Lenka Zdeborová

# Květ slunečnice a Fibonacciova čísla

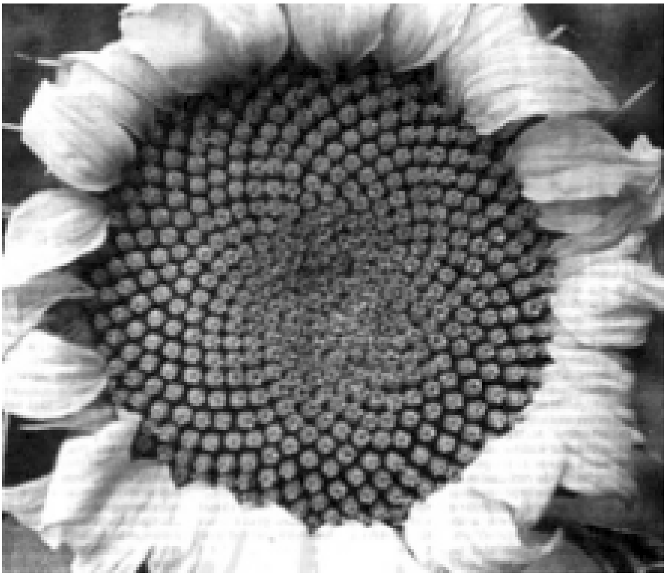
*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 82 (2007), No. 1, 1–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146179`

# Květ slunečnice a Fibonacciova čísla

*Lenka Zdeborová, FZÚ AV ČR*

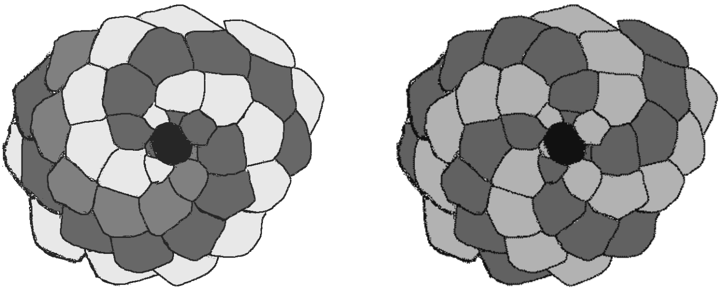
Název prozrazuje, že v tomto článku se budeme zabývat tématem, které náleží jak do botaniky, tak matematiky a, jak uvidíme, také fyziky. Dopředu můžeme prozradit, že Fibonacci sám by odpověď na otázku, co má společného se slunečnicí, nevěděl. Může se zdát bláznivé zeptat se: A věděla by odpověď sama slunečnice? Jinými slovy: Kdybychom si v její genetické informaci mohli listovat jako v knize, bylo by možné tam odpověď najít? Ke konci článku uvidíme, že taková otázka není bláznivá, ale naopak docela zásadní. Nicméně nyní už se vrhněme na popis toho, o čem bude řeč.



Obr. 1: Květ slunečnice s 34 spirálami po a 21 spirálami proti směru chodu hodinových ručiček.

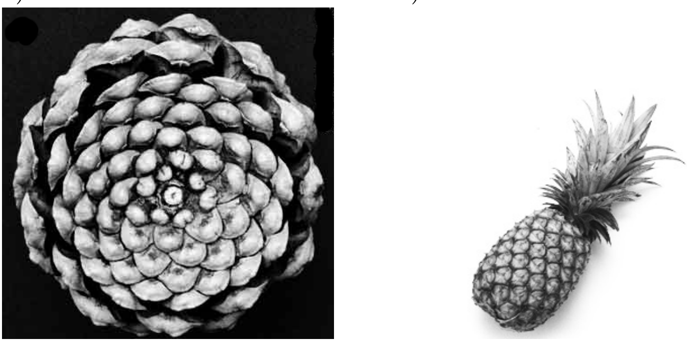
**Co je to fylotaxe?**

a) b)



Obr. 2: Borová šiška s a) 5 spirálami po, b) 8 spirálami proti směru chodu hodinových ručiček.

a) b)



Obr. 3: a) Borová šiška s 8 spirálami po a 13 spirálami proti směru chodu hodinových ručiček.
b) Na plodu ananasu můžeme pozorovat spirály ve třech různých sěrech, napočítali bychom jich 8, 13 a 21.

