Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Marie Holíková

O Pickově vzorci a rozměňování peněz

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 4, 312–322

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/145978`

O Pickově vzorci a rozměňování peněz

Marie Holíková, Praha

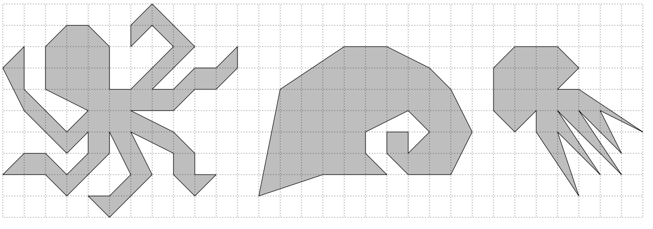
Abstrakt. V tomto článku představíme jeden méně známý elegantní důkaz Pickova vzorce pro výpočet obsahu jednoduchých mřížových mnohoúhelníků, který je založen na tzv. úhlech viditelnosti. Princip tohoto důkazu lze částečně použít i k odvození zobecněného Pickova vzorce pro mřížové mnohoúhelníky, které nejsou jednoduché. Dále naznačíme potíže spojené s prostorovou analogií Pickova vzorce. Nakonec ukážeme, jak Pickův vzorec souvisí s rozměňováním peněz.

1. Pickův vzorec a jeho důkaz

V roce 1899 publikoval Georg Alexander Pick ve své práci [13] vzorec pro výpočet obsahu jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech. Tomuto výsledku se však dostalo zasloužené pozornosti až v druhé polovině dvacátého století. Od té doby se objevují alternativní důkazy Pickova vzorce a jeho aplikace v nejrůznějších oblastech matematiky. S postavou pražského profesora G. A. Picka a jeho dalšími zájmy seznamuje blíže například článek [10].

V celém příspěvku budeme mluvit o *mřížových bodech*, což jsou body v rovině, které mají v kartézské soustavě souřadnic celočíselné souřadnice, např. $[3, 4]$ nebo $[0, -19]$.

Jednoduchý mnohoúhelník je mnohoúhelník, jehož hranice je uzavřená lomená čára, která sama sebe neprotíná. To také znamená, že uvnitř jednoduchého mnohoúhelníku nejsou žádné díry. Příklady nejednoduchých mnohoúhelníků jsou na obrázku 7.



Obr. 1. Příklady jednoduchých mnohoúhelníků s vrcholy v mřížových bodech

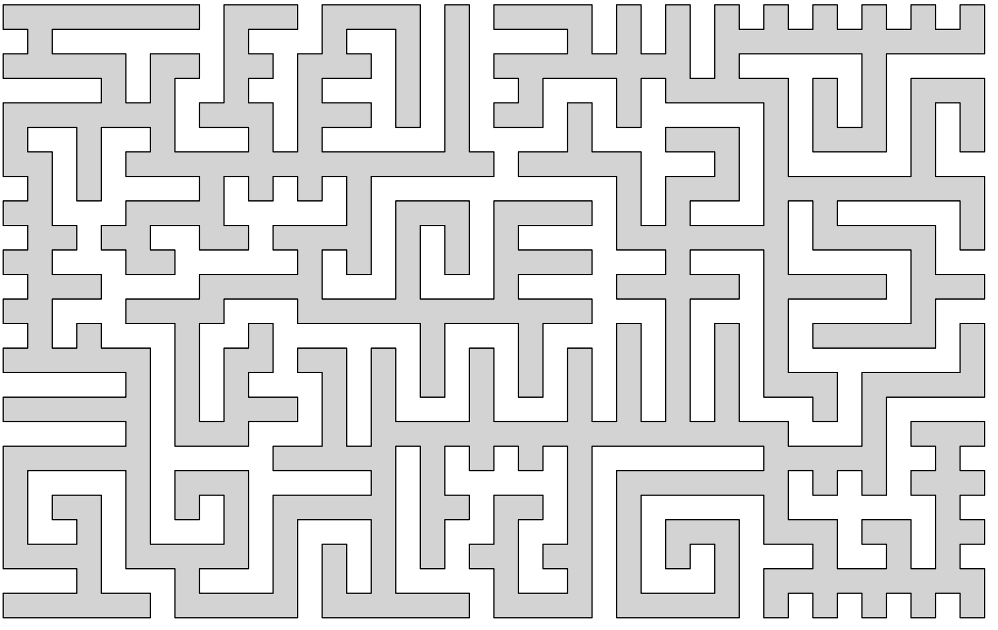
Věta 1 (Pickův vzorec). *Obsah jednoduchého mnohoúhelníku, který má vrcholy v mřížových bodech, je roven*

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

kde I je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a B je počet mřížových bodů na jeho hranici.

