

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Rudolf Dvořák

Pražské období Ernsta Macha a jeho práce z oblasti akustiky a dynamiky plynů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 4, 295–311

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/145977>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Pražské období Ernsta Macha a jeho práce z oblasti akustiky a dynamiky plynů

Rudolf Dvořák, Praha

Abstrakt. ERNST MACH (1838–1916) se stal v roce 1867 profesorem fyziky na pražské, tehdejší c. k. Karlo–Ferdinandově, univerzitě a v Praze pak prožil plných 28 let. V Praze vznikla většina jeho stěžejních prací z fyziky a krystalizovaly zde i jeho filozofické názory. Byla zde napsána *Mechanika* — kniha, která byla prvním kritickým rozbohem Newtonovy mechaniky a významně ovlivnila i Alberta Einsteina v období jeho prací na teorii relativity, stejně tak jako řada prací z akustiky (např. práce o Dopplerově jevu nebo práce o šíření zvukových a slabých rázových vln). Především ale zde vznikly práce z dynamiky plynů, které poprvé ukázaly světu rázovou vlnu a systém rázových vln při supersonickém obtékání těles.

Úvod

Ernst Mach byl 11. března 1867, ve svých 29 letech, jmenován císařem Františkem Josefem profesorem fyziky na c. k. Karlo–Ferdinandově univerzitě v Praze [28].

Svá univerzitní studia ukončil v roce 1860 — ve svých dvaadvaceti letech — obhajobou doktorské disertační práce o elektrických výbojích s názvem *Über elektrische Entladung und Induktion* (O elektrickém výboji a indukci). Do povědomí vědeckého světa vstoupil ještě v témže roce svou původní prací *Über die Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegung* (O změně tónu a barvy v důsledku pohybu) [4], především však svou věcnou kritikou některých Petzvalových článků o Dopplerově efektu. Petzval byl již tehdy označován za „nejvyššího učence Vídně“ a jeho kritické články vycházely po osm let ve zprávách vídeňské akademie věd, takže k Machovu kritickému vystoupení byl zapotřebí i velký kus osobní odvahy (a jak sám později přiznal) i trochu mladické domýšlivosti a možná i drzosti a nedostatku respektu k autoritám. Vstoupil tím ale rovnou do světa skutečné vědy. Navíc ho tyto práce přivedly k detailnímu studiu řady otázek akustiky a mechaniky, které později zúročil a rozpracoval během svého pražského působení.

Bezprostředně po ukončení studií nastoupil Mach na vídeňské univerzitě jako asistent a začal zde přednášet *Fyziku pro mediky* a *Fyziologickou fyziku*. To byl tehdy ve Vídni téměř módní a vysoce hodnocený vědní obor a Machovi to umožnilo, aby se již o rok později, tj. ve svých 23 letech, habilitoval jako soukromý docent. U Macha to ale nebyla jen úlitba módě, ale skutečný a hluboký zájem jak o fyziku, tak o fyziologii a psychologii. Na těchto přednáškách začal krystalizovat i jeho pozdější přístup k výkladu fyziky — především mechaniky, termodynamiky a optiky. Mach vycítil, že mediky nelze zatěžovat detailními fyzikálními poznatky, ale že daleko více potřebují

Ing. RUDOLF DVOŘÁK, DrSc., Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Dolejškova 5, 18200 Praha 8, e-mail: rudvorak@gmail.com

kritický, popř. historicko-kritický, výklad základních fyzikálních principů, který by jim umožnil fundovaný přístup k ostatním přírodovědným i technickým poznatkům. Na základě těchto přednášek pak vydal v roce 1863 svou první knižní publikaci, a to *Compendium der Physik für Mediziner* (Kompedium fyziky pro studující medicíny) [5], v níž se mu podařilo na 274 stranách jasně a srozumitelně shrnout do té doby nejvýznamnější známé poznatky fyziky.

Plat asistenta nebyl nijak vysoký, a Mach si proto přivydělával dvojím způsobem. Soukromě vyučoval hudební teorii a pro širší veřejnost uskutečnil řadu populárně vědeckých přednášek o optice, akustice a psychologii.

Kromě své přednáškové činnosti se ale zabýval i vlastní vědeckou prací. V prvních letech to byla především fyziologická akustika, a to zejména Helmholtzova teorie vnímání tónů, fyziologická optika a psychologické studie reakcí lidského organismu na intenzitu a charakter vnějších podnětů. Svou náplní spadá tato činnost do fyziologie smyslů, označované tehdy jako psychofyzika. V první polovině devatenáctého století byl tento obor v popředí zájmů řady „renesančních“ vědců zvučných jmen, mezi jinými např. HERMANNA VON HELMHOLTZE (1821–1894), a nutno říci, že Machovy práce si svou úrovní s jejich pracemi nikterak nezažaly. Do roku 1867 opublikoval Mach podobných prací 13 a jejich ohlas byl takový, že mu bylo již v roce 1864, tj. v jeho 26 letech, nabídnuto místo profesora fyziologie na univerzitě v Salzburgu. Tuto nabídku ale předešla nabídka jmenování řádným profesorem matematiky na univerzitě ve Štýrském Hradci (Graz), kterou Mach přijal, přestože se chtěl věnovat fyzice — především fyzice experimentální. Tento jeho zájem se brzy naplnil a již v roce 1866 byl jmenován na téže univerzitě profesorem fyziky.

