Filip Švrček

O posloupnostech kružnic s vnějším dotykem

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 4, 5–14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146117`

O posloupnostech kružnic s vnějším dotykem

Filip Švrček, PřF UP Olomouc

V tomto článku se budeme zabývat řešením několika tematicky příbuzných úloh o jistých posloupnostech kružnic s vnějším dotykem. Některé z těchto úloh jsou bez řešení uvedeny v publikacích [1], [2], jejichž spoluautorem je japonský matematik a popularizátor japonské planimetrie 18. a 19. století – *Hidetoši Fukagawa*. Knihy obsahují výběr starých japonských planimetrických problémů, které se dochovaly na dřevěných tabulkách v některých japonských chrámech a mezi matematickou veřejností jsou známy jako úlohy SANGAKU.

V článku ukážeme čtenáři užití dvou základních variant principu matematické indukce při řešení některých planimetrických úloh. Pro jednoduchost budeme v celém článku symbolem $O(r)$ značit kružnici se středem O a poloměrem r. V každé ze čtyř následujících úloh budeme pracovat s jistou posloupností kružnic a ve většině případů bude naším úkolem stanovit obecný vzorec pro n-tý člen posloupnosti (r_n) jejich poloměrů.

Úloha 1

Uvažujme dvě kružnice $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, které mají vnější dotyk, a jejich společnou vnější tečnu ℓ (obr. 1). Kružnice $O_3(r_3)$ se dotýká zvnějšku obou kružnic $O_1(r_1)$ a $O_2(r_2)$ a dotýká se také přímky ℓ, dále se kružnice $O_4(r_4)$ dotýká zvnějšku kružnic $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$ a zároveň se dotýká přímky ℓ atd. Vyjádřete r_n pomocí r_1, r_2 a n.

Řešení. Označme T_i dotykový bod i-té kružnice posloupnosti $\big(O_i(r_i)\big)$ s danou přímkou ℓ. Z obr. 1 je patrné, že pro dotykové body kružnic $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ platí

$$|T_1T_3| + |T_3T_2| = |T_1T_2|. \tag{1.1}$$

Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky $O_1O_2P_3$, $O_2O_3P_1$ a $O_3O_1P_2$ (body P_1, P_2, P_3 viz obr. 1) snadno dokážeme platnost vztahů

$$|T_1T_2| = 2\sqrt{r_1r_2}, \quad |T_2T_3| = 2\sqrt{r_2r_3}, \quad |T_1T_3| = 2\sqrt{r_1r_3}.$$

Místo (1.1) tak můžeme psát

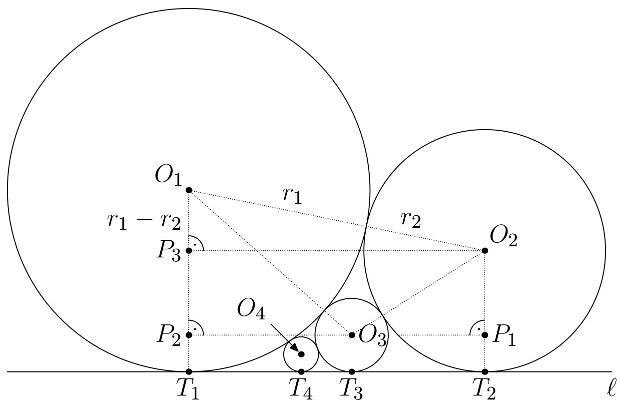
$$2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_3 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Odtud obdržíme rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}},$$

ze které vyplývá

$$r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^{-2}. \tag{1.2}$$



Obr. 1

Aplikujeme-li stejný postup na trojici kružnic $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$, $O_4(r_4)$, dostaneme s využitím rovnosti (1.2)

$$r_4 = \left(\frac{2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^{-2}.$$

Podobnými úvahami o trojici kružnic $O_1(r_1)$, $O_4(r_4)$ a $O_5(r_5)$ odvodíme

$$r_5 = \left(\frac{3}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^{-2}.$$

Můžeme tak vyslovit následující hypotézu:

Pro poloměr r_n $(n \geqq 3)$ *kružnice* $O_n(r_n)$ *platí*

$$r_n = \left(\frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \right)^{-2}. \tag{1.3}$$

Platnost této hypotézy dokážeme užitím principu matematické indukce vzhledem k přirozenému číslu n, kde $n \geqq 3$.