Mgr. Marie Holíková, Ph.D., Katedra matematiky a didaktiky matematiky, PedF UK v Praze, Magdalény Rettigové 4, 116 39 Praha 1, e-mail: marie.holikova@pedf.cuni.cz

Příklad 1 (převzato z [9])**.** Obdélník o rozměrech 40×25 byl rozdělen na jednotkové čtverečky. Po odstranění některých z nich zůstal útvar znázorněný na obrázku 2. Jaký je jeho obsah?



Obr. 2. Ilustrace k příkladu 1

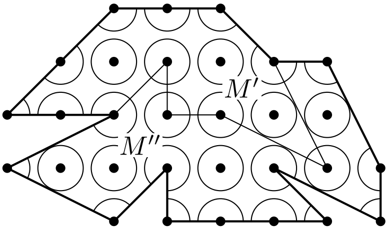
Úlohu lze elegantně vyřešit pomocí Pickova vzorce. Obarvený obrazec je jednoduchý mnohoúhelník, jehož hranice prochází všemi 41×26 mřížovými body, tj. $B = 1066$. Žádný mřížový bod není uvnitř, tedy $I = 0$. Celkový obsah je tedy 532.

Na první pohled je překvapivé, že obsah jednoduchého mřížového mnohoúhelníku nezávisí na jeho tvaru, ale pouze na počtu mřížových bodů na hranici a uvnitř tohoto mnohoúhelníku. Z Pickova vzorce také plyne, že obsah mřížového mnohoúhelníku je buď celočíselný, nebo celé číslo plus jedna polovina.

Dále si povšimněme, že všechny trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech, které již žádné další mřížové body neobsahují (uvnitř ani na hranici), mají obsah $\frac{1}{2}$. Takovým trojúhelníkům se říká *elementární trojúhelníky.* Obvyklé důkazy Pickova vzorce vycházejí z toho, že každý jednoduchý mřížový mnohoúhelník lze rozdělit na elementární trojúhelníky, čímž dostaneme tzv. *elementární triangulaci.* Dále se ukáže, že každý elementární trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$. Kombinací předchozích dvou tvrzení se pak získá Pickův vzorec.

Ukažme jeden elegantní méně známý důkaz Pickova vzorce. Pochází od Dalea E. Varberga [16] a je založen na tzv. úhlech viditelnosti.

Důkaz věty 1. Nechť M je zadaný jednoduchý mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech. Každému mřížovému bodu P_k náležejícímu mnohoúhelníku M přiřadíme váhu $w_k = \theta_k/2\pi$, kde θ_k je úhel „viditelnosti“ v bodě P_k, pod kterým je z P_k vidět dovnitř mnohoúhelníku.



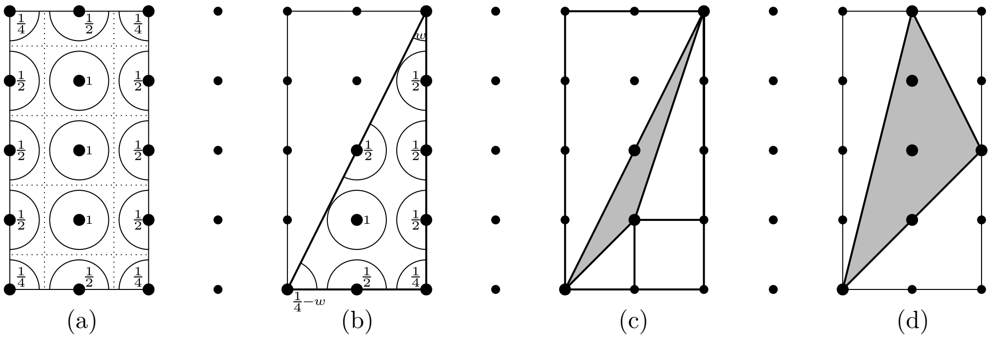
Obr. 3. Mnohoúhelník složený ze dvou částí s naznačenými úhly viditelnosti

Vnitřní mřížové body mnohoúhelníku mají $w_k = 1$. Mřížové body, které leží na hranách mnohoúhelníku a nejsou jeho vrcholy, mají $w_k = \frac{1}{2}$. Platí-li pro některý vrchol $w_k = \frac{1}{4}$, pak v něm hrany svírají pravý úhel, atd.