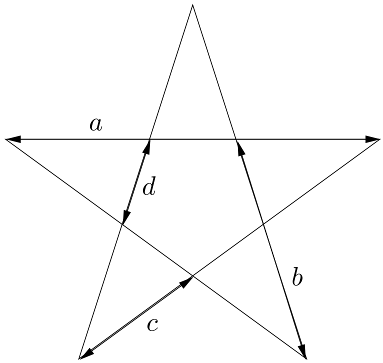
Jelikož článek je napsán fyzikem, není s podivem, že začne pozorováním. Podívejme se na květ (přesněji květní úbor) slunečnice, na šišku či ananas. Pokud nejste právě na poli, v lese či obchodě se zeleninou, pomohou vám obr. 1, 2 a 3. Na každé z těchto tří rostlin můžeme pozorovat pravidelné uspořádání semen či šupin. Všimneme si, že sousedící šupiny tvoří spirály, vyznačeny na obr. 2; botanikové je nazývají *parasticha*. Tyto spirály můžeme pozorovat jak po (obr. 2a) tak proti (obr. 2b) směru chodu hodinových ručiček. Na šišce na obr. 3 je jejich počet 8 po a 13 proti směru chodu hodinových ručiček. Na květu slunečnice na obr. 1 to je 34 a 21. Čtenáři v lese či jinde, nepoužívající obrázky, kolem sebe mohou najít také šišky s 5 a 3 spirálami nebo slunečnice s 34 a 55, 55 a 89, či dokonce 89 a 144 spirálami. U ananasu na obr. 3b) můžeme pozorovat tři druhy spirál, napočítali bychom jich 8, 13 a 21.

Ti, kteří mají nějaké zkušenosti s matematikou, již zřejmě zpozorovali, že všechna uvedená čísla jsou členy tzv. *Fibonacciovy posloupnosti*: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$, kde daný člen od třetího počínaje je vždy součtem předchozích dvou. Matematik *Leonardo Fibonacci z Pisy* žil v letech 1175–1240. Ve své knize *Liber Abaci* se zabýval dnes proslaveným problémem růstu populace králíků: *Na pole umístíme pár králíků. Jestliže králíci po měsíci dospějí a zplodí každý měsíc nový pár – kolik párů králíků se narodí za dvanáct měsíců?* Řešením je právě po autorovi pojmenovaná posloupnost.

Dále si všimněme, že počet spirál jdoucích po a proti směru chodu hodinových ručiček jsou vždy dvě po sobě jdoucí (!) Fibonacciova čísla. Podrobnějším pozorováním bychom zjistili, že na dvou rostlinách stejného druhu se spirály o daném počtu mohou točit po i proti směru chodu hodinových ručiček. Popsanému jevu se odborně říká *fylotaxe* (z řeckého *phyllon*, list, a *taxis*, uspořádání) a lze ho pozorovat na různých květenstvích, nejen slunečnicovém, také na některých plodech a na uspořádání listů rostlin (při pohledu shora na stonek by špičky listů tvořily vzory podobné těm právě uvedeným).

Historie zkoumání fylotaxe sahá daleko. Zmínky je možné najít již v pramenech pocházejících z doby krátce před naším letopočtem. Nicméně prvního výraznějšího pokroku bylo dosaženo až po roce 1830 díky pracím německých botaniků *Karla Schimpera* a *Alexandera Brauna*. Karl Schimper zkoumal uspořádání lístků na stonku a jako první poukázal na souvislost s Fibonacciovými čísly. Alexander Braun studoval uspořádání šupin na šiškách, popsal spirály jdoucí po a proti směru chodu hodinových ručiček a jejich počty. Pozoroval, že nově vyrostlá šupina se vzdaluje rovně ze středu šišky a další vyroste odkloněna vždy o stejný úhel, divergenci $\alpha$. Měřeními došel k závěru, že plný úhel ($360^\circ$) je k divergenci $\alpha$ v poměru *zlatého řezu* $r = (1 + \sqrt{5})/2$. Zlatým řezem byli lidé fascinováni od dob, kdy se naučili počítat se zlomky. Kupříkladu Pythagorejci poukazovali na spojitost pentagramu se zlatým řezem (obr. 4).

