Rozhledy matematicko-fyzikální

Šárka Gergelitsová

Úloha o čtverci

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 3, 1–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146254

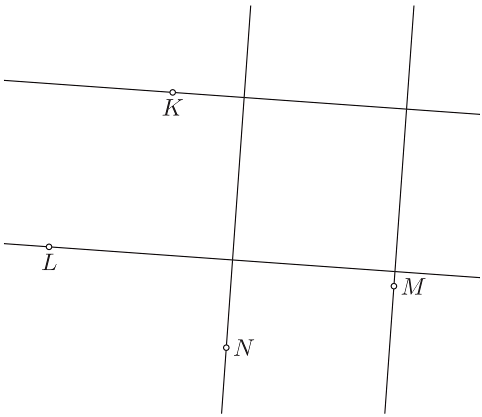
Úloha o čtverci

Šárka Gergelitsová, Gymnázium Benešov

Zadání problému

Ve starých knížkách můžeme najít spoustu zajímavých úloh, při jejichž řešení vystačíme se základními poznatky z geometrie. Např. můžeme najít tuto úlohu:

Úloha 1. V rovině jsou dány různé body K, L, M, N. Sestrojte všechny čtverce, jejichž strany leží na přímkách, z nichž některá prochází bodem K, jiná bodem L, další bodem M a zbývající bodem N (obr. 1).



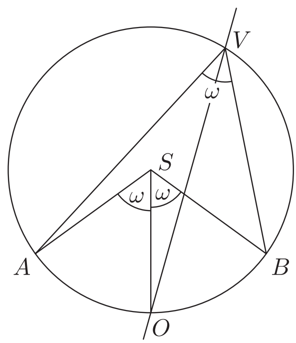
Obr. 1

V článku si ukážeme několik způsobů řešení jiné, užší úlohy, na jejíž tři případy lze původní úlohu rozložit.

Úloha 2. V rovině jsou dány různé body K, L, M, N. Sestrojte všechny čtverce, jejichž strany leží na přímkách, z nichž některá prochází bodem K, jiná bodem L, další bodem M a zbývající bodem N, přičemž přímky procházející body K, L jsou navzájem rovnoběžné.

Řešení první – pomocí Thaletových kružnic

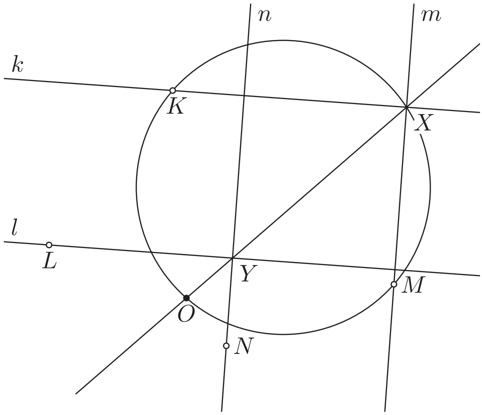
Úvaha 1. Připomeňme si nejprve jednu geometrickou vlastnost, plynoucí z našich znalostí o středových a obvodových úhlech. Víme, že množina všech bodů V v rovině, pro něž má úhel AVB danou velikost ω, jsou dva shodné kružnicové oblouky nad tětivou AB. Zvolme jeden z nich (obr. 2). Potom platí, že osy všech úhlů AVB, jejichž vrchol V leží na zvoleném kružnicovém oblouku nad tětivou AB, procházejí středem O toho oblouku, který doplňuje oblouk AVB do celé kružnice. Je-li totiž O střed oblouku AB, jemuž přísluší středový úhel ASB velikosti 2ω, jsou středové úhly ASO a OSB shodné, a jejich velikost je tudíž rovna ω. Proto je i velikost obvodových úhlů AVO a OVB stejná, rovná $\frac{\omega}{2}$. Polopřímka VO je tedy osou úhlu AVB.