Definujme veličinu

$$W(M) = \sum_{P_k \in M} w_k.$$

Ukážeme, že $W(M)$ je obsah mnohoúhelníku M. Nejdříve si uvědomme, že veličina W je (stejně jako obsah) aditivní. To znamená, že pokud máme mnohoúhelník M, který vznikne spojením dvou mnohoúhelníků M' a M'', pak $W(M) = W(M') + W(M'')$. Tato vlastnost je snadno vidět z obrázku 3.



Obr. 4. Obdélník s naznačenými úhly viditelnosti, převzato z [11]

Nyní ukážeme, že veličina W skutečně odpovídá obsahu mnohoúhelníku. Nejdříve uvažme obdélník, který má hrany rovnoběžné s osami x a y a jehož vrcholy leží v mřížových bodech. Pro tento případ je zřejmé, že W je obsah obdélníku, jak je ilustrováno na obrázku 4a. Pokud uvážíme pravoúhlý trojúhelník, který má odvěsny rovnoběžné s osami x a y, pak se veličina W opět shoduje s obsahem, protože stačí díky již dokázané aditivitě vzít hodnotu W pro celý obdélník a vydělit ji dvěma, viz obrázek 4b.

Libovolný trojúhelník lze doplnit na obdélník s využitím pravoúhlých trojúhelníků a obdélníků, jak je naznačeno na obrázcích 4c a 4d. Veličina W je aditivní, a tak hodnotu W obecného trojúhelníku dostaneme odečtením hodnoty W pro obdélníky a pravoúhlé trojúhelníky. Stejně tak bychom získali i obsah takového trojúhelníku, a tak je veličina W pro obecný trojúhelník rovna jeho obsahu.

Poznamenejme, že v důkazu zatím nebyl nikde použit předpoklad o jednoduchosti mnohoúhelníku. Toho využijeme v kapitole 2, kde se pokusíme zobecnit Pickův vzorec na mnohoúhelníky, které nejsou jednoduché.

Nyní zbývá ukázat, že obsah mnohoúhelníku M odpovídá $W(M)$. Jednoduchý mřížový n-úhelník má n vrcholů a součet jim příslušejících úhlů viditelnosti odpovídá součtu vnitřních úhlů n-úhelníku, tj. $(n-2)\pi$. Označme I počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníku a B počet mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku. Počet mřížových bodů, které jsou na hranici n-úhelníku, ale nejsou jeho vrcholy, je $B-n$. Součet odpovídajících úhlů viditelnosti je proto $(B-n)\pi$. Součet všech úhlů viditelnosti náležejících všem B mřížovým bodům na hranici mnohoúhelníku (jak vrcholům, tak bodům, které nejsou vrcholy mnohoúhelníku), je tudíž

$$(B-n)\pi + (n-2)\pi = (B-2)\pi.$$

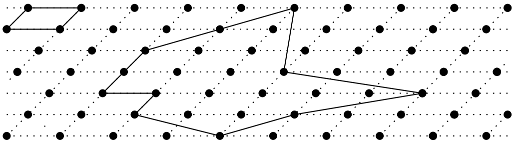
Odtud plyne, že

$$S = W(M) = I + \frac{(B-2)\pi}{2\pi} = I + \frac{B}{2} - 1. \qquad \square$$

G. A. Pick formuloval v práci [13] svůj vzorec v obecnější podobě. Místo pravoúhlé sítě mřížových bodů uvažoval síť tvořenou kosodélníky (viz obrázek 5). Je-li obsah jednoho kosodélníku roven S_k, pak pro obsah jednoduchého mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech kosodélníkové sítě platí

$$S = S_k\left(I + \frac{B}{2} - 1\right).$$

Toto tvrzení je snadným důsledkem věty 1 (viz též článek [7]).



Obr. 5. Kosodélníková síť se zakresleným mnohoúhelníkem

2. Zobecnění Pickova vzorce pro rozmanitější tvary

Při zobecňování Pickova vzorce budeme uvažovat obecný mnohoúhelník M, který má vrcholy v mřížových bodech. Mnohoúhelník může obsahovat díry a jeho hranice může protínat sama sebe, ale pouze v mřížových bodech. Jediné, co požadujeme, je, aby mnohoúhelník byl sjednocením konečného počtu trojúhelníků, které mají vrcholy v mřížových bodech. Následující věta představuje zobecnění Pickova vzorce pro takovéto mnohoúhelníky. Vzorec dokázali H. Hadwiger a J. M. Wills v článku [6].