(i) Pro $n = 3$ je rovnost (1.3) ověřena vztahem (1.2).

(ii) Předpokládejme nyní, že rovnost (1.3) platí pro $n = k$, kde $k \in \mathsf{N}$, $k \geqq 3$. Pro dotykové body kružnic $O_1(r_1)$, $O_k(r_k)$, $O_{k+1}(r_{k+1})$ s přímkou ℓ je splněna rovnost

$$|T_1T_{k+1}| + |T_{k+1}T_k| = |T_1T_k|,$$

a tedy

$$2\sqrt{r_1 r_{k+1}} + 2\sqrt{r_{k+1} r_k} = 2\sqrt{r_1 r_k},$$

z čehož vyplývá

$$r_{k+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_k}} \right)^{-2}.$$

Podle indukčního předpokladu můžeme za r_k dosadit ze vztahu (1.3), v němž $n = k$. Po úpravě dostaneme

$$r_{k+1} = \left(\frac{k-1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \right)^{-2}.$$

Dokázali jsme tedy, že z platnosti (1.3) pro $n = k$ vyplývá platnost této rovnosti pro $n = k + 1$.

Spojením výsledků (i) a (ii) je dokázáno, že rovnost (1.3) platí pro libovolné přirozené číslo n $(n \geqq 3)$.

Úloha 2

Nechť $C_1(r)$, $C_2(r)$ jsou dvě shodné kružnice s vnějším dotykem v bodě T a ℓ jejich společná vnější tečna (obr. 2). Kružnice $O_1(r_1)$ se dotýká přímky ℓ a zvnějšku obou kružnic $C_1(r)$, $C_2(r)$. Kružnice $O_2(r_2)$ se dotýká zvnějšku kružnice $O_1(r_1)$ a obou kružnic $C_1(r)$, $C_2(r)$ atd. Určete r_n pomocí r a n.

Řešení. Je zřejmé, že středy O_i kružnic posloupnosti $\big(O_i(r_i)\big)$ leží na společné vnitřní tečně kružnic $C_1(r)$, $C_2(r)$ s bodem dotyku T. V pravoúhlém trojúhelníku C_1TO_1 podle Pythagorovy věty platí