Také v dílech renesančních malířů se toto číslo dá velmi často vystopovat.




Obr. 4: Zlatý řez schovaný v pentagramu $r = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$.

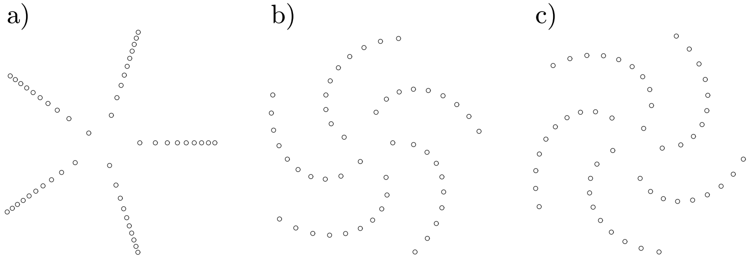
## Chování nejjednoduššího modelu

Pro lepší pochopení celého problému si nyní uveďme jednoduchý model a zkoumejme, zda popíše pozorované chování.

Představme si kruhový květ. Semínka vyrůstají z prostředku v pravidelných časových intervalech. Každé semínko, po tom co vyrostlo, se od středu začne vzdalovat rychlostí úměrnou druhé odmocnině z času (aby se zachovávala plošná hustota semínek). Následující semínko se vydá ve směru odkloněném o úhel $\alpha = r \cdot 360°$ od předchozího.

Pravdou je, že jsme neuvedli žádný důvod, proč právě podle tohoto modelu by se příroda měla chovat. To je ovšem případ při práci fyzika vcelku častý. Pro klid matematických duší poznamenejme, že není článku konec. Prozatím je naším úkolem pochopit, proč poměr $r$ má být zlatý řez. Vodítkem při vylučování jednotlivých možností bude fakt, že chceme, aby květ byl dobře zaplněn, tj. aby mezi semínky nebyly zbytečné mezery.

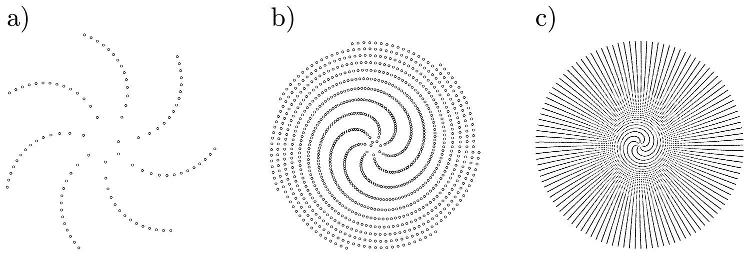
Na obr. 5–7 jsou výsledky simulace tohoto modelu. Z obr. 5a) pochopíme, že zvolit odklon $r$ jako racionální číslo s malým jmenovatelem $r = p/q$ není vhodné, protože pak bychom pozorovali semínka rostoucí v $q$ rovných větvích. Je-li $r$ blízké nějakému racionálnímu číslu s malým jmenovatelem, pozorujeme $q$ *spirál*, což je znázorněno na obr. 5b) a 5c). Směr spirály závisí na tom, zda je číslo větší či menší než zlomek jemu blízký.




Obr. 5: Chování modelu pro a) $r = 0{,}6 = \frac{3}{5}$, pozorujeme 5 větví, b) $r = 0{,}605$, vidíme 5 spirál po směru chodu hodinových ručiček, neboť $0{,}605 > \frac{3}{5}$, c) $r = 0{,}595$, vidíme 5 spirál proti směru chodu hodinových ručiček, neboť $0{,}595 < \frac{3}{5}$.

Poznamenejme, co by se stalo, kdybychom v případech b) a c) nechali narůst tisíce semínek. Původních 5 spirál by zaniklo, jelikož semínka tvořící jednu z nich by se dostala příliš daleko od sebe a tedy spirála by již nebyla oku patrná. Pozorovali bychom na okraji 200 rovných větví, neboť $0{,}605 = 121/200$.

