Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaroslav Zhouf

Aritmetická posloupnost druhého řádu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 3, 3–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146106

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Aritmetická posloupnost druhého řádu [*])

Jaroslav Zhouf, PedF UK Praha

V domácím kole 54. ročníku matematické olympiády kategorie B byla zadána tato úloha:

Úloha

Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geqq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte.

První část řešení úlohy

V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby nakonec vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy k je liché číslo, $k \geqq 3$.

Kdyby na začátku ležely na stole jen tři hromádky, měla by jediná hromádka po jejich sloučení a přidání jednoho kamene

$$[(1+2+3)+1] \text{ kamenů} = 7 \text{ kamenů}.$$

Kdyby na začátku leželo na stole pět hromádek, byly by tam po prvním sloučení tři hromádky a po dalším sloučení jedna hromádka. Přidaly by se tak ke kamenům na stole celkem dva kameny, takže na konečné hromádce by bylo

$$[(1+2+3+4+5)+2] \text{ kamenů} = 17 \text{ kamenů}.$$

Při počátečních sedmi hromádkách bude nakonec na stole

$$[(1+2+3+4+5+6+7)+3] \text{ kamenů} = 31 \text{ kamenů},$$

při devíti hromádkách to bude

$$[(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+4] \text{ kamenů} = 49 \text{ kamenů} \quad \text{atd.}$$

---

*) Článek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

Tedy v závislosti na počtu hromádek, které na začátku leží na stole, bude ve výsledné hromádce jeden z těchto počtů kamenů:

$$7,\ 17,\ 31,\ 49,\ 71,\ 97,\ 127,\ \ldots$$

Začátek této posloupnosti je zajímavý tím, že rozdíly každých dvou sousedních členů tvoří novou posloupnost

$$10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ \ldots,$$

která je aritmetická s diferencí 4.

Ukážeme, že tuto vlastnost má celá posloupnost možných počtů kamenů ve výsledné hromádce pro libovolný lichý počet k hromádek, které jsou na začátku na stole. Uvažujme tedy tři za sebou následující možné počty hromádek ležících na začátku na stole. V prvním případě leží na stole k hromádek, kde k je liché číslo, $k \geqq 3$, ve druhém případě je to $k+2$ hromádek a ve třetím případě $k+4$ hromádek. Rozdíl mezi konečnými počty kamenů ve druhém a prvním případě je $(k+1)+(k+2)+1 = 2k+4$; rozdíl mezi konečnými počty kamenů ve třetím a druhém případě je $(k+3)+(k+4)+1 = 2k+8$. Protože $(2k+8)-(2k+4) = 4$, jsou zkoumané rozdíly skutečně členy aritmetické posloupnosti s diferencí 4.

Vidíme, že žádný z několika vypsaných členů posloupnosti

$$7,\ 17,\ 31,\ 49,\ 71,\ 97,\ 127,\ \ldots,$$

které vyjadřují možné počty kamenů ve výsledné hromádce, není dělitelný třemi. Tuto skutečnost musíme ještě dokázat pro libovolný člen posloupnosti. K důkazu použijeme vzorec pro obecný člen této posloupnosti. Dříve než tento vzorec odvodíme, seznámíme se s jednoduchou teorií o podobně sestavených posloupnostech.

Aritmetická posloupnost druhého řádu

Posloupnost

$$7,\ 17,\ 31,\ 49,\ 71,\ 97,\ 127,\ \ldots$$

je příkladem tzv. aritmetické posloupnosti druhého řádu.

Definice. Konečná nebo nekonečná posloupnost (b_n) se nazývá *aritmetická posloupnost druhého řádu*, pokud posloupnost $(a_n) = (b_{n+1} - b_n)$ je aritmetická.

Aritmetická posloupnost známá ze školy se někdy nazývá *aritmetická posloupnost prvního řádu.*

Je-li (a_n) aritmetická posloupnost (prvního řádu), je též $(a_{n+1} - a_n)$ aritmetická posloupnost (prvního řádu) – má všechny členy stejné. Tato posloupnost se může nazývat *aritmetická posloupnost nultého řádu*, častěji se jí však říká *konstantní posloupnost*.

Příklad 1. Posloupnost

$$(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

je aritmetická posloupnost (prvního řádu). Můžeme ji nalézt v Pascalově trojúhelníku ve druhém šikmém sloupci (tabulka 1). Připomeňme, že Pascalův trojúhelník má dva krajní šikmé sloupce složené ze samých jedniček a každé další číslo v Pascalově trojúhelníku je rovno součtu dvou čísel, která se nacházejí bezprostředně nad ním.

Ve třetím šikmém sloupci je aritmetická posloupnost druhého řádu

$$(b_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots),$$

neboť rozdíly každých dvou jejích sousedních členů tvoří aritmetickou posloupnost (prvního řádu).

A v prvním šikmém sloupci je aritmetická posloupnost nultého řádu

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}$$

TABULKA 1

V Pascalové trojúhelníku je ve čtvrtém šikmém sloupci tzv. *aritmetická posloupnost třetího řádu*

$$(c_n) = (1, 4, 10, 20, \ldots),$$

neboť rozdíly každých dvou jejích sousedních členů tvoří aritmetickou posloupnost druhého řádu.

