^4}{8\varepsilon_0^2ch^3} = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{m_{\mathrm{e}}e^4}{8\varepsilon_0^2ch^3}\cdot\frac{m_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{j}}} = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)R_{\mathrm{X}},$$

kde

$$R_{\mathrm{X}} = \frac{m_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{e}}+m_{\mathrm{j}}}R_\infty = \frac{R_\infty}{1+\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{j}}}}.$$

Označení X v indexu je použito proto, že hodnota konstanty závisí na hmotnosti jádra; jde tedy o to, o jaký prvek (nebo izotop) se jedná.

6. Vlnočet odpovídající čáře H_α u jednoduchého vodíku určíme podle předchozího výsledku

$$\sigma_{\mathrm{H}} = \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)R_{\mathrm{H}} = -\frac{5}{36}\cdot\frac{R_\infty}{1+\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}},$$

kde m_{p} je hmotnost protonu (jádra H). Zcela analogicky bude platit i pro vlnočty deuteria a tritia:

$$\sigma_{\mathrm{D}} = -\frac{5}{36}R_{\mathrm{D}} = -\frac{5}{36}\cdot\frac{R_\infty}{1+\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{D}}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{T}} = -\frac{5}{36} R_{\mathrm{T}} = -\frac{5}{36} \cdot \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{T}}}}$$

Pro poměry vlnočtů čáry vodíku a deuteria a vodíku a tritia dostaneme:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{D}}} = \frac{-\frac{5}{36} \cdot \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}}}{-\frac{5}{36} \cdot \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{D}}}}} = \frac{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{D}}}}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}} = \frac{(m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{e}}) m_{\mathrm{p}}}{(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}) m_{\mathrm{D}}}$$

$$\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{T}}} = \frac{(m_{\mathrm{T}} + m_{\mathrm{e}}) m_{\mathrm{p}}}{(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}) m_{\mathrm{T}}}$$

7. Poměr Rydbergových konstant bude

$$\frac{R_{\mathrm{H}}}{R_{\mathrm{D}}} = \frac{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{D}}}}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{H}}}},$$

odkud můžeme vyjádřit jedinou neznámou (a hledanou) hmotnost elektronu:

$$m_{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{D}} (R_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{H}})}{R_{\mathrm{H}} m_{\mathrm{D}} - R_{\mathrm{D}} m_{\mathrm{H}}}$$

8. Ze vztahu pro vlnočet plyne

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{m_{\mathrm{e}} e^4}{8 \varepsilon_0^2 c h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

odkud vyjádříme h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{m_{\mathrm{e}} \lambda e^4}{8 \varepsilon_0^2 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}$$

Literatura

[1] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL, Praha, 1976.
[2] Beiser, A.: *Úvod do moderní fyziky.* Academia, Praha, 1978.
[3] Brož, J. a kol.: *Základy fysikálních měření 1.* SPN, Praha, 1967.