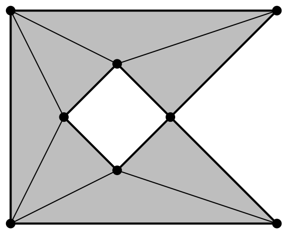
Věta 2 (**zobecněný Pickův vzorec**). *Buď M mnohoúhelník, který je sjednocením konečného počtu trojúhelníků s vrcholy v mřížových bodech. Pak je jeho obsah roven*

$$S = V - \frac{H}{2} - \chi,$$

kde V je počet všech mřížových bodů uvnitř a na hranici mnohoúhelníku, H je počet jeho hraničních úseků (tj. spojnic mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku) a χ je jeho Eulerova charakteristika.

K výpočtu *Eulerovy charakteristiky mnohoúhelníku* je potřeba najít jeho triangulaci, tj. rozklad na trojúhelníky tak, že žádný z vrcholů nějakého z trojúhelníků neleží na straně jiného trojúhelníku (příklad triangulace je na obrázku 6). Určíme počet vrcholů V_t v triangulaci, počet stran trojúhelníků H_t a počet trojúhelníků, neboli vnitřních stěn S_t, které patří do triangulace mnohoúhelníku. Eulerova charakteristika je pak definována vztahem

$$\chi = V_t - H_t + S_t.$$

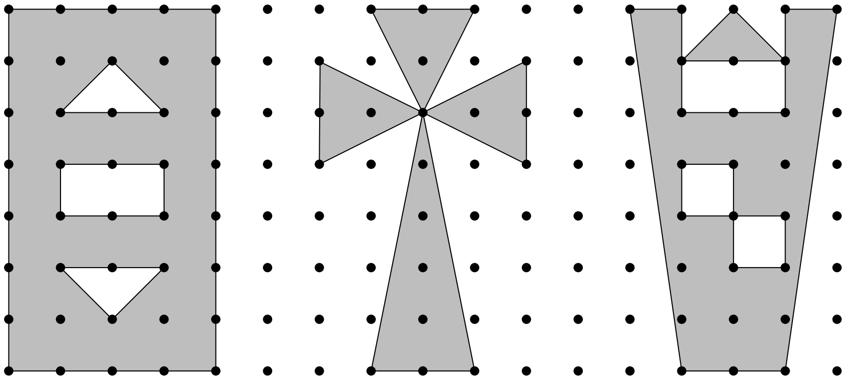


Obr. 6. Triangulace mnohoúhelníku a jeho Eulerova charakteristika

Lze ukázat, že Eulerova charakteristika nezávisí na volbě konkrétní triangulace. Pro jednoduchý mnohoúhelník vychází Eulerova charakteristika $\chi = 1$. Použijeme-li ještě označení z kapitoly 1, pak $V = I + B$ a $H = B$. Odtud je vidět, že věta 1 je speciálním případem věty 2.

Než dokážeme větu 2, ověřme ji pro případ mnohoúhelníku s m oddělenými dírami, které jsou samy o sobě jednoduché mnohoúhelníky. Eulerova charakteristika je pro takový mnohoúhelník rovna $\chi = 1 - m$. Například vlevo na obrázku 7 je mnohoúhelník se třemi oddělenými dírami, tj. $m = 3$ a jeho Eulerova charakteristika $\chi = -2$.

K ověření zobecněného Pickova vzorce z věty 2 použijeme pro mnohoúhelník s m dírami princip z důkazu věty 1; budeme přitom vycházet z článku [16]. Označme $B_0, B_1, \dots, B_m$ počty mřížových bodů na vnější hranici a na hranicích jednotlivých m děr. Celkový počet mřížových bodů na hranici je pak $B_0 + B_1 + \dots + B_m = B$ a počet hraničních úseků je roven počtu mřížových bodů na hranici mnohoúhelníku, tj. $H = B$. Pro celkový počet mřížových bodů pak zřejmě platí $V = I + B = I + H$. Dále si stačí uvědomit, že součet úhlů viditelnosti pro vrcholy nacházející se na hranici k-té díry je roven $(B_k + 2)\pi$, zatímco na vnější hranici činí $(B_0 - 2)\pi$. Z předchozí kapitoly víme, že obsah mnohoúhelníku získáme jako součet všech úhlů viditelnosti dělený 2π, tj.



