

Úlohy domácího kola 56. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 81 (2006), No. 1, 44–46

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146133>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2006

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 56. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

KATEGORIE A

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1.

(*J. Šimša*)

2. Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC , CA , AB po řadě v bodech K , L , M . Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK . Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné.

(*P. Novotný*)

3. Jsou-li x , y , z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

(*J. Švrček*)

4. Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $M = \{1, 2, \dots, n\}$ rozdělit

a) na dvě,

b) na tři

navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků.

(*P. Novotný*)

5. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k .

(*J. Dula*)

6. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006).$$

(P. Kaňovský)

KATEGORIE B

1. Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(P. Novotný)

2. Je dána kružnice k s průměrem AB . K libovolnému bodu Y kružnice k , $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X , pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X .

(P. Leischner)

3. Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k -prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

(P. Novotný)

4. V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC . Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB , pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový.

(J. Mazák)

5. Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$.

(J. Moravčík)

6. Je dána úsečka AA_0 a přímka p . Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0 , jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p .

(E. Řídká)

KATEGORIE C

1. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(J. Švrček)

SOUTĚŽE

2. Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

(J. Mazák)

3. Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: Vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla.

(J. Šimša)

4. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD . Označme E střed strany AB , F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE . Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A , F , C leží v přímce.

(J. Mazák)

5. Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší,
přirozené číslo.

b) co nejmenší

(E. Řídká)

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$.

(J. Zhouf)

* * * * *

SOUSTAVA NEROVNIC

*Řešil jsem soustavu
rovníc a nerovnic,
málem do ústavu
vezli mě do Bohnic.
Mé milé rovnice,
proč jen mě lákáte?
Počkejte, Bohnice,
však vy se dočkáte!*

*Emil Calda *)*

*) Z publikace *Úvod do obecné teorie prostoru*, Praha, Karolinum 2003