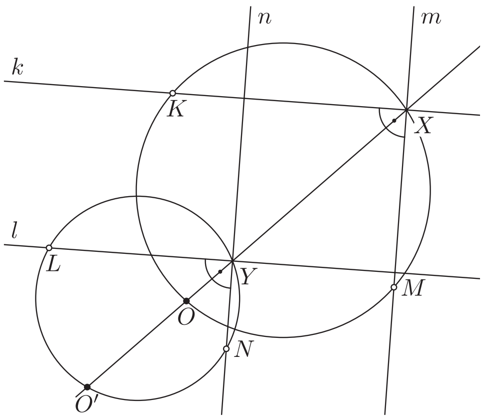
Obr. 2

Řešení. Označme po řadě hledané přímky (na nichž budou ležet strany čtverce) procházející body K, L, M, N odpovídajícími písmeny k, l, m, n. Podle zadání platí $k \parallel l$, takže musí platit $k \perp m$ a $l \perp n$. Označme X průsečík přímek k, m a Y průsečík přímek l, n (obr. 3).

Protože úsečka XY bude jednou z úhlopříček hledaného čtverce, bude na přímce XY ležet osa pravého úhlu KXM. Podle výše uvedené úvahy tedy prochází přímka XY středem O toho oblouku Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem KM, který neobsahuje bod X. Na přímce XY však zároveň leží osa protilehlého úhlu LYN, ze stejného důvodu bude tedy přímka XY procházet také středem O' příslušného oblouku LN Thaletovy kružnice opsané nad průměrem LN (obr. 4).



Obr. 3

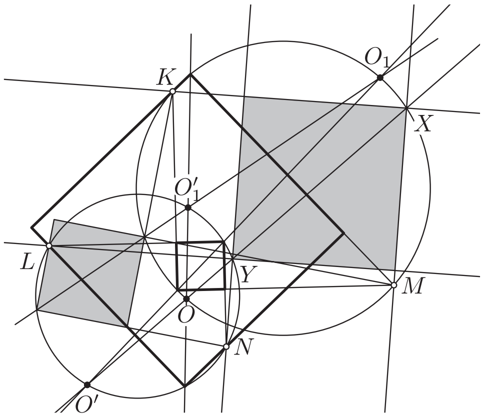


Obr. 4

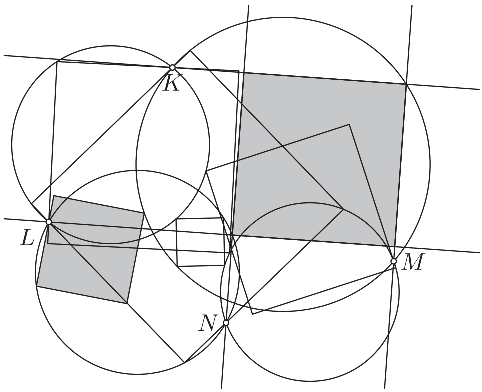
Z předchozí úvahy vyplývá, že úhlopříčka XY leží na přímce OO', kde O, O' jsou popsány výše. Protilehlé vrcholy X, Y (kterými je hledaný čtverec zřejmě určen) jsou pak zbývající dva průsečíky příslušných Thaletových kružnic s přímkou OO'.

Každý z bodů O, O' můžeme sestrojit dvěma způsoby (jako střed jedné ze dvou polokružnic nad KM, resp. LN), dostáváme tedy celkem čtyři přímky O, O'. Má tedy úloha 2 v obecném případě čtyři řešení?

Ne. Úvaha, kterou jsme výše vedli, řešila ve skutečnosti obecnější úlohu. Využili jsme pouze kolmost přímek k, m a kolmost přímek l, n, ne však už požadovanou rovnoběžnost přímek k, l. Našli jsme tak zároveň řešení úvodní úlohy 1 našeho článku nejen pro případ, kdy jsou přímky k, l rovnoběžné, ale také pro případ, kdy jsou přímky k, l na sebe kolmé a navzájem rovnoběžné jsou naopak přímky k, n (obr. 5).



Obr. 5

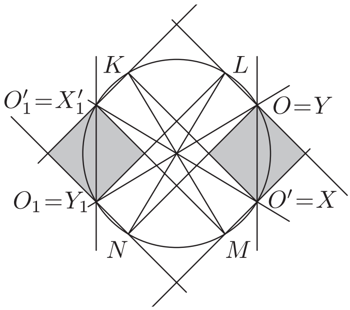


Obr. 6

Úloha 2 (kde požadujeme $k \parallel l$) má proto v obecném případě dvě různá řešení. (Diskusi speciálních případů provedeme dále.)