$V = 40$	$V = 20$	$V = 26$
$H = 36$	$H = 16$	$H = 24$
$\chi = -2$	$\chi = 1$	$\chi = -2$
$S = 40 - \frac{1}{2} \cdot 36 + 2$	$S = 20 - \frac{1}{2} \cdot 16 - 1$	$S = 26 - \frac{1}{2} \cdot 24 + 2$

Obr. 7. Příklady nejednoduchých mnohoúhelníků (převzato z [16])

$$\begin{aligned} S &= I + \frac{(B_0 - 2)}{2} + \frac{(B_1 + 2)}{2} + \dots + \frac{(B_m + 2)}{2} \\ &= I + \frac{1}{2}(B_0 + B_1 + \dots + B_m) + (m - 1) \\ &= I + \frac{B}{2} - \chi = V - \frac{H}{2} - \chi. \end{aligned}$$

Postup s využitím úhlů viditelnosti již bohužel nebude fungovat pro mnohoúhelník uprostřed a vpravo na obrázku 7, u nichž hranice protíná sama sebe a počet vrcholů na hranici již neodpovídá počtu hraničních úseků, tj. $B \neq H$. Zde jsme již nuceni ke klasickému použití elementárních trojúhelníků.

Důkaz věty 2. Předpokládejme, že obecný mnohoúhelník M, jehož obsah nás zajímá, je rozdělen na elementární trojúhelníky, tj. máme nějakou jeho elementární triangulaci s vrcholy v mřížových bodech. Označme V_t, H_t a S_t počet vrcholů, stran a trojúhelníků v této triangulaci. Každý trojúhelník má 3 strany a každá ze stran náleží dvěma trojúhelníkům kromě stran, které jsou na okraji mnohoúhelníku M. Proto platí

$$3S_t = 2H_t - H,$$

odkud po úpravě plyne

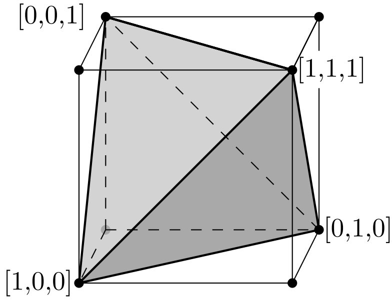
$$S_t = -H + 2H_t - 2S_t = -H + 2V_t - 2(V_t - H_t + S_t) = 2V_t - H - 2\chi.$$

Každý elementární trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$ a triangulace je elementární, takže počet vrcholů triangulace V_t odpovídá počtu mřížových bodů mnohoúhelníku. Dostáváme tedy požadovaný vztah pro obsah mnohoúhelníku

$$S = \frac{1}{2}S_t = V - \frac{H}{2} - \chi. \qquad \square$$

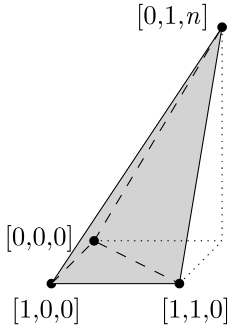
3. Rozšíření do prostoru

Mohli bychom očekávat, že existuje varianta Pickova vzorce pro mnohostěny v prostoru. Avšak tak jednoduché to není. V trojrozměrném prostoru lehce najdeme mnohostěny, jejichž vrcholy leží v mřížových bodech a které mají stejný počet mřížových bodů uvnitř a na hranici mnohostěnu, ale jejichž objem je různý.



Obr. 8. Čtyřstěn vepsaný do krychle

Obrázek 8 (převzatý z knihy [8]) ukazuje jednotkovou krychli rozdělenou na pět čtyřstěnů. Všechny stěny vnitřního čtyřstěnu s vrcholy $[0,0,1]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ a $[1,1,1]$ jsou rovnostranné trojúhelníky, je tedy pravidelný. Tři stěny čtyř vnějších čtyřstěnů pak jsou pravoúhlé trojúhelníky a jedna je rovnostranný trojúhelník. Všechny čtyřstěny mají čtyři mřížové body na své hranici a žádné vnitřní mřížové body. Pokud by existoval nějaký jednoduchý vzorec, který by využíval pouze počet mřížových bodů k určení objemu mnohostěnu v prostoru, měly by všechny tyto čtyřstěny stejný objem. Pokud použijeme vzorec pro objem čtyřstěnu, tj. obsah podstavy krát jedna třetina výšky, zjistíme, že každý ze čtyř vnějších čtyřstěnů má objem $\frac{1}{6}$. Protože ale celá jednotková krychle má objem 1, musí být objem vnitřního pravidelného čtyřstěnu $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.