Napadne nás použít nějaké iracionální číslo $r$. Kupříkladu Ludolfovo číslo $r = \pi$. Uspořádání semínek pak závisí na tom, kolik jsme jich nechali narůst. Pro 100 semínek (obr. 6a), pozorujeme 7 spirál proti směru chodu hodinových ručiček. Při 1 000 semínkách (obr. 6b), začne obrazec na okraji vypadat tak, jak chceme, tedy mezi semínky nejsou zbytečné mezery. Ovšem necháme-li narůst semínek 10 000 (obr. 6c), pozorujeme 113 větví a nechtěné mezery mezi semínky jsou opět uprostřed květu i na okrajích.




Obr. 6: Simulace pro $r = \pi$ a pro a) 100, b) 1 000, c) 10 000 semínek.

Vysvětlení je jednoduché. Nejlepší malé racionální aproximace pro π jsou 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, ... Jak jsme na to přišli? Číslo π stejně jako každé jiné lze jednoznačně zapsat ve tvaru tzv. *řetězového zlomku.* Pro π je konkrétně

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}.$$

Řetězový zlomek libovolného čísla $z$ má tvar

$$z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}},$$

kde $a_0$ je celá část ze $z$; označíme-li desetinou část $b_0$, můžeme vypočítat $a_1$ jako celou část z převrácené hodnoty $b_0$ a tak rekurzivně dále.

Useknutím řetězového zlomku pak lze získat racionální aproximace daného čísla. Usekneme-li zlomek před jednotkou, např.

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$

není aproximace příliš dobrá, stačí nepatrně zvýšit jmenovatel na $\frac{355}{113}$ (vzít o jedno delší úsek řetězového zlomku) a k číslu π se přiblížíme mnohem více.

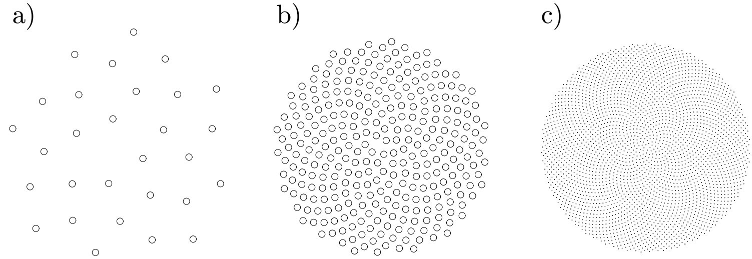
Z toho, co jsme řekli, vyplývá, že vhodným kandidátem pro poměr $r$ bude takové iracionální číslo, které nemá dobré racionální aproximace, tedy jeho rozvoj do řetězového zlomku obsahuje samé jedničky:

$$r = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} = 1 + \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Tedy právě Braunem naměřený zlatý řez! Jeho racionální aproximace jsou $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$, ... Protože počty spirál odpovídají jmenovatelům, vidíme nyní i souvislost s Fibonacciovými čísly.

Na obr. 7 jsou znázorněny výsledky simulace pro úhel odklonu odpovídající zlatému řezu pro různé počty vyrostlých semínek. Pro 30 semínek pozorujeme 8 a 13 spirál, pro 300 jich je 21 a 34, pro 3 000 semínek je spirál 89 a 144.



Obr. 7: Simulace pro $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a pro a) 30, b) 300, c) 3 000 semínek.

Kterému Fibonacciovu číslu odpovídající spirály pozorujeme konkrétně, je dáno pouze velikostí květu. Viditelné spirály jsou tvořené semínky, která spolu sousedí, a to se mění se vzdáleností od středu květu. V praxi jsou nejlépe zřetelné spirály na okraji.

Nejčastěji pozorujeme dva různé druhy spirál, jelikož semínko má většinou čtyři sousedy (u slunečnice či šišek), někdy má šest sousedů (u ananasu), kde jsme také viděli tři druhy spirál. Racionální aproximace zlatého řezu navíc splňují nerovnosti:

$$
\begin{gathered}
1 < r < 2, \\
\frac{3}{2} < r < \frac{5}{3}, \\
\frac{8}{5} < r < \frac{13}{8}, \\
\frac{21}{13} < r < \frac{34}{21}, \\
\dots\dots
\end{gathered}
$$

Proto se spirály odpovídající dvěma po sobě jdoucím Fibonacciovým číslům (jmenovatelům zlomků) točí v opačných směrech. Vzpomeňte si na vysvětlení směru spirál u obr. 5b) a 5c) a porovnejte s nerovnostmi.