Úplné řešení úlohy 1. Snadno nahlédneme, že úloha 1 má obecně ještě další dvě řešení – taková, v nichž jsou rovnoběžné přímky k, m (obr. 6). Má tedy celkem až šest řešení, po dvou pro každou z voleb $k \parallel l$, $k \parallel m$, $k \parallel n$.

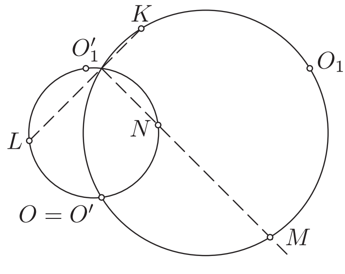
Ve zvláštních polohách průměrů KM a LN (a Thaletových kružnic nad nimi) mohou některé z bodů O, O', X, Y splynout. V konstrukcích je však musíme rozlišovat. Na obr. 7 vidíte případ, kdy splynou obě Thaletovy kružnice, a spojnice OO' je tedy zároveň úhlopříčkou hledaného čtverce (O je středem oblouku nad KM a zároveň je druhým průsečíkem přímky OO' s Thaletovou kružnicí nad LN).



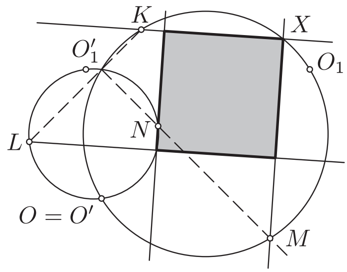
Obr. 7

Diskuse počtu řešení úlohy 2. Na obr. 8, 9 vidíte jeden speciální případ, kdy má úloha nekonečně mnoho řešení. Označíme nyní O, O_1 středy polokružnic Thaletovy kružnice nad KM a obdobně O', O'_1 středy polokružnic nad LN. Ve zvláštních polohách těchto kružnic mohou mít množiny $\{O, O_1\}$ a $\{O', O'_1\}$ jeden společný bod. (Rovnost obou množin je zadáním vyloučena, protože body K, L, M, N jsou různé.) Je-li např. $O = O'$, pak úhlopříčka XY může ležet na libovolné přímce, která prochází bodem O a protíná oblouky KO_1M a LO'_1N, proto má úloha nekonečně mnoho řešení.

Další zvláštní případy zde rozebírat nebudeme, diskuse není snadná. Precizní diskusi úlohy si ukážeme u jiných postupů. Obecně lze říci tolik, že jiný počet řešení úlohy 2 než dvě dostaneme buď tehdy, jestliže přímka OO' (nebo přímka $O_1O'_1$) protne společný bod Thaletových kružnic – pak má nalezená úhlopříčka nulovou délku a hledaný čtverec degeneruje v bod, úloha tedy nemá řešení. Jestliže body O, O' splynou, má úloha nekonečně mnoho řešení. Lze ukázat, že oba speciální případy nastávají pro situaci, kdy jsou úsečky KL a MN navzájem kolmé. Jsou-li shodné, má úloha nekonečně mnoho řešení, každý směr přímky k s výjimkou směru přímky KL je směrem strany hledaného čtverce. Pokud úsečky nejsou shodné, úloha nemá řešení.



Obr. 8



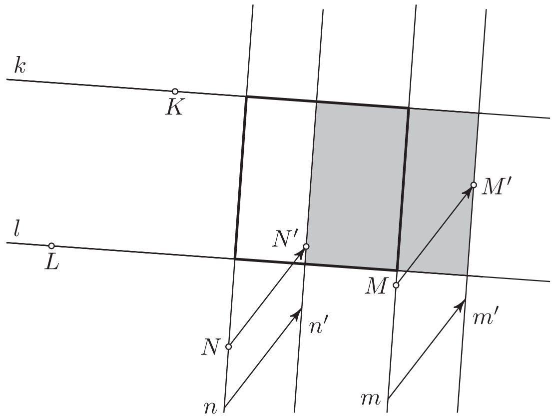
Obr. 9

Řešení druhé – s využitím posunutí (a Thaletovy kružnice)