Obr. 9. Objem čtyřstěnu závisí na volbě n

Další ilustrace (obrázek 9 převzatý z [14]) také ukazuje, proč neexistuje jednoduchá analogie Pickova vzorce v prostoru. Uvažujme čtyřstěn, jehož jednu stěnu tvoří trojúhelník s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,0,0]$ a $[1,1,0]$ a jehož čtvrtý vrchol je v bodě $[0,1,n]$, kde

$n \in \mathbb{N}$. Tento čtyřstěn jistě pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ neobsahuje žádné další mřížové body, jeho objem je však $\frac{1}{6}n$.

J. E. Reeve [15] objevil analogii Pickova vzorce v trojrozměrném prostoru s využitím tzv. půlmřížových bodů, tj. bodů $[a, b, c]$ takových, že $2a$, $2b$, $2c \in \mathbb{Z}$. Reeve dokázal určit objem mnohostěnu, jehož vrcholy jsou mřížové body, pomocí počtu mřížových a půlmřížových bodů uvnitř a na hranici mnohostěnu.

Další informace k tomuto tématu lze najít např. v článku [7].

4. Rozměňování peněz

V této části ukážeme použití Pickova vzorce k řešení úloh o rozměňování peněz, které na první pohled nemají geometrickou povahu. Vycházíme z knihy [8], kde jsou řešeny podobné úlohy o rozměňování dolarů na čtvrťáky, deseticenty a pěticenty.

Příklad 2. Kolika způsoby lze rozměnit stokorunu na dvacetikoruny, desetikoruny a pětikoruny?

Pro první řešení zvolíme nejpřímější postup, a to vypsání všech možných kombinací dvacetikorun, desetikorun a pětikorun. Budeme tedy vypisovat trojice počtů jednotlivých mincí (p_{20}, p_{10}, p_5) tak, aby splňovaly rovnici

$$20p_{20} + 10p_{10} + 5p_5 = 100.$$

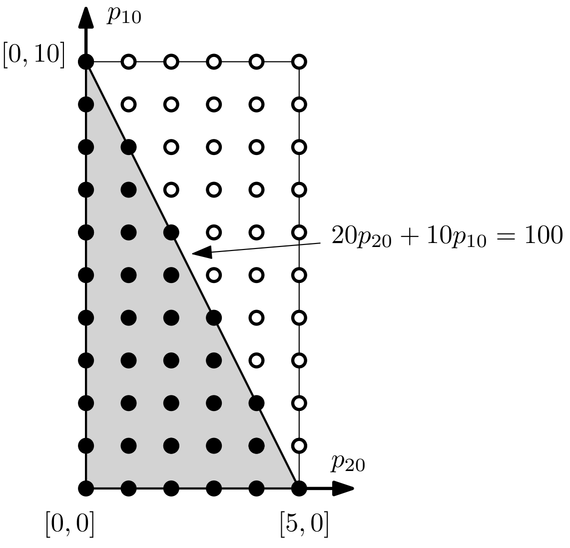
$p_{10} = 10$	$(0, 10, 0)$					
$p_{10} = 9$	$(0, 9, 2)$					
$p_{10} = 8$	$(0, 8, 4)$	$(1, 8, 0)$				
$p_{10} = 7$	$(0, 7, 6)$	$(1, 7, 2)$				
$p_{10} = 6$	$(0, 6, 8)$	$(1, 6, 4)$	$(2, 6, 0)$			
$p_{10} = 5$	$(0, 5, 10)$	$(1, 5, 6)$	$(2, 5, 2)$			
$p_{10} = 4$	$(0, 4, 12)$	$(1, 4, 8)$	$(2, 4, 4)$	$(3, 4, 0)$		
$p_{10} = 3$	$(0, 3, 14)$	$(1, 3, 10)$	$(2, 3, 6)$	$(3, 3, 2)$		
$p_{10} = 2$	$(0, 2, 16)$	$(1, 2, 12)$	$(2, 2, 8)$	$(3, 2, 4)$	$(4, 2, 0)$	
$p_{10} = 1$	$(0, 1, 18)$	$(1, 1, 14)$	$(2, 1, 10)$	$(3, 1, 6)$	$(4, 1, 2)$	
$p_{10} = 0$	$(0, 0, 20)$	$(1, 0, 16)$	$(2, 0, 12)$	$(3, 0, 8)$	$(4, 0, 4)$	$(5, 0, 0)$
	$p_{20} = 0$	$p_{20} = 1$	$p_{20} = 3$	$p_{20} = 3$	$p_{20} = 4$	$p_{20} = 5$