Ve stejném roce se Ernst Mach ve Štýrském Hradci i oženil s mladičkou LUISE MARUSSIG (1845–1919), která ho pak provázela celým životem. Zde se také seznámil s ekonomem EMANUELEM HERRMANNEM (1839–1902), který výrazně ovlivnil jeho další názírání na společenskou funkci vědy. Od něj si též vypůjčil termín ekonomické povahy fyzikálního výzkumu a řadu základních myšlenek svých pozdějších filozofických úvah. Spokojen zde však nebyl. Štýrský Hradec byl pro něj příliš provinčním městem a ani jeho práce nebyla oceněna tak, aby zde mohl uspokojivě uživit svoji rodinu. Kromě Vídně, kde žádné volné místo nebylo, to byla v tehdejší rakousko-uherské mocnářství už jen Praha, která mohla nabídnout Machovi nejen atraktivní místo, ale i vyšší životní úroveň a dobré tvůrčí a kulturní prostředí. Po neúspěšném pokusu získat profesuru fyziky na pražské polytechnice přijal v roce 1867 nabídku na místo profesora fyziky na pražské univerzitě [28]. Tady začalo nejplodnější období jeho života.

Pražské období

Výuka fyziky na pražské univerzitě byla v polovině devatenáctého století zaměřena převážně na potřeby budoucích středoškolských učitelů fyziky a na posluchače medicíny a farmacie, tj. spíše na obecnou a experimentální fyziku. Teoretickou fyziku a analytickou mechaniku v té době přednášeli profesori matematiky.

Machův příchod znamenal od samého počátku pro univerzitu významnou změnu. Jeho přednášky z fyziky byly doplněny semináři, na nichž se prostřednictvím referátů probíraly nejnovější poznatky z fyziky, a semináři o metodice vědecké práce ve fyzice pro pokročilé studenty. Posluchači tak poprvé získali přístup ke skutečnému expe-

rimentu ve fyzice. Machovi se rovněž podařilo získat mechanika-všeuměla Františka Hájka [27], s nímž nejen navrhl řadu přístrojů a demonstračních pomůcek, ale i sám se vlastněma rukama podílel na jejich výrobě (viz též [28]). Nezapomeňme, že se v mládí vyučil i uměleckým truhlářem [2].

Vynikající Machovy přednášky i praktika se staly brzy populární nejen u studentů, ale i mezi širší veřejností. Pod jeho vedením začala i příprava doktorandů (byli přijati dokonce i dva doktorandi z jiných univerzit, což nebylo v té době běžné) a řešení zcela nových problémů zejména v oblasti mechaniky tekutin, optiky a akustiky (viz též [28]). Z této skupiny a z asistentů, kteří se u Macha vystřídali, vzešla řada pozdějších vysokoškolských profesorů (např. AUGUSTIN SEYDLER (1849–1891), FRANTIŠEK KOLÁČEK (1851–1913), GUSTAV GRUSS (1854–1922), KAREL DOMALÍP (1846–1909), OTTO TUMLIRZ (TUMLÍŘ) (1856–1928), VINCENC DVOŘÁK (1848–1922)) i pozdější Machův nástupce ČENĚK STROUHAL (1850–1922). Podařilo se mu rovněž vytvořit se širokým okruhem spolupracovníků celou řadu učebnic fyziky (např. *Grundriss der Naturlehre für die untere Classen der Mittelschulen* (Základy přírodních věd pro nižší třídy středních škol) [13], *Grundriss der Physik für die höheren Schulen des Deutschen Reiches* (Přehled fyziky pro vyšší školy německé říše) [14], které doznaly až dvaceti vydání a používaly se téměř 40 let na gymnáziích v Rakousku a Německu, a návody k laboratorním pokusům *Optisch-akustische Versuche* (Opticko-akustické pokusy [7])).

V Praze působil Ernst Mach plných 28 let, od roku 1867 do roku 1895. Veškerou svou energii věnoval univerzitě. Stal se brzy nejen uznávaným pedagogem a vědcem, ale v roce 1873 byl zvolen i děkanem přírodovědecké fakulty, a v letech 1879–1880 dokonce i rektorem Karlo-Ferdinandovy univerzity. Především jeho zásluhou byly staré, nevyhovující prostory Fyzikálního ústavu v Karolinu nahrazeny v roce 1879 nově postavenou budovou ve Viničné ulici.