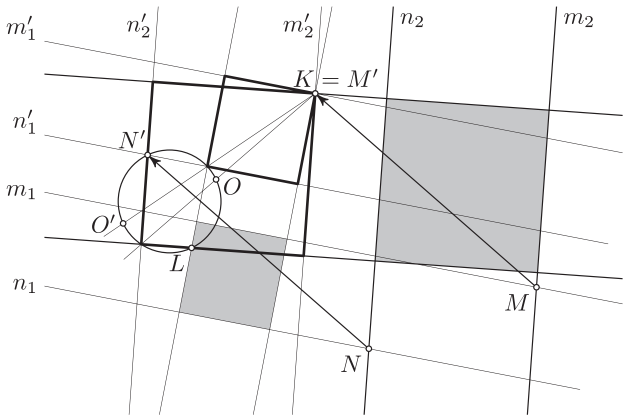
Úvaha 2. Snadno nahlédneme, že velikost a směr stran hledaného čtverce se nezmění, posuneme-li některou z úseček KL či MN o libovolný vektor.

Jsou-li totiž dvě dvojice rovnoběžek $k \parallel l$ a $m \parallel n$ přímkami stran některého čtverce, pak tato jejich vlastnost zůstane zachována, posuneme-li jednu z těchto dvojic rovnoběžek o libovolný vektor (směr ani vzdálenost těchto rovnoběžek se posunutím nezmění), zatímco druhou dvojici rovnoběžek ponecháme v původní poloze (viz obr. 10 pro posunutí o vektor MM', které převede dvojici rovnoběžek m, n na dvojici m', n').

Úlohu tedy zjednodušíme tak, že nejprve posuneme např. úsečku MN o vektor MK do polohy $M'N'$, aby bod M' splynul s bodem K. Poté vyřešíme úlohu pro případ, že body K, M' splývají. Následně posuneme řešení – tedy přímky m', n' – v posunutí určeném vektorem KM zpět do polohy, která vyhovuje původnímu zadání. (Stačí sestrojit pouze jednu z přímek, např. n', a vše ostatní sestrojit již v původní poloze; řešení úlohy známe, jakmile známe směr jedné přímky, např. n.)



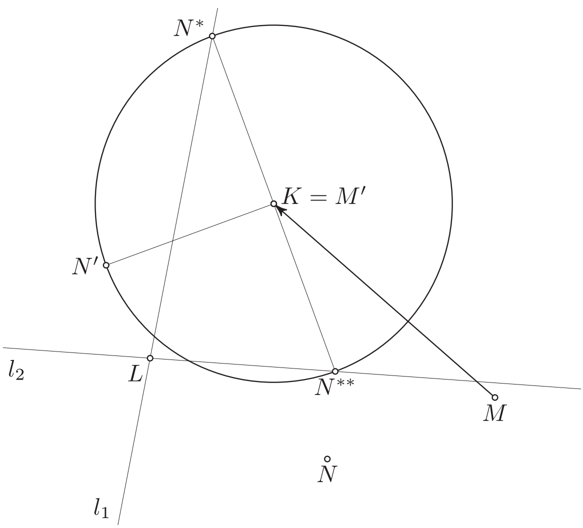
Obr. 10



Obr. 11

Všimneme si, že v takto zjednodušeném zadání již známe jeden vrchol hledaného čtverce. Bodem $K = M'$ musí procházet dvě navzájem kolmé přímky, na nichž leží strany čtverce, proto je to jeho vrchol. Úhlopříčka hledaného čtverce, která tímto vrcholem prochází, leží na přímce, která podle předchozího řešení prochází také bodem O', středem jednoho z oblouků Thaletovy kružnice nad úsečkou LN'. Přímka KO' protne druhý oblouk LN' této kružnice v druhém krajním bodě uvažované úhlopříčky (obr. 11).

