Úlohy domácího kola 56. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 2, 22–28

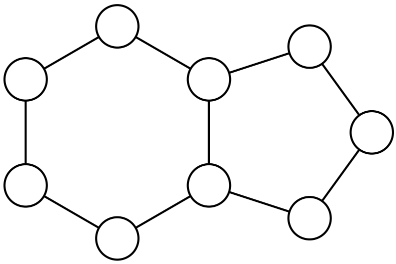
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146148

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 56. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

KATEGORIE Z5

1. Šestiúhelník a pětiúhelník mají společnou stranu se dvěma vrcholy. Doplň do všech vrcholů obou obrazců čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet čísel v šestiúhelníku i v pětiúhelníku byl 24. Každé číslo použij právě jednou. Stačí, když najdeš jedno řešení.



(*L. Hozová*)

2. Cyklistického závodu Tour de Lhota se zúčastnila šestičlenná družstva. V prvních deseti etapách závod nikdo nevzdal. V jedenácté etapě po hromadném pádu odstoupilo 17 cyklistů a v každé další etapě pak jich odstoupilo vždy o 3 méně než v předešlé etapě. Do cíle závěrečné 15. etapy dojelo 53 cyklistů. Kolik družstev se zúčastnilo závodu? Zdůvodni.

(*Š. Ptáčková*)

3. Cvičená blecha Hopsalka stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Vaškem takovou hru: Vašek házel kostkou. Kolik ok mu padlo, o tolik čísel poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Vaškovi padla oka 2, 5 a 6, ale nevíme, v jakém pořadí. Na která čísla mohla Hopsalka doskočit po třetím skoku?

(*L. Hozová*)

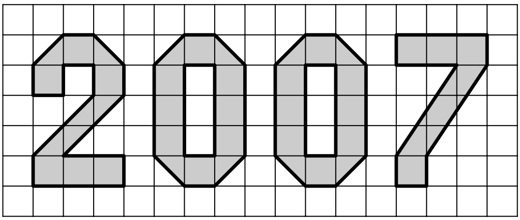
4. Pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a pomocí dvou desetinných čárek utvoř dvě desetinná čísla tak, aby jejich součet byl co nejmenší. Najdi všechny možnosti. (Každou číslici použij právě jednou.)

(*S. Bednářová*)

5. Sedm trpaslíků sbíralo hříbky. V košíčkách měli 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hříbků. Sněhurka chtěla stejný počet hříbků na polévku, na smažení i na usušení. Jak rozdělili trpaslíci své košíčky do tří skupin tak, aby počet hříbků v každé skupině byl stejný? (Trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat.)

(*Š. Ptáčková*)

6. Lucka vystřihovala ze čtverečkovaného papíru číslice 2, 0, 0, 7 tak, jak je naznačeno na obrázku. Urči obsah vystřižených číslic, je-li strana čtverečku sítě dlouhá 4 cm.



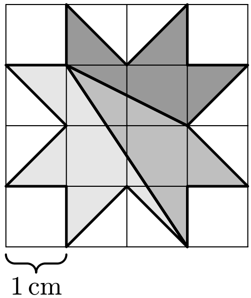
(*M. Raabová*)

KATEGORIE Z6

1. Lukáš natíral laťkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 laťky?

(*M. Raabová*)

2. Hvězda na obrázku je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich.

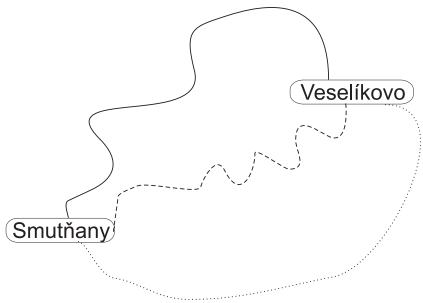


(*L. Šimůnek*)

3. Vícemístné číslo se nazývá *optimistické*, jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo *pesimistické*. Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla složených z týchž číslic je 11 001 000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel?

(*S. Bednářová*)

4. Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.



a) Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?

b) Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?

c) O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?

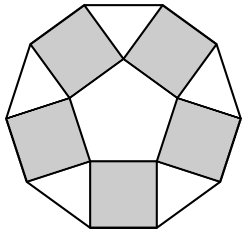
d) O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička?

(*S. Bednářová*)

5. Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet?

(*M. Volfová*)

6. Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků.



(*S. Bednářová*)

KATEGORIE Z7

1. Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jako mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2.

(*M. Dillingerová*)

2. Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čarách sítě!

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

(*S. Bednářová*)

3. Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čitatel i jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla.

(*L. Šimůnek*)

4. Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček?

(*M. Dillingerová*)

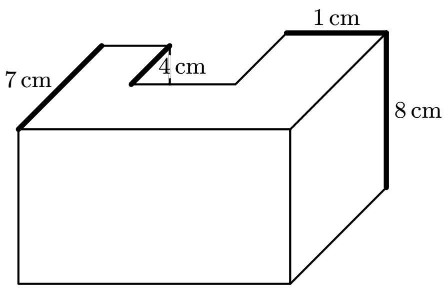
5. Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými ciframi, jehož žádné tři za sebou jdoucí číslice a, b, c nesplňují ani $a < b < c$, ani $a > b > c$, se nazývá *vlnité*. Napiš

a) největší vlnité číslo, které není dělitelné 3,

b) největší vlnité číslo dělitelné 150.

(*S. Bednářová*)

6. Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit).



(*S. Bednářová*)

KATEGORIE Z8

1. Z číslic 1, 2, …, 9 jsme vytvořili tři smíšená čísla $a\frac{b}{c}$. Potom jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat? (Každou číslici jsme použili právě jednou.)

(*S. Bednářová*)

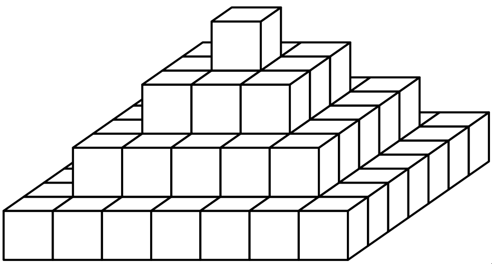
2. Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici?

(*M. Krejčová*)

3. Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky DG a BE.

(*M. Raabová, M. Krejčová*)

4. Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obrázku, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a pršelo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které pršelo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2 025 kostek. Kolik měla pyramida pater?



(*L. Šimůnek*)

5. Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno číslicemi prvního čísla, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je vždy dělitelný tento součet?

(*L. Hozová*)

6. Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí jeho obsah v poměru 1 : 3. Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.

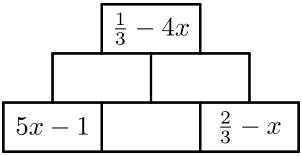
(*L. Hozová*)

KATEGORIE Z9

1. Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750?

(P. Tlustý)

2. Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obrázku. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním.



(S. Bednářová)

3. Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M. Určete délku úsečky AM.

(M. Volfová)

4. Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.

(L. Šimůnek)

5. Trojúhelník REZ s obsahem $84\,\mathrm{cm}^2$ $(|RE| = 14\,\mathrm{cm},\ |ZE| = 15\,\mathrm{cm})$ jsme dvěma přímými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti.

(S. Bednářová)

6. Dokažte, že číslo

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ \cdots \ \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ \cdots \ \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4.

(P. Tlustý)