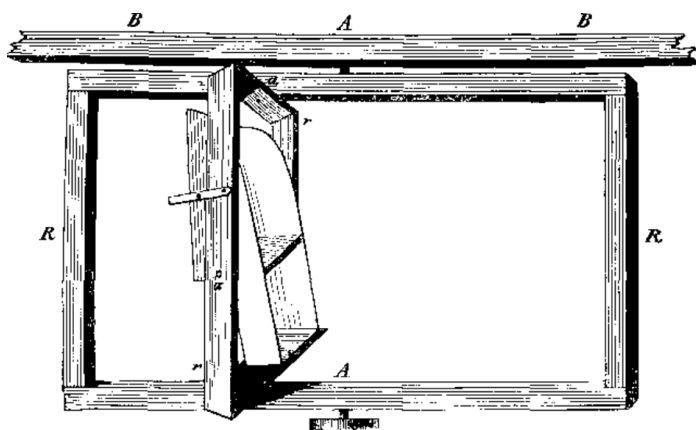
Nebyla to však léta nějak idylická, jak by se snad mohlo zdát. Ve stejném roce, v kterém nastupoval Mach na pražskou univerzitu, došlo v Rakousku k tzv. vyrovnání, které v tomto mnohonárodnostním státě povýšilo jen jednu národnost, a to maďarskou, nad ostatní nerakouské národnosti. Z Rakouska se tak stalo Rakousko-Uhersko, což vyvolalo v českých zemích silné nacionalistické hnutí. Mach sám byl typickým občanem Rakouska-Uherska, pocházel z převážně německy mluvící rodiny, většinu svého mládí prožil v německy mluvícím prostředí u Vídně a jeho manželka mluvila pouze německy. Z dob svého mládí znal i češtinu, dokonce v době svého nástupu na univerzitu vyslovil ochotu i česky přednášet. K tomu ale nikdy nedošlo, i když češtinu neváhal použít ve styku se svými českými žáky, popř. českými asistenty. Profesor Koláček kdysi o něm řekl: „Tak jak se ze mne mohl málem stát vlivem německých škol Němec, tak mohl Mach za určitých okolností snadno vyrůst v českého fyzika.“ Brněnský fyzik a Machův žák, prof. Vladimír Novák, vzpomíná ve svých *Vzpomínkách a pamětech* [26] nejen na vynikající Machovy přednášky doplněné krásnými pokusy, které Mach sám s velkou zručností připravoval, ale také na to, jak spolu česky rozprávěli, a to i při jeho pozdějších návštěvách u Macha ve Vídni. Nacionalismus v jakémkoli projevu Mach nesnášel. Sám říkal, že „mu nic není vzdálenější než nacionalistická zatvrzelost“.

Od poloviny devatenáctého století probíhaly v pražských intelektuálních kruzích a i na samotné univerzitě bojovné diskuse o rozdělení univerzity na samostatnou českou a německou část. V čele snah o prosazení českého jazyka ve vědecké práci a na univerzitě stál od svého návratu z Vratislavi Jan Evangelista Purkyně. Argumento-

valo se tím, že pražská univerzita byla založena Karlem IV jako centrum středověké vzdělanosti pro studenty střední Evropy — z Čech, Polska, Německa a Uher. Čechům byly dekretem kutnohorským dány 3 hlasy proti jednomu německému. Za Jiřího z Poděbrad se stala univerzitou utrakvistickou („pod obojí“) a není divu, že po prohrané bitvě na Bílé hoře byla předána jezuitům. V roce 1654 byla spojena s jezuitskou kolejí a dostala název Karlo–Ferdinandova univerzita. Přes vše dobré, co pro český jazyk jezuité udělali, byla univerzita sama považována mezi lidem za oporu germanizace v Čechách. Diskuse o jejím rozdělení na českou a německou část byly proto jen logickým důsledkem tehdejších nacionalistických snah. Mach, který byl v období vyvrcholení těchto diskusí rektorem univerzity (1879–1880), tyto snahy nepodporoval, naopak bojoval proti rozdělení univerzity, protože se obával, že z jedné nepřilíš bohaté univerzity vzniknou dvě univerzity chudé. K rozdělení univerzity přesto došlo. Výnosem císaře Františka Josefa I. z 11. dubna 1881 bylo doporučeno, aby „Karlo–Ferdinandova univerzita v Praze byla napříště uspořádána tak, aby v Praze existovala jedna univerzita s německým a jedna s českým jazykem vyučovacím a obě nadále užívaly jména Karlo–Ferdinandova“, a toto bylo posléze vládou 28. února 1882 schváleno. Mach se rozhodl pro nově vytvořenou německou větev univerzity. Stal se dokonce jejím prvním rektorem. Rozdělením univerzity se ovšem změnil okruh Machových nejbližších spolupracovníků a zúžil se i okruh jeho odborných zájmů. Svoji odbornou činnost začal Mach dělit hlavně mezi mechaniku, dynamiku plynů a filozofii přírodních věd.

Přes všechny tyto problémy bylo pražské působení Ernsta Macha nejplodnějším obdobím jeho života, obdivuhodným nejen pro šíři jeho odborných zájmů, ale především pro původnost jeho myšlenek a jejich vědecký přínos.

Práce prvních let jeho pražského působení, tj. období od 1867 do 1876, se týkaly hlavně mechaniky, optiky a fyziologie (např. všechny tři publikované práce z roku 1874 se zabývaly smyslem člověka pro rovnováhu a „mechanizmem středního ucha“). Mach v nich navazuje na své předchozí práce z fyziologie smyslů. Pro studium vnímání různých druhů pohybu sestrojil zvláštní stolič (obr. 1), která umožňovala rotaci kolem dvou kolmých os, podobnou dnešním тренаžerům pro astronauty. Na těchto experi-



Obr. 1. Stolič, která umožňovala rotaci kolem dvou kolmých os, jejíž pomocí studoval Mach způsob vnímání rotačního pohybu [8].