$$(r+r_1)^2 = r^2 + (r-r_1)^2,$$

odkud

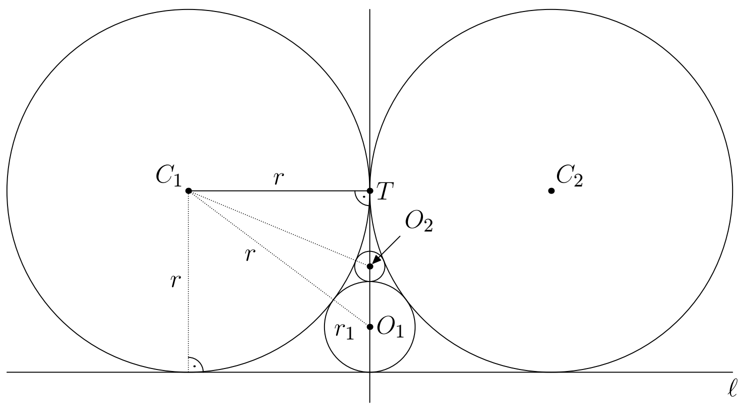
$$r_1 = \tfrac{1}{4}r. \tag{2.1}$$

Podobně z trojúhelníku C_1TO_2 plyne

$$(r+r_2)^2 = r^2 + (r-2r_1-r_2)^2,$$

odkud s využitím (2.1) po úpravách dostaneme

$$r_2 = \tfrac{1}{12}r. \tag{2.2}$$



Obr. 2

Analogicky bychom z trojúhelníku C_1TO_3 dostali

$$r_3 = \tfrac{1}{24}r \tag{2.3}$$

a z trojúhelníku C_1TO_4

$$r_4 = \tfrac{1}{40}r. \tag{2.4}$$

Všimněme si podrobněji prvních čtyř členů posloupnosti (r_i). Lze psát:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4\cdot 1}\,r \\ r_2 &= \frac{1}{4\cdot(1+2)}\,r \\ r_3 &= \frac{1}{4\cdot(1+2+3)}\,r \\ r_4 &= \frac{1}{4\cdot(1+2+3+4)}\,r \end{aligned}$$

Lze tedy očekávat, že *pro n-tý člen posloupnosti (r_i) platí*

$$r_n = \frac{1}{4\cdot(1+2+\ldots+n)}\,r,$$

tj.

$$r_n = \frac{1}{2n(n+1)}\,r. \tag{2.5}$$

Dále budeme postupovat podobně jako v předchozí úloze. Užitím principu matematické indukce (vzhledem k přirozenému číslu n) dokážeme platnost rovnosti (2.5) pro všechna $n \in \mathsf{N}$.

(i) Pro $n = 1$ je rovnost (2.5) ověřena vztahem (2.1).

(ii) Předpokládejme nyní, že rovnost (2.5) platí pro každé přirozené číslo $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, kde $k \in \mathsf{N}$. Ukážeme, že z toho vyplývá platnost této rovnosti pro $n = k + 1$. Z pravoúhlého trojúhelníku C_1TO_{k+1} vyplývá

$$(r + r_{k+1})^2 = r^2 + \bigl[r - (2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_k) - r_{k+1}\bigr]^2. \tag{2.6}$$

Podle indukčního předpokladu platí

$$2r_1 + 2r_2 + \cdots + 2r_k = \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}\right] r =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right] r = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) r.$$

Dosazením do (2.6) pak dostaneme

$$(r + r_{k+1})^2 = r^2 + \left(\frac{1}{k+1}\,r - r_{k+1}\right)^2 .$$

Odtud po úpravách obdržíme

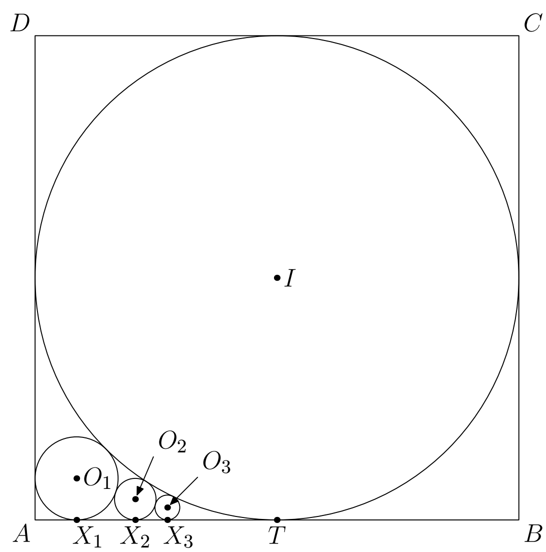
$$r_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(k+2)}\,r,$$

což znamená platnost rovnosti (2.5) pro $n = k + 1$.

Spojením výsledků (i) a (ii) je dokázána platnost rovnosti (2.5) pro všechna $n \in \mathsf{N}$.

Úloha 3

Nechť $I(a)$ je kružnice vepsaná do čtverce $ABCD$ se stranou délky $2a$. Sestrojme posloupnost kružnic $O_i(r_i)$, kde $i \in \mathsf{N}$, takovou, že kružnice $O_1(r_1)$ se dotýká stran AB a DA daného čtverce a také zvnějšku kružnice $I(a)$, kružnice $O_2(r_2)$ se dotýká strany AB a zvnějšku kružnic $I(a)$ a $O_1(r_1)$ atd. Vyjádřete r_n pomocí a a n.