V Pascalové trojúhelníku jsou postupně v dalších šikmých sloupcích tzv. *aritmetické posloupnosti čtvrtého, pátého* atd. *řádu*. Dále se budeme zabývat jen aritmetickými posloupnostmi druhého řádu.

Příklad 2. Posloupnost

$$(a_n) = (-5, -1, 3, 7, 11, \ldots)$$

je aritmetická posloupnost (prvního řádu). Členy k ní příslušné aritmetické posloupnosti druhého řádu (b_n) závisí na tom, jaký bude její první člen b_1. Zvolíme-li např. $b_1 = 6$, potom $b_2 = a_1 + b_1 = 1$, $b_3 = a_2 + b_2 = 0$, takže postupně dostaneme

$$(b_n) = (6, 1, 0, 3, 10, 21, \ldots).$$

Pro tento výpočet lze využít číselnou tabulku, která se vytváří podle stejného pravidla jako Pascalův trojúhelník (tabulka 2). Z ní se dá vyčíst nejen aritmetická posloupnost druhého řádu, ale i další aritmetické posloupnosti vyšších řádů, pokud známe jejich první členy. V naší tabulce je např. jako první člen aritmetické posloupnosti třetího řádu zvoleno číslo -4.

4	-5	6	-4
4	-1	1	2
4	3	0	3
4	7	3	3
4	11	10	6
4	15	21	16
.	.	.	.

Tabulka 2

Vzorec pro obecný člen aritmetické posloupnosti druhého řádu

Je-li (b_n) aritmetická posloupnost druhého řádu a (a_n) k ní příslušná aritmetická posloupnost (prvního řádu) s diferencí d, platí:

$$\begin{aligned} b_2 - b_1 &= a_1 \\ b_3 - b_2 &= a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} - b_{n-2} &= a_{n-2} \\ b_n - b_{n-1} &= a_{n-1} \end{aligned}$$

Po sečtení všech těchto rovností postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} b_n - b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + b_1 \\ b_n &= \frac{n-1}{2} \cdot \big[2a_1 + (n-2)d\big] + b_1 \\ b_n &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot d + (n-1)a_1 + b_1 \\ b_n &= \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{3d}{2}\right) \cdot n + (b_1 - a_1 + d) \qquad (1) \end{aligned}$$

Podle vzorce (1) můžeme vypočítat obecný člen aritmetické posloupnosti druhého řádu, známe-li z příslušné aritmetické posloupnosti (prvního řádu) její první člen a_1 a diferenci d.

Vidíme, že aritmetickou posloupnost druhého řádu zadává kvadratická funkce

$$b_n = An^2 + Bn + C. \qquad (2)$$

Ukažme, že platí rovněž obrácené tvrzení, tj. zvolíme-li konstanty A, B, C libovolně, bude vzorcem (2) zadána nějaká aritmetická posloupnost druhého řádu. Skutečně, pro takovou posloupnost (b_n) platí

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \big[A(n+1)^2 + B(n+1) + C\big] - \big[An^2 + Bn + C\big] = \\ &= 2An + A + B. \end{aligned}$$

Čísla $a_n = 2An + A + B$ zřejmě tvoří aritmetickou posloupnost (prvního řádu) s diferencí $2A$.

S touto znalostí můžeme najít vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti druhého řádu i bez pomoci příslušné aritmetické posloupnosti (prvního řádu). Známe-li například její první tři členy b_1, b_2, b_3, koeficienty A, B, C najdeme tak, že do vzorce (2) dosadíme za n hodnoty 1, 2, 3.

Příklad 3. Aritmetická posloupnost druhého řádu (b_n) v příkladu 2 má první člen $b_1 = 6$ a příslušná aritmetická posloupnost (prvního řádu) (a_n) má první člen $a_1 = -5$ a diferenci $d = 4$, proto podle (1) pro n-tý člen posloupnosti (b_n) platí

$$b_n = 2n^2 - 11n + 15.$$

Tento vztah lze odvodit i pomocí (2) bez znalosti příslušné posloupnosti (a_n). Dosadíme za n hodnoty 1, 2, 3, čímž dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé A, B, C:

$$\begin{aligned} 6 &= A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C\\ 1 &= A\cdot 2^2 + B\cdot 2 + C\\ 0 &= A\cdot 3^2 + B\cdot 3 + C\\ \hline 6 &= \ \ A + \ \ B + C\\ 1 &= 4A + 2B + C\\ 0 &= 9A + 3B + C \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení $A = 2,\ B = -11,\ C = 15,$ čímž jsme potvrdili správnost předchozího výpočtu pomocí vzorce (1).