Obr. 2. Machovy proužky

mentech se mu podařilo poprvé ukázat, jakou funkci má labyrint vnitřního ucha a to, že rotační pohyb je lidským organizmem vnímán skrze úhlové zrychlení. Podobná studia dělal v Praze již od dvacátých let devatenáctého století Jan Evangelista Purkyně, který však nebyl s to najít správný zdroj tohoto vnímání.

Na některé Machovy práce, zejména o fyziologii oka, navázal v Praze Purkyněův nástupce Ewald Hering, který se mj. o Machových experimentech, týkajících se prostoro-vého vidění a zejména rozložení světelného dráždění sítnice, vyjádřil jako o nejlepších experimentech ve fyziologické optice, které kdy byly provedeny. Dodnes se v literatuře setkáváme s tzv. *Machovými proužky* (obr. 2). Jedná se o optický klam — lidské oko nevnímá proužek jako pouze jednu barvu, ale proužek se mu jeví vedle tmavší barvy světlejší a vedle světlejší barvy tmavší. Mach částečně shrnul a rozvinul své fyziologické výzkumy ve dvou knižních publikacích, z nichž obě byly zpracovány během jeho pražského působení, a to v *Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen* (Základy nauky o pocitech pohybu, 1875) [8] a v *Beiträge zur Analyse der Empfindungen* (Příspěvky k analýze pocitků, 1886) [12].

Přestože byl Mach profesorem experimentální fyziky, ve všech jeho pracích je patrné silné filozofické uvažování. Nejvíce se snad prolíná Mach-fyzik s Machem-filozofem ve svých pracích z mechaniky. Na rozdíl od prací z oblasti **akustiky, fyziologie, optiky a dynamiky plynů**, které se vesměs zabývaly novými, konkrétními problémy, práce v oblasti mechaniky se zaměřují na obecnější, fundamentálnější problematiku. Zejména práce *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit* (Historie a kořeny věty o zachování práce) [6] z roku 1872 je téměř Machovým programovým prohlášením. Píše zde např. „... zcela metafyzicky zacházíme s pojmy, u nichž jsme již zapomněli, jak se k nim vlastně dospělo. Abychom mohli stát oběma nohama pevně na zemi a vyvarovali se případných konfliktů se skutečností, musíme se pořád ohlížet zpět na cestu, po níž jsme přišli“. Toto pojetí mechaniky vyvrcholilo v knize *Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch dargestellt* (Mechanika jak se vyvíjela. Historicko-kritické pojednání), vydané poprvé v roce 1883 [11]. Ta obsahuje, kromě historicko-kritického zhodnocení základů mechaniky z hlediska Machovy filozofie empiriokriticizmu, i první důkladný a seriózní rozbor Newtonovy mechaniky, který významně ovlivnil řadu fyziků přelomu století — mezi nimi snad nejvíce Alberta Einsteina.

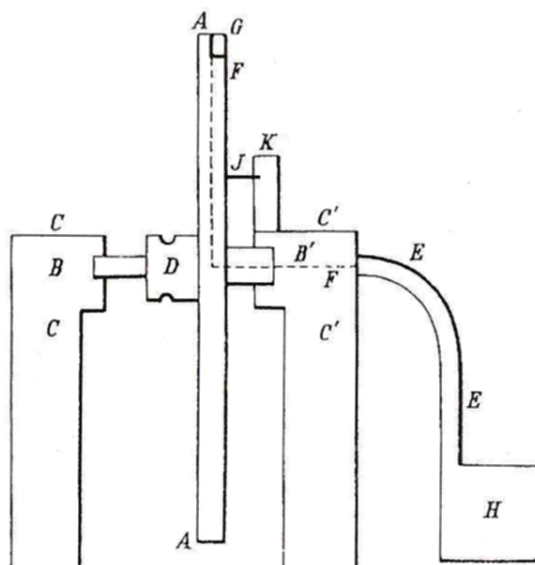
Ještě před svým odchodem do Vídně Mach stihl připravit k publikaci podobně pojatou Nauku o teple (*Die Prinzipien der Wärmelehre*) [15]. Odchodem do Vídně (v roce 1895) ovšem skončily jakékoli přímé práce Ernsta Macha v oblasti přírodních věd, zejména fyziky. Nová profesura ve Vídni mu ale umožnila věnovat se systematicky zobecnění jeho dosavadních poznatků z oblasti přírodních věd a zkušeností z metodologie vědecké práce a současně se plně věnovat shrnutí svých dosavadních prací zabývajících se filozofií přírodních věd.

Machovy práce z akustiky a dynamiky plynů

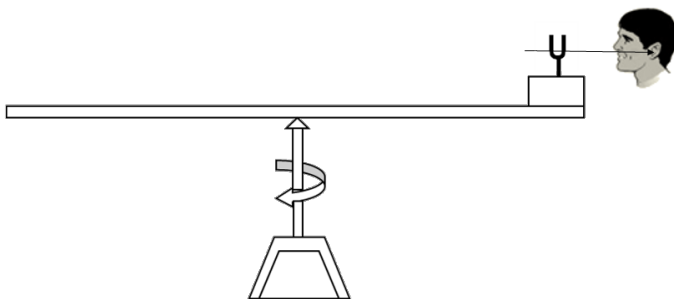
Až teprve v roce 1876 začínají Machovy práce z oblasti akustiky a na ně pak, zhruba od roku 1881, navazují jeho stěžejní experimentální práce z dynamiky plynů.