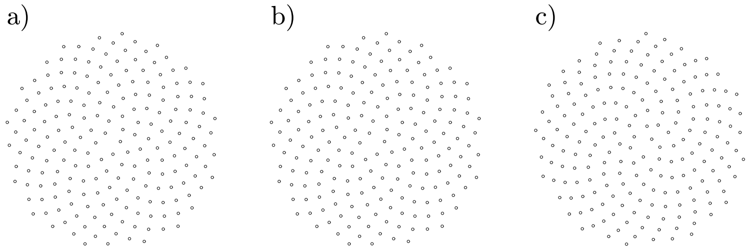
Zlatý řez ovšem není jediný přípustný kandidát pro úhel odklonu. Další z čísel, která nemají dobré racionální aproximace, se dají napsat jako jedna z možností:

$$z_1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$z_2 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$z_3 = \sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Číslu $z_1$ odpovídají počty spirál (jmenovatele aproximací) $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$, tzv. Lucasova posloupnost (posloupnost Fibonacciova typu s počátečními hodnotami $1, 3$ namísto $1, 2$). Pro $z_2$ jsou počty spirál $1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, \ldots$ Pro $z_3$ jsou počty spirál $2, 5, 12, 29, 70, \ldots$ Na obr. 8 je výsledek simulace pro 200 vyrostlých semínek. Vidíme, že vzory se od těch Fibonacciových na první pohled příliš neliší. V přírodě se vzory odpovídající divergenci $z_1$ i $z_2$ vyskytují, ovšem mnohem méně často než ty odpovídající zlatému řezu.




Obr. 8: Vzor pro a) $r = z_1$ s 18 a 29 spirálami, b) $r = z_2$ s 23 a 37 spirálami, c) $r = z_3$ s 12 a 29 spirálami viditelnými na okraji.

## Cesta k úplnému vysvětlení

Shrňme nyní, co jsme doposud uvedli. Na začátku jsme nastínili, co to je fylotaxe, a inspirováni pozorováními botanika Brauna jsme podrobně rozebrali chování jednoduchého modelu. Ovšem zároveň s tím nám na mysli vytanuly otázky: Je nějaký důvod, proč by se rostliny měly chovat podle našeho modelu? A podle jakého pravidla se vybere právě zlatý řez jako divergence a ne jiné číslo podobných vlastností? Než na tuto otázku odpovíme, vydejme se dále po cestě historie studia fylotaxe a pozastavme se na ní u několika zajímavých myšlenek.

Krátce po Schimperovi a Braunovi následovaly studie bratří *Louise a Augusta Bravaisových.* Ti popisovali fylotaxi pomocí mřížky na polokouli a rozebírali, které ze spirál jsou viditelné. Auguste Bravais se později, údajně inspirován fylotaxí, začal zabývat krystaly a stal se jedním ze zakladatelů oboru krystalografie.

V roce 1868 německý botanik *Hofmeister* ve své knize uvedl, že pouhý fakt, že nové semínko roste do směru, kde je nejvíce místa, by mohl být zodpovědný za pozorované vzory. *Simon Schwendener* v roce 1878 navrhl, že uspořádání je výsledkem tlaku, kterým semínka působí na své sousedy. Vyrobil mechanický stroj, který takové podmínky simuloval. Výsledky jeho měření byly překvapivě přesné. Zajímavý je také argument *Wiesnera* (1875) vedený v obdobném duchu, který říká, že listy na rostlině se uspořádávají tak, aby měly co nejlepší přístup ke světlu a co nejméně si stínily. Nicméně růst dlouhých úzkých listů by pro takový případ byl asi efektivnějším řešením než spirálové vzory. *Schouteho* (1913) napadlo, že počáteční směr růstu nového semínka by mohl být dán chemických inhibitorem, který je vylučován semínky již vyrostlými. Ovšem do dnešní doby žádný takový chemický inhibitor nebyl nalezen.