Tímto systematickým výčtem všech variant zjistíme, že existuje 36 možností, jak rozměnit stokorunu.

Ve druhém způsobu řešení budeme počítat body uvnitř trojúhelníku. Pokud vybereme počet dvacetikorun a desetikorun v rozměnění stokoruny, bude už jednoznačně určen počet pětikorun potřebných k tomu, aby součet hodnot mincí byl sto korun. V úloze tedy vlastně hledáme počet dvojic nezáporných celých čísel (p_{20}, p_{10}) tak, aby

$$20p_{20} + 10p_{10} \leq 100.$$

Počet takových dvojic se však shoduje s počtem mřížových bodů v trojúhelníku vyznačeném na obrázku 10. Každý mřížový bod v trojúhelníku odpovídá nějaké možnosti rozměnění stokoruny. Například bod $[1, 4]$ odpovídá jedné dvacetikoruně, čtyřem desetikorunám a osmi pětikorunám. Pokud spočteme body vyznačené na obrázku,



Obr. 10. Trojúhelník s naznačenými mřížovými body

dostaneme 36, což, jak už víme, je počet možných rozměnění stokoruny na dvacetikoruny, desetikoruny a pětikoruny. Pro tento malý trojúhelník nebylo těžké mřížové body spočítat podle obrázku. Mohli bychom ale k tomuto účelu lehce použít Pickův vzorec, jak to uděláme v příkladu 3. Při jeho řešení budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 3. *Na úsečce spojující mřížové body* $[a_1, b_1]$ *a* $[a_2, b_2]$ *je*

$$NSD(|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|) + 1$$

mřížových bodů, kde $NSD(k, l)$ *značí největšího společného dělitele čísel* k *a* l.

Důkaz. Úsečka s krajními body $[a_1, b_1]$ a $[a_2, b_2]$ má směrový vektor $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$. Body této úsečky mají souřadnice

$$[a_1, b_1] + \lambda(a_2 - a_1, b_2 - b_1), \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle.$$

Mřížovými body jsou ty z nich, pro které jsou oba násobky $\lambda(a_2 - a_1)$ i $\lambda(b_2 - b_1)$ celá čísla. Označíme-li $d = NSD(|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|)$, pak vhodné hodnoty λ budou

$$0 = \frac{0}{d}, \quad \frac{1}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{d-1}{d}, \quad \frac{d}{d} = 1,$$

tj. jejich počet je $d + 1$. □

Příklad 3. Kolika způsoby lze rozměnit n stokorun na dvacetikoruny, desetikoruny a pětikoruny?

Po zkušenostech z předchozí úlohy už víme, že stačí najít počet celočíselných nezáporných řešení rovnice

$$20p_{20} + 10p_{10} + 5p_5 = 100n,$$

kde p_{20} je počet dvacetikorun, p_{10} počet desetikorun a p_5 pětikorun. Celou rovnici můžeme vydělit pěti a dostaneme

$$4p_{20} + 2p_{10} + p_5 = 20n.$$

Pokud zvolíme p_{20} a p_{10}, bude již p_5 jednoznačně určeno, proto nám stačí hledat hodnoty p_{20} a p_{10} splňující