Práce týkající se akustiky a šíření akustických vln nejsou příliš známé, přestože přinesly řadu výsledků platných dodnes. Především však přivedly Macha k dalším pracím, které znamenaly jeho největší vědecký přínos, a to k pracím z oblasti dynamiky plynů, popř. balistiky, a ke zpracování důmyslných metod zviditelnování proudění a rychlostní fotografie. Akustika přesto zůstala v plné šíři Machovým celoživotním zájmem — od fyziologické akustiky až k šíření akustických vln a měření rychlosti zvuku. Pojem *Machovo číslo*, který vyjadřuje rychlost rychle letících objektů (letadel, raket, střel) jako násobek rychlosti zvuku, se dnes už stal zcela běžným pojmem i pro každého školáka.

Mach byl prvním, kdo dokázal odhadnout a ocenit význam tzv. *Dopplerova efektu*. CHRISTIAN DOPPLER (1803–1853) přišel v roce 1841 s principiálně novým poznatkem, který můžeme vyjádřit takto: pohybuje-li se zdroj vlnění (např. světelného, akustického) směrem k pozorovateli, pak je kmitočet přijímaného vlnění vyšší, zatímco při



Obr. 3. Přístroj, na němž Mach předváděl ve Vídni Dopplerův jev [4].

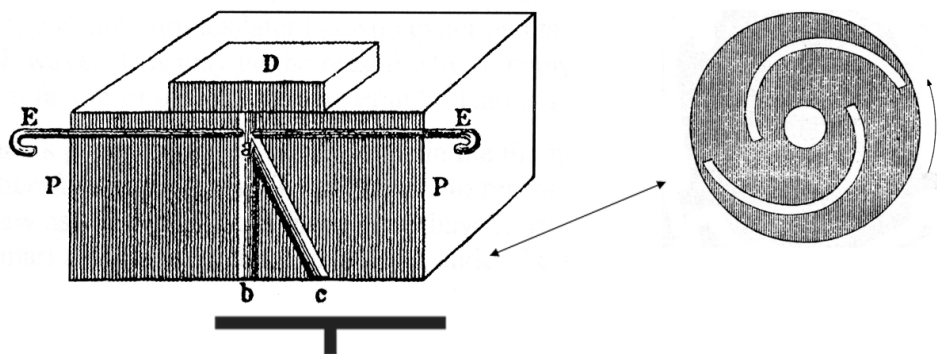


Obr. 4. Pomůcka k předvedení Dopplerova jevu, postavená v zahradě pražského Belvedéru v lednu 1878

pohybu zdroje směrem od pozorovatele je vnímaný kmitočet nižší. Tento poznatek je označován jako Dopplerův efekt.

Ve vědeckém světě nenašla ve své době tato myšlenka příliš pochopení, dokonce vídeňský profesor Petzval nebo estonský astronom Mäddler se postavili přímo proti ní. Mach ale ještě ve Vídni v roce 1860 sestrojil jednoduchý přístroj (obr. 3), kterým demonstroval správnost Dopplerovy teorie a obhájil ji proti jejím odpůrcům. Na původním obrázku z Machovy práce [4] je schéma přístroje. Tyč délky 1,8 m rotovala ve svislé rovině mezi ložisky C a C' . Na jejím konci byla umístěna píšťala F napájená vzduchem z nádrže H (čárkovaně je naznačen přívod vzduchu). Roztáčena byla manuálně pomocí kladky D a provázku. V ose otáčení pozorovatel neslyšel žádnou změnu tónu, v rovině otáčení byla při míjení konce s píšťalou změna tónu (a tedy i frekvence) patrná. V Praze pak Mach uskutečnil několik dalších experimentů [9]. Ten první proběhl v zahradě pražského Belvedéru v lednu 1878 s ladičkou umístěnou na 2,5 m dlouhém otočném rameni (obr. 4). V ose otáčení pozorovatel neslyšel žádnou změnu tónu, při míjení volného konce s ladičkou byla změna tónu (a tedy i frekvence) patrná. Druhou sérii pokusů provedl za účasti řady asistentů a profesorů pražské univerzity se dvěma drezínami na dvojkolejně trati na Plzeň. Na jedné byl zdroj zvuku (píšťala), na druhé pozorovatelé. Při souběžné jízdě nebyla změna tónu pozorována, kdežto při míjení ano, a to zcela ve shodě s Dopplerovou teorií. Tento experiment nebyl zcela původní, poprvé jej provedl již v roce 1845 v Holandsku Christoph Buys-Ballot, ale Machovi umožnil předvést vědecký poznatek i laické veřejnosti a získat v Praze určité renomé. Od studia Dopplerova efektu byl už jen malý krok k Machovým fundamentálním poznatkům o zdroji, pohybujícím se rychlostí větší, než je rychlost jím vysílaných vln, tj. k aerodynamice nadzvukových rychlostí. Tento krok ale trval téměř deset let.