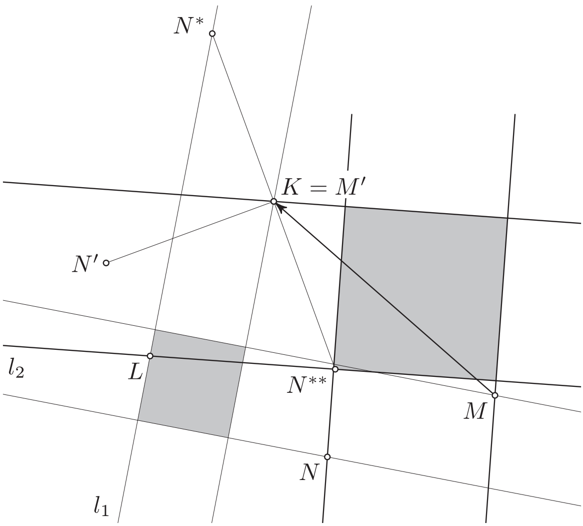
Diskuse řešení. Při uvedeném postupu sestrojíme ke každé přímce n přímku m s ní rovnoběžnou. Dostaneme tedy právě obě řešení úlohy 2, další dvě řešení původní úlohy 1 bychom získali pro přímku m kolmou k n. Speciální případ nastane, pokud bude bod $K = M'$ ležet na Thaletově kružnici nad LN'. Pokud bude ležet mimo body O, O', nebude mít úloha řešení (čtverec bude mít úhlopříčku nulové délky, zdegeneruje v bod), pokud s některým z těchto bodů splyne, bude mít úhlopříčka z vrcholu K „neurčený“ směr, takže pak může ležet na každé přímce procházející bodem K s výjimkou přímky KL (a úloha bude mít nekonečně mnoho řešení). Snadno nahlédneme, že speciální případy nastanou právě tehdy, jsou-li úsečky KL, MN navzájem kolmé, přičemž případ $K = O$ (nebo $K = O'$) nastane právě tehdy, jsou-li obě úsečky navíc shodné.



Obr. 12

Řešení třetí – s využitím posunutí a otáčení

Po předchozí úvaze 2 vyjdeme ze zjednodušeného zadání pro $K = M'$ (obr. 12). Hledáme zbývající vrcholy čtverce o vrcholu K, jehož strany neprocházející bodem K leží na přímkách l, n', které procházejí danými body L, N'. Otočíme-li přímku n' o $90°$ ve vhodném směru kolem bodu K, splyne s přímkou l. Bod N' přejde v tomto otočení do bodu N^*, který bude na přímce l ležet. Jinými slovy: přímka l bude určena body L a N^*. Jelikož můžeme přímku n' (bod N') otočit v kladném či záporném směru, získáme tak pro směr přímky l dvě různá řešení (obr. 12, 13).



Obr. 13

Diskuse řešení. Pokud po otočení body L, N^* splynou, je každý směr s výjimkou směru přímky KL vyhovující pro přímku l. Úloha má v takovém případě nekonečně mnoho řešení. Pokud body L, N^* nesplynou, ale přímka LN^* bude procházet bodem K, nebude mít úloha řešení. Opět vidíme, že vyjímečné případy nastávají tehdy, jsou-li úsečky KL, MN navzájem kolmé. Nekonečně mnoho řešení má úloha právě tehdy, jsou-li zmíněné úsečky navíc shodné.

Řešení čtvrté – pomocí analytické geometrie

V rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy jsou dány čtyři body $K[K_1, K_2]$, $L[L_1, L_2]$, $M[M_1, M_2]$, $N[N_1, N_2]$. Najdeme rovnice přímek k, l, m, n, které těmito body po řadě procházejí a splňují podmínky úlohy tak, že přímky k, l jsou navzájem rovnoběžné. Proto musí být hledané přímky k, m procházející body $K[K1, K2]$, $M[M1, M2]$ navzájem kolmé. Úlohu vyřešíme, když vypočteme jejich neznámé normálové vektory $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$. Protože $m \perp k$, můžeme při daném označení souřadnic vektorů zvolit $m_1 = k_2$, $m_2 = -k_1$, tedy $\boldsymbol{m} = (k_2, -k_1)$, a hledat pouze neznámé souřadnice k_1, k_2 vektoru $\boldsymbol{k}$.