V roce 1907 přišel holandský botanik *G. van Iterson* s teorií, která nyní tvoří základ moderního teoretického výzkumu fylotaxe. Zkonstruoval geometrický model, který předpokládal, že semínka jsou kolečka ve vzájemném kontaktu a uspořádány kolem kruhového středu (ze kterého vyrůstají). Spočítal všechny geometricky možné konfigurace. Jednou z nich byl skutečně vzor pozorovaný na rostlinách odpovídající divergenci o velikosti zlatého řezu. Ale řešením bylo i mnoho dalších vzorů, např. ty z obr. 8a) a b). Všechna řešení se dají znázornit v tzv. Itersonově diagramu. Iterson nedokázal rozhodnout, proč to které řešení by mělo být lepší než jiné. Částečně možná proto zůstal jeho přístup více než 50 let zapomenut.

Rozhodující příspěvek k výzkumu přidali francouzští fyzici *Douady a Couder* v roce 1992. Namísto geometrických kritérií pro umístění nového semínka použili princip minimální energie. Nejlépe jejich přístup pochopíme, popíšeme-li si experiment, který zrealizovali. Do středu misky naplněné silikonovým olejem padaly periodicky kapičky fero-kapaliny. Kolem misky bylo magnetické pole umístěné tak, aby se jednotlivé kapičky vzájemně odpuzovaly (podobně jako dvě nabité kuličky). Rychlost jejich pohybu byla limitována viskozitou oleje. Kapičky pohybující se od sebe tvořily vzory stejné, jako pozorujeme na slunečnici. Douady a Couder také numericky simulovali popsaný model. Došli k podobnému diagramu popisujícímu řešení jako Iterson, narozdíl od něj však dokázali vysvětlit, proč správným výsledkem je právě ten související s Fibonacciovými čísly. Jejich vysvětlení je chybějícím článkem řetízku pochopení fylotaxe, je ovšem nad rámec složitosti tohoto článku. Lze se o něm dočíst mimo jiné v článku [2] určeném pro širší vědeckou veřejnost.

Přínos výsledku Douadyho a Coudera je zejména ve vyvrácení evolučního přístupu k fylotaxi, tj. teorie související s otázkou uvedenou na začátku: Věděla by slunečnice sama, co má společného s Fibonacciovými čísly? Část vědců se domnívala, že ano. Věřila totiž správnosti následujícího argumentu: Semínka na rostlinách podobných slunečnici v dávné a dávné historii jejich vývoje rostla náhodně, avšak rostliny, jejichž semínka byla blízko u sebe, byly přirozeným výběrem preferovány před ostatními, a proto dnes téměř na všech rostlinách pozorujeme vzory odpovídající Fibonacciovým číslům, jelikož ty jsou z hlediska šetření prostoru nejvýhodnější.

Z výsledku Douadyho, Coudera a později i dalších ovšem plyne, že spirálové vzory jsou výsledkem pouze dynamického růstového procesu „odpuzujících" se semínek, že tedy nejsou zakódovány v genech rostliny, ani nevznikaly nějakou složitou evoluční cestou. Přičemž ono odpuzování semínek může být realizováno kupříkladu pouhým dělením a růstem buněk mezi zárodky budoucích semínek.

Literatura


[1] Adler I., Barabe D., Jean R. V.: *A history of the Study of Phyllotaxis.* Annals of Botany **80** (1997), 231–244.

[2] Douady S., Couder Y.: *La physique des spirales végétales.* La Recherche 250, Vol. 24, 26–35 (Janvier 1993).

[3] Interaktivní internetová stránka o studiu fylotaxe: `http://www.math.smith.edu/~phyllo/` (anglicky).


# O rovnici $x^n + y^n = z^{n+1}$

*Emil Calda, MFF UK Praha*

Jak jistě víte, velkou Fermatovou větou se nazývá tvrzení, které poprvé vyslovil francouzský matematik Pierre Fermat (1601–1665):

*Pro žádné přirozené číslo $n > 2$ neexistují přirozená čísla $x$, $y$, $z$ taková, že platí*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Víte asi také, že důkaz této věty odolával úsilí matematiků téměř čtyři sta let a že ho teprve nedávno podal anglický matematik Andrew Wiles.