Uvedená Machova práce [4] z roku 1860 je však významná ještě z jiného hlediska. Mach v ní upozorňuje na možné využití Dopplerova efektu v astronomii při určování rychlosti hvězd, event. vzdálených galaxií, z rozboru pozorovaných spekter, a stal se tak vlastně objevitelem spektrální astronomie. O své práci napsal ještě v říjnu 1860 Kirchhoffovi, který tyto výsledky s uznáním potvrdil. Poznamenejme jen, že tzv. rudý posuv (rudý proto, že s prodlužováním vlnové délky světla se spektrální čáry posunují k červenému kraji spektra) přivedl v roce 1929 amerického astronoma Hubblea k zá-



Obr. 5. Experimentální zařízení pro studium závislosti rychlosti šíření tlakové poruchy na délce kanálu. Kotouč s výřezy tvaru Archimedovy spirály poskytoval radiální značku dvakrát za otáčku [23]. Kotouč se roztáčel ručně pomocí kladky, délka časového intervalu byla kontrolována ladičkou.

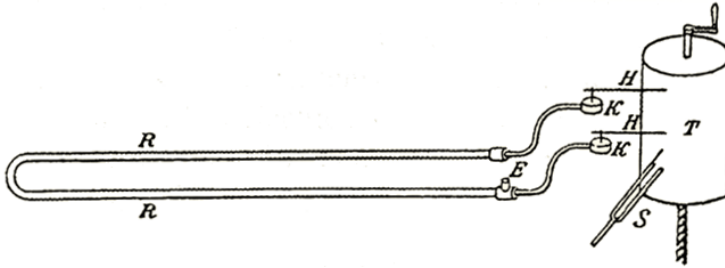
věru, že všechny galaxie se od nás vzdalují rychlostmi úměrnými jejich vzdálenosti od naší galaxie, a později k teorii rozpínání vesmíru.

Pracím z oblasti dynamiky plynů předcházela řada zajímavých experimentů týkajících se šíření akustických vln a rychlosti zvuku. Na zcela originálních modelech studoval Mach se svými asistenty šíření tlakové vlny vyvolané slabým elektrickým výbojem. Zjistil, že v počáteční fázi má tato vlna nesymetrický průběh se strmějším čelem a rychlost jejího šíření je větší než rychlost zvuku. Tuto rychlost nabude až po určité vzdálenosti. Např. Mach a Sommer v roce 1877 sledovali rychlost šíření tlakové vlny vyvolané slabou explozí [22]. Tyto vlny nazývali *Explosionschallwellen* a konstatovali, že rychlost jejich šíření závisí na intenzitě exploze a se vzdáleností od místa exploze klesá. Na základě těchto experimentů dospěl Mach k poznání, že charakter šířící se poruchy závisí na její intenzitě. Nejednalo-li se jen o slabé akustické poruchy, ale o vlnu konečné intenzity, dochází při jejím postupu k zestrmování jejího čela, tj. ke vzniku **rázové vlny**¹. Pro fyziku to byl objev skutečně nový, nikdo do té doby rázovou vlnu ani nespátřil, ani jakýmkoli způsobem nezaregistroval. Známé byly sice detonační vlny nebo třesk vznikající při výbojích, o jejich struktuře a šíření se však nevědělo nic. Přitom rázová vlna (dokonce i takto nazvaná) byla již v roce 1860 matematicky popsána Bernhardem Riemannem. K této práci měl ale Mach oprávněné výhrady, které odstranil až ve své disertaci jeho doktorand Otto Tumlirz [30].

Tyto experimenty jsou zajímavé ještě z jiného hlediska. Ukazují Macha jako nápaditého experimentátora, který dokázal jednoduchými prostředky dospět k pozoruhodným výsledkům. Na obr. 5 je příklad takového experimentu, jehož úkolem bylo zjistit, jak se mění rychlost, popř. charakter tlakové poruchy s délkou kanálu, kterým se porucha šíří [23].

V dřevěném bloku byly vyvrtány proti sobě dva otvory, do nichž byly zasunuty elektrody, které vytvořily výboj jako zdroj tlakové poruchy. Od místa výboje vychá-

¹Rázová vlna je průvodní jev přechodu z nadzvukového proudění na proudění podzvukové. Rychlost se v ní mění skokem, stejně tak jako hustota, tlak i teplota.