Z podmínek $K \in k$, $M \in m$ plynou rovnice přímek k, m:

$$k : k_1x + k_2y = k_1K_1 + k_2K_2$$
$$m : k_2x - k_1y = k_2M_1 - k_1M_2$$

Protože dvojicemi bodů L, K, resp. M, N, procházejí přímky l, k, resp. m, n, na nichž leží protilehlé strany čtverce, musí platit $|Lk| = |Nm|$. Tuto rovnost můžeme vyjádřit vztahem

$$\frac{|k_1L_1 + k_2L_2 - k_1K_1 - k_2K_2|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{|k_2N_1 - k_1N_2 - k_2M_1 + k_1M_2|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}},$$

což je ekvivalentní s rovností

$$|k_1L_1 + k_2L_2 - k_1K_1 - k_2K_2| = |k_2N_1 - k_1N_2 - k_2M_1 + k_1M_2|,$$

tedy

$$k_1(L_1 - K_1) + k_2(L_2 - K_2) = \pm\left(k_2(N_1 - M_1) - k_1(N_2 - M_2)\right). \quad (1)$$

Zavedeme-li pro zadané body K, L, M, N tři vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, vztahy

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{KL}, \quad \boldsymbol{v} = \overrightarrow{MN}, \quad \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v},\ |\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v}|,$$

lze pomocí nich zapsat odvozenou podmínku (1) ve tvaru

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} = \pm\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{w}, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w}) = 0. \quad (2)$$

Protože $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{o}$, plyne ze vztahu (2) buď $\boldsymbol{k} \perp (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w})$, nebo $\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$. Podmínka (2), která je výslednou rovnicí pro hledaný normálový vektor přímky k, zaručuje rovnost $|Lk| = |Nm|$, přičemž vzdálenost $|Lk|$ je délkou strany hledaného čtverce. Musí být proto nenulová, musí tedy navíc platit $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} \neq 0$ (podle výše uvedeného vyjádření délky $|Lk|$, rozmyslete).

Shrneme výsledek našich výpočtů: Je-li vektor $\boldsymbol{k}$ řešením skalární rovnice (2) splňující podmínku $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} \neq 0$, mají vyhovující přímky k, l, m, n rovnice:

$$k\colon k_1x + k_2y = k_1K_1 + k_2K_2$$
$$l\colon k_1x + k_2y = k_1L_1 + k_2L_2$$
$$m\colon k_2x - k_1y = k_2M_1 - k_1M_2$$
$$n\colon k_2x - k_1y = k_2N_1 - k_1N_2$$

Diskuse. Podle odvozené rovnice (2) a podmínky $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} \neq 0$ rozlišíme tři případy:

a) $\boldsymbol{u} = \pm\boldsymbol{w}$

Tento případ nastane, právě když jsou úsečky KL, MN navzájem kolmé a shodné. Rovnice (2) je pak splněna pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{k}$. Pak jsou každé dvě rovnoběžky k, l libovolného směru (kromě směru $\overrightarrow{KL}$, kdy by splynuly) vedené body K, L a k nim kolmé přímky m, n vedené body M, N prodloužením stran nějakého čtverce.

b) $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{w}$

Rovnice (2) má dvě řešení: $\boldsymbol{k} \perp (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w})$. Přímky k, l jsou rovnoběžné buď s vektorem $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, nebo s vektorem $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$. Úloha tedy má dvě řešení.

c) $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} \neq \pm\boldsymbol{w}$

Nenulové vektory $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$ jsou rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{u}$. Není tedy splněna podmínka $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} \neq 0$ pro žádné řešení rovnice (2). Úloha nemá řešení, protože přímky k, l dané uvedenými rovnicemi splývají (obě s přímkou KL).

Literatura k následujícímu článku Mlžná komora

[1] Kobzová, E.: *Počasí.* Rubico, 1988, str. 89–90.
[2] Kolektiv autorů: *Atomový věk.* SNTL, Praha, 1966, str. 281–283.
[3] `http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/dema/komora/`
[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Bethe-Bloch_formula`
[5] `http://www.astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika5.htm`
[6] `http://www.astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika2.htm`
[7] `http://www.wikiweise.de/wiki/Bild%3ASpektrum.png`