Obr. 3

Řešení. Označme X_i body dotyku kružnic $O_i(r_i)$ se stranou AB čtverce $ABCD$ a bod dotyku kružnice $I(a)$ se stranou AB označme T. Z obr. 3 (podobnými úvahami jako v úloze 1) odvodíme, že pro každé $i \in \mathsf{N}$ platí

$$|X_iX_{i+1}| = 2\sqrt{r_ir_{i+1}}, \quad |X_iT| = 2\sqrt{r_ia}.$$

Při výpočtu r_1 vyjdeme z rovnosti

$$|AT| = |AX_1| + |X_1T|,$$

tedy

$$a = r_1 + 2\sqrt{r_1a}.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou r_1 a reálným parametrem a:

$$r_1^2 - 6ar_1 + a^2 = 0$$

Jediným reálným kořenem této rovnice, který vzhledem k podmínce $0 < r_1 < a$ vyhovuje naší úloze, je

$$r_1 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) a = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}\, a = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2}\, a. \tag{3.1}$$

Nyní určíme r_2. Platí

$$|AT| = |AX_1| + |X_1X_2| + |X_2T|,$$

tj.

$$a = r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + 2\sqrt{r_2a}$$

neboli

$$a - r_1 = 2\sqrt{r_2}\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{a}\right).$$

Do této rovnosti dosadíme z (3.1) za r_1 a pak ji upravíme na tvar

$$\sqrt{r_2} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}\sqrt{a},$$

odkud

$$r_2 = \frac{1}{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2}\, a.$$

Analogicky bychom došli k výsledku

$$r_3 = \frac{1}{\left(3 + \sqrt{2}\right)^2}\, a.$$

I zde můžeme vyslovit hypotézu:

Pro každé $n \in \mathsf{N}$ *platí*

$$r_n = \frac{1}{\left(n + \sqrt{2}\right)^2}\, a. \tag{3.2}$$

K důkazu této hypotézy využijeme opět princip matematické indukce.

(i) Pro $n = 1$ je rovnost (3.2) ověřena vztahem (3.1).

(ii) Předpokládejme nyní, že rovnost (3.2) platí pro pro každé přirozené číslo $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, kde $k \in \mathsf{N}$. Dokážeme, že z toho vyplývá platnost této rovnosti pro $n = k + 1$. Pro délku úsečky AT platí

$$|AT| = |AX_1| + |X_1X_2| + \cdots + |X_{k-1}X_k| + |X_kX_{k+1}| + |X_{k+1}T|,$$

tedy

$$a = r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + \cdots + 2\sqrt{r_{k-1}r_k} + 2\sqrt{r_kr_{k+1}} + 2\sqrt{r_{k+1}a}$$

neboli

$$a = r_1 + 2S + 2\sqrt{r_{k+1}}\left(\sqrt{r_k} + \sqrt{a}\right), \tag{3.3}$$

kde

$$S = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \cdots + \sqrt{r_{k-1}r_k}.$$

Z indukčního předpokladu, tj. z platnosti rovnosti (3.2) pro každé $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, vypočteme

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k+\sqrt{2}}\right] a = \\ &= \left[\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(k-1)+\sqrt{2}} - \frac{1}{k+\sqrt{2}}\right)\right] a = \\ &= \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{k+\sqrt{2}}\right) a. \end{aligned}$$

Poslední výsledek a součásti indukčního předpokladu $r_1 = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}\, a$, $r_k = \dfrac{1}{\left(k+\sqrt{2}\right)^2}\, a$ dosadíme do (3.3) a po úpravách obdržíme

$$\frac{2}{k+\sqrt{2}}\, a = 2\sqrt{r_{k+1}}\, \frac{(k+1)+\sqrt{2}}{k+\sqrt{2}}\, \sqrt{a},$$

odkud

$$r_{k+1} = \frac{1}{\left[(k+1)+\sqrt{2}\right]^2}\, a,$$

což znamená platnost rovnosti (3.2) pro $n = k+1$.