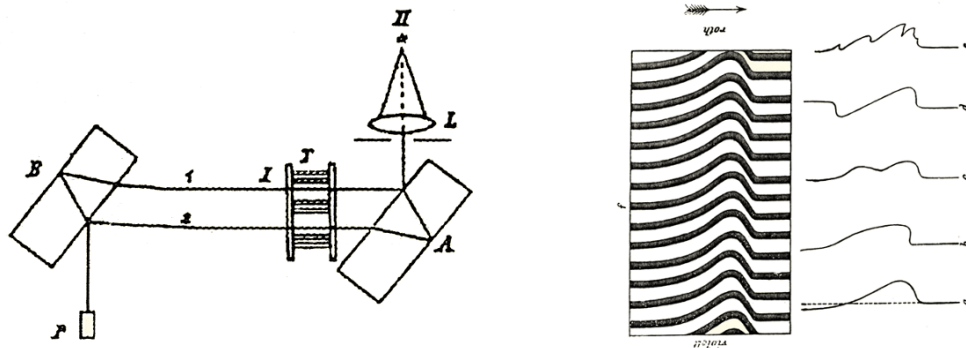
Obr. 6. Jiné zařízení pro studium závislosti rychlosti šíření tlakové poruchy generované v místě E na délce kanálu. Na začazeném povrchu válečku zanechají dopadající poruchy stopu, časový interval je vyhodnocován pomocí záznamu ladičky kmitající o známé frekvenci [29].

zely dva kanály různé délky, na jejichž ústí se zaznamenával čas průchodu poruchy kanálem. Časový rozdíl mezi okamžiky, kdy postupující porucha dosáhne ústí kanálů, je velmi malý a změření tak malých časových rozdílů nebylo v té době nijak snadné. Mach nedůvěřoval přesnosti komerčně dostupných přístrojů (Siemens a Halske) a rozhodl se pro dost netradiční řešení. Místo trvale běžící aparatury, která jen v určité době změří časovou odchylku, navrhl obrácený postup. Pod dřevěným blokem rotoval kotouč se začazeným povrchem. Do vysokých otáček byl přiveden mechanicky roztáčeným setrvačником a jeho otáčky byly kontrolovány ladičkou. Přesné časové značky dvakrát za otáčku byly získány pomocí radiální štěrbiny nad výřezy ve tvaru Archimedovy spirály [23] a umožnily tak přesné stanovení časového intervalu mezi stopami vln vycházejících z obou kanálů. Podobné měření provedl Machův asistent Tumlíř (Tumlrirz) na zařízení uvedeném na obr. 6, kde byl dopad poruch vystupujících z různě dlouhých kanálů registrován, spolu s časovou stopou z ladičky, na voskovém válečku [29].

V prvních experimentech byly akustické vlny sledovány pomocí stop na sazezi začazené desce. Na tuto metodu upozornil v roce 1874 na semináři o novinkách z oblasti experimentální fyziky VINCENC DVOŘÁK (1848–1922), Machův asistent. Metoda pochází od košického profesora KAROLA ANTOLIKA (1843–1905), který ji použil pro sledování vln generovaných elektrickými výboji a publikoval ji ve výroční zprávě košického gymnázia za rok 1873/74 (viz též [1]).

Při pokusech z roku 1877 Mach rovněž sledoval, jak se **vlny konečné amplitudy** odrážejí od stěn, popř. jak se navzájem ovlivňují. Podařilo se mu poprvé popsat a i uspokojivě objasnit, jak závisí odraz vln na jejich sklonu a intenzitě [10]. Dodnes se tzv. *neregulární odraz* ve tvaru písmene lambda (pro menší rychlosti a větší úhly odklonu proudu) nazývá *Machovým odrazem*.

Machovi bylo od samého začátku tohoto výzkumu jasné, že studium rázových vln není možné bez jejich **zviditelnění**. Jeho motto *Sehen heisst verstehen* plně odpovídá jeho empiriokritické filozofii. Mach mohl navázat na práce svého nástupce ve Štýrském Hradci, prof. AUGUSTA TOEPLERA (1836–1912), kterému se poprvé podařilo zviditelnit zvukové vlny (ve skutečnosti se jednalo o slabé rázové vlny). Jeho tzv. šlířová metoda byla původně vyvinuta Foucaultem v roce 1859 pro zjišťování šlíř (tj. nehomogenit indexu lomu) v optických sklech a Toepler ji poprvé použil v roce 1864 i pro vizualizaci vln v plynech. Mach ji pak v roce 1872 upravil pro potřeby optických



Obr. 7. Jaminův interferometr. Planparalelní deska E rozděluje světelný paprsek ze zdroje F na dva paprsky, z nichž jeden prochází měřícím prostorem (tj. oblastí, kde se mění nějak hustota ρ), druhý jde mimo. Další planparalelní deska A opět oba paprsky složí. Vzhledem k dráhovému posunu v obou větvích se nyní vytvoří interferenční proužky, patrné na sousedním obrázku, znázorňující tlakovou změnu v rázové vlně [24].

měření v dynamice plynů². Tzv. *stínovou metodu* vyvinul Machův asistent Vincenc Dvořák již při prvních experimentech v akustice, i když ji opublikoval až v roce 1880. Obě metody jsou založeny na zviditelnění změn hustoty vzduchu (tj. i indexu lomu) v rázových vlnách procházejícím světlem³.