Vzorec pro součet několika prvních členů aritmetické posloupnosti druhého řádu

K odvození vzorce pro součet $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ využijeme vztah (1):

$$s_n = \frac{d}{2}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \left(a_1 - \frac{3d}{2}\right)\cdot(1 + 2 + \cdots + n) + \\ + (b_1 - a_1 + d)\cdot n$$

$$s_n = \frac{d}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(a_1 - \frac{3d}{2}\right)\cdot\frac{n(n+1)}{2} + (b_1 - a_1 + d)\cdot n$$

$$s_n = \frac{d}{6}\cdot n^3 + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{d}{2}\right)\cdot n^2 + \left(b_1 - \frac{a_1}{2} + \frac{d}{3}\right)\cdot n \tag{3}$$

Tento vzorec je předpisem pro kubickou funkci bez absolutního členu

$$s_n = An^3 + Bn^2 + Cn. \tag{4}$$

Koeficienty A, B, C proto můžeme najít i z hodnot s_1, s_2, s_3 (určených členy b_1, b_2, b_3) tak, že dosadíme za n hodnoty 1, 2, 3.

Důležitý vztah

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

použitý při odvození vzorce (3) se dá sice najít v tabulkách, je však vhodné si ho nadále zapamatovat. Lze ho dokázat např. matematickou indukcí. Totéž platí o vzorcích:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Příklad 4. Aritmetická posloupnost druhého řádu (b_n) v příkladu 2 má podle (3) součet prvních n členů

$$s_n = \tfrac{2}{3}n^3 - \tfrac{9}{2}n^2 + \tfrac{59}{6}n.$$

Tento vztah lze odvodit také pomocí (4). Koeficienty A, B, C určíme ze soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 6 &= A \cdot 1^3 + B \cdot 1^2 + C \cdot 1 \\ 6 + 1 &= A \cdot 2^3 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 \\ 6 + 1 + 0 &= A \cdot 3^3 + B \cdot 3^2 + C \cdot 3 \\ \hline 6 &= A + B + C \\ 7 &= 8A + 4B + 2C \\ 7 &= 27A + 9B + 3C \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{9}{2}$, $C = \frac{59}{6}$, což je potvrzení správnosti předchozího výpočtu pomocí vzorce (3).

Druhá část řešení úlohy

Dokončíme řešení úlohy matematické olympiády uvedené na začátku článku.

Skončili jsme u toho, že možné počty kamenů ve výsledné hromádce na stole tvoří v závislosti na původním počtu hromádek na stole aritmetickou posloupnost druhého řádu

$$7,\ 17,\ 31,\ 49,\ 71,\ 97,\ 127,\ \ldots$$

Máme dokázat, že její n-tý člen není dělitelný třemi pro žádné přirozené číslo n.

K výpočtu n-tého členu využijeme vztah (1). Příslušná aritmetická posloupnost (prvního řádu) má první člen 10 a diferenci 4. Proto n-tý člen aritmetické posloupnosti druhého řádu má hodnotu $2n^2 + 4n + 1$.

Číslo n má jeden z tvarů $n = 3m$, $n = 3m + 1$, $n = 3m + 2$, kde m je přirozené číslo. V prvním případě je

$$2n^2 + 4n + 1 = 3 \cdot \left(6m^2 + 2m\right) + 1,$$

ve druhém případě je

$$2n^2 + 4n + 1 = 3 \cdot \left(6m^2 + 8m + 2\right) + 1$$

a ve třetím případě je

$$2n^2 + 4n + 1 = 3 \cdot \left(6m^2 + 12m + 5\right) + 2.$$

Žádné z těchto čísel není dělitelné třemi.

Tím je zadaná úloha dořešena.

Jiný způsob řešení zadané úlohy

Úlohu o hromádkách kamenů lze řešit i jinými způsoby. Jeden z nich je tento:

V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy $k = 2n + 1$, $n \geqq 1$. Na zmenšení počtu hromádek o $2n$ je třeba n kroků. Při každém kroku přibude jeden kámen, a proto je výsledný počet kamenů

$$1 + 2 + \cdots + (2n + 1) + n = \frac{(2n + 1)(2n + 2)}{2} + n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Dělitelnost třemi se prozkoumá stejně jako výše.

Úlohy *)

Na závěr předkládáme několik úloh na využití znalostí o aritmetických posloupnostech vyšších řádů.

Úloha 1. Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí vzorce:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Úloha 2. Najděte n-tý člen a součet prvních n členů aritmetické posloupnosti druhého řádu

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ 70,\ \ldots$$

Úloha 3. V třetím šikmém sloupci Pascalova trojúhelníku je aritmetická posloupnost druhého řádu

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots$$

Najděte její n-tý člen a součet prvních n členů.

Úloha 4. Ve čtvrtém šikmém sloupci Pascalova trojúhelníku je aritmetická posloupnost třetího řádu

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ \ldots$$

Podobnou metodou, jaká byla uvedena pro aritmetické posloupnosti druhého řádu, najděte její n-tý člen a součet prvních n členů.

Úloha 5. Ukažte, že ve čtvercové síti 5×7 tvoří počty čtverců 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 aritmetickou posloupnost druhého řádu. Určete počet všech čtverců v této síti.

Úloha 6. Stejný úkol jako v úloze 5 řešte pro čtvercovou síť $n \times n$.

---

*) Výsledky úloh najdete na str. 48.