Spojením výsledků (i) a (ii) je také v tomto případě matematickou indukcí dokázáno, že rovnost (3.2) platí pro všechna přirozená čísla n.

Při řešení předešlých tří úloh jsme využili princip matematické indukce, který reprezentuje efektivní metodu řešení celé řady úloh (nejen s uvedenou problematikou). Přitom si povšimněme dvou odlišných variant tohoto principu.

Při řešení úlohy 1 jsme v kroku (ii) dokazovali platnost implikace:

Platí-li dokazovaná rovnost (dokazované tvrzení) pro $n = k$, *kde* $k \in \mathsf{N}$ $(k \geqq 3)$, *pak platí i pro* $n = k+1$, tedy platnost implikace

$$T(k) \Rightarrow T(k+1),$$

kde symbol $T(k)$ značí uvažovanou výrokovou formu (příslušnou rovnost – tvrzení úlohy) v závislosti na k.

Na rozdíl od této varianty byla při řešení úloh 2 a 3 shodně použita jiná (obecnější) varianta principu matematické indukce. V kroku (ii) jsme dokazovali platnost implikace:

Platí-li dokazovaná rovnost (dokazované tvrzení) pro všechna přirozená čísla $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *kde* $k \in \mathsf{N}$ $(k \geqq 1)$, *platí i pro* $n = k+1$, tedy platnost implikace

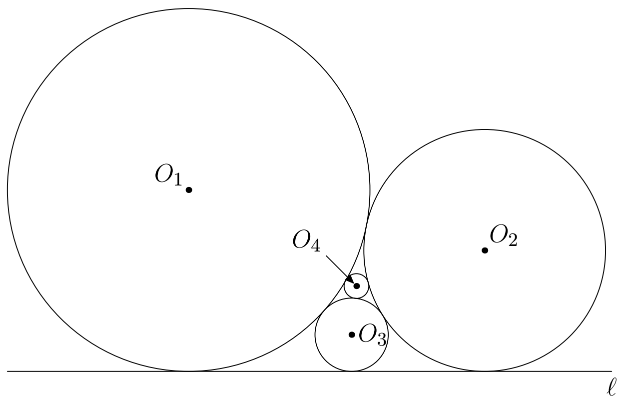
$$[T(1) \wedge T(2) \wedge \ \ldots\ \wedge T(k)] \Rightarrow T(k+1).$$

První z uvedených variant principu matematické indukce je zvláštním případem (důsledkem) varianty druhé.

Vyřešení poslední úlohy přenecháváme čtenářům k samostatnému procvičení. Správný výsledek je uveden v hranatých závorkách.

Úloha 4

Nechť $O_1(r_1)$ a $O_2(r_2)$ jsou kružnice s vnějším dotykem a ℓ jejich společná vnější tečna. Uvažujme kružnice $O_i(r_i)$, kde $i = 3, 4, \dots,$ takové, že $O_3(r_3)$ se dotýká přímky ℓ a zvnějšku obou kružnic $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, kružnice $O_4(r_4)$ se dotýká zvnějšku kružnice $O_3(r_3)$ a také obou kružnic $O_1(r)$, $O_2(r)$ atd. (obr. 4). Určete r_n v závislosti na r_1, r_2 a n.



Obr. 4

$$\left[\; r_n = \frac{1}{2(n-2)\sqrt{\frac{1}{r_1 r_2}} + (n-2)^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}, \quad n \geqq 3 \;\right]$$

Literatura:

[1] Fukagawa, H. – Pedoe, D.: *Japanese Temple Geometry Problems.* Winnipeg, Canada, 1989

[2] Fukagawa, H. – Rigby, J. F.: *Traditional Japanese Mathematics Problems.* SCT Publishing, Singapore 2002

[3] Švrček, J.: *Japonská planimetrie 18. a 19. století.* MFI, roč. 4, 1994/95, č. 9, str. 385–391