$$4p_{20} + 2p_{10} \leq 20n, \quad p_{20} \geq 0, \quad p_{10} \geq 0.$$

Tyto tři nerovnosti určují trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[5n, 0]$ a $[0, 10n]$. Každý mřížový bod tohoto trojúhelníku pak odpovídá jedné z možných kombinací dvacetikorun, desetikorun a pětikorun v rozměnění n stokorun. K určení počtu mřížových bodů v trojúhelníku využijeme Pickův vzorec. Obsah trojúhelníku je $S = \frac{1}{2} \cdot 50n^2$. Na obvodu je $5n + 10n + NSD(5n, 10n)$ mřížových bodů, protože na stranách trojúhelníku je postupně $5n+1$, $10n+1$ a $NSD(5n, 10n)+1$ bodů (viz pomocné lemma 3); od součtu těchto tří čísel musíme odečíst tři, neboť všechny vrcholy trojúhelníku jsme započítali dvakrát. Největší společný dělitel čísel $5n$ a $10n$ je $5n$, proto je počet bodů na obvodu trojúhelníku $B = 20n$. Pickův vzorec dává $25n^2 = I + \frac{1}{2} \cdot 20n - 1$, tedy uvnitř máme $I = 25n^2 - 10n + 1$ mřížových bodů. Celkový počet mřížových bodů v trojúhelníku je pak $I + B = 25n^2 + 10n + 1 = (5n + 1)^2$, což je počet všech možností, jak rozměnit n stokorun na dvacetikoruny, desetikoruny a pětikoruny.

V úlohách o rozměňování peněz by se dalo pokračovat. Předchozí postup bude fungovat, i když zvolíme jiný obnos a jiné tři druhy mincí, pomocí kterých rozměňujeme. Co kdybychom přidali čtvrtý typ mince? Tím se dostaneme od problému, který lze řešit převedením na počítání mřížových bodů v rovině, k problému, který lze převést na hledání počtu mřížových bodů v prostoru. Příklad takové úlohy (včetně řešení) lze najít v knize [8]: Kolika způsoby lze rozměnit dolar na čtvrťáky, deseticenty, péticenty a centy? V této knize je také odvozen obecný vzorec pro počet možností, jak složit nějakou částku ze tří druhů mincí.

5. Závěr

Pickův vzorec souvisí i s dalšími oblastmi matematiky, například s Eulerovým vzorcem pro rovinné grafy (viz [5], [8]) nebo Minkowského větou pro mřížové body (viz [1], [14]). Další směr, kterým bychom se mohli ubírat, je souvislost Pickova vzorce s Fareyovými posloupnostmi a Sternovým–Brocotovým stromem v teorii čísel (viz [2], [3], [12]). Některá z těchto témat jsou zmíněna v práci [4], ze které tento článek vychází. Tam lze najít i alternativní důkazy Pickova vzorce. Řada příkladů souvisejících s Pickovým vzorcem je také obsažena v knize [8].

Poděkování. Autorka děkuje za cenné připomínky doc. Antonínu Slavíkovi a dvěma anonymním recenzentům.

L i t e r a t u r a

[1] Bensimon, I.: *Minkowski's convex body theorem.* Project for MA341: Appreciation of Number Theory, Boston University, 2009. Dostupné z: `http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/Minkow.pdf`

[2] Bogomolny, A.: *Pick's theorem.* Dostupné z: `http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick.shtml`

[3] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to geometry.* John Wiley, New York, 1989.

[4] Dostálová-Holíková, M.: *Pickova věta.* Závěrečná práce, MFF UK, 2013. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/czv/pickova_veta.pdf`

[5] Funkenbusch, W. W.: *From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem.* Amer. Math. Monthly *81* (1974), 647–648.

[6] Hadwiger, H., Wills, J. M.: *Neuere Studien über Gitterpolygone.* J. Reine Angew. Math. *28* (1976), 61–69.

[7] Iseri, H.: *An exploration of Pick's theorem in space.* Math. Mag. *81* (2008), 106–115.

[8] Michael, T. S.: *How to guard an art gallery and other discrete mathematical adventures.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2009.

[9] Montgomery, H.: *A timely problem.* Math. Mag. 85 (2012), 220.

[10] Netuka, I.: *Georg Pick – pražský matematický kolega Alberta Einsteina.* PMFA 44 (1999), 227–232.

[11] Ostermann, A., Wanner, G.: *Geometry by its history.* Springer, Heidelberg, 2012.

[12] Pavlíková, P.: *O Fareyových zlomcích.* PMFA *55* (2010), 97–110.

[13] Pick, G. A.: *Geometrisches zur Zahlenlehre.* Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen *19* (1899), 311–319.

[14] Ram Murty, M., Nithum Thain: *Pick's theorem via Minkowski's theorem.* Amer. Math. Monthly *114* (2007), 732–736.

[15] Reeve, J. E.: *On the volume of lattice polyhedra.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) *7* (1957), 378–395.

[16] Varberg, D. E.: *Pick's theorem revisited.* Amer. Math. Monthly *92* (1985), 584–587.