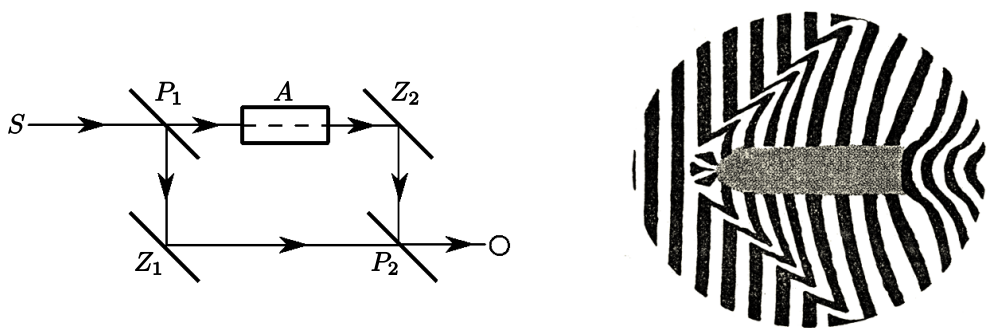
V roce 1876 se Mach a jeho asistent Rosický pokusili poprvé použít ke zviditelnění změn hustoty v plynech interferometr [24]. O dva roky později, v roce 1878, mohl již Mach, s využitím jiskrového generátoru a zpořádacího obvodu, poprvé užít *interferometrickou metodu* i pro zviditelnění struktury rázové vlny. V těchto experimentech byl ještě použit tzv. Jaminův interferometr (obr. 7). Interferometr, který se dnes zpravidla užívá v experimentální aerodynamice, vznikl až v roce 1891 podle návrhu Ludwiga Zehndera [31], mírně upraveném v roce 1892 synem Ernsta Macha Ludwigem Machem [25] (obr. 8).

Použití všech těchto vizualizačních metod nejen pro kvalitativní, ale i pro kvantitativní výzkum proudění (obtékání těles) při vysokých rychlostech byl v té době úkol nepředstavitelně složitý a vyžadoval nejen velmi dobrou představu o tom, co je k dosažení konečného výsledku zapotřebí, ale i dokonalou organizaci poměrně náročných prací.

Jako zdroje reprodukovatelných vln sloužily v prvních experimentech jednak exploze slabých drátků vyvolané elektrickým výbojem, jednak letící střely vystřelené z pistole. Právě vývoj tohoto druhu zdroje vln přivedl později Macha k jeho proslulým

²V této metodě se rovnoběžné paprsky světla procházející měřícím prostorem odklánějí v místech se změnou hustotou. Do optického systému jsou zařazeny dvě štěrbin v ohniskových rovinách před a za měřícím prostorem, které odcloní světelné paprsky odkloněné mimo ohnisko v důsledku změn hustoty v měřícím prostoru (např. v rázových vlnách, úplavech, apod.). Vhodnou orientací štěrbin (jednak vzájemnou, jednak vzhledem ke gradientu změn hustoty ve vyšetřovaném proudovém poli) lze zviditelnit i malé změny hustoty.

³Změna hustoty ρ prosvětlovaného prostředí způsobuje místní změnu indexu lomu n dle vztahu $(n - 1)/\rho = \text{konst.}$ Odklon světelného paprsku vlivem změny indexu lomu závisí na hloubce prosvětlované oblasti.

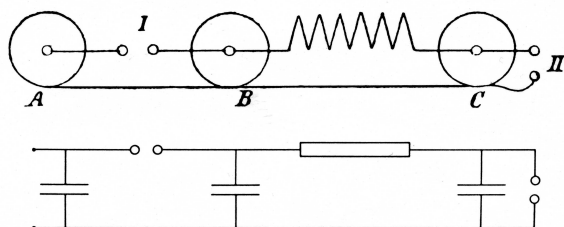


Obr. 8. Zjednodušené schéma Machova–Zehnderova interferometru. Optický paprsek se dělí na prvním polopropustném zrcadle P_1 , pomocí zrcadel Z_1 a Z_2 se rozdělený paprsek spojí na dalším polopropustném zrcadle P_2 . V pracovní větvi je vložen měřicí prostor, uzavřený průhledy z optických skel. Jejich vliv na změnu optické dráhy kompenzuje dvojice skel stejných vlastností, umístěná v „nepracovní větvi“. První interferogram projektilu, který letí nadzvukovou rychlostí, pořízený Machovým–Zehnderovým interferometrem, je na sousedním obrázku [16].

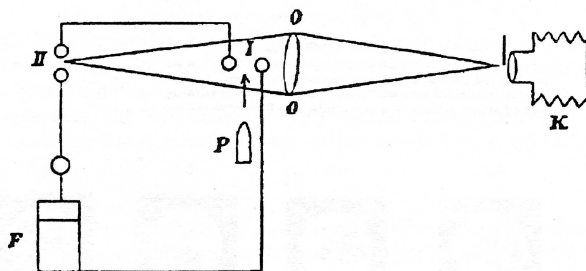
balistickým experimentům, a to ke zviditelnění rázových vln před letícím projektilem a k vůbec prvnímu fenomenologickému popisu supersonického obtékání těles [16], [19].

Krátkodobým a dostatečně intenzivním zdrojem světla byla od samého počátku rovněž elektrická jiskra, generovaná zpravidla podobným zařízením, jako vlny v akustických experimentech. Již z prvních pokusů o zviditelnění vlnových jevů bylo zřejmé, že potřebného rozlišení lze docílit jen při velmi krátkých expozičních časech (zhruba kolem $0,8 \times 10^{-6}$ s), delší expoziční doba by znamenala neostrost a rozmazání pozorovaného jevu. Toho bylo možno dosáhnout pouze správně načasovaným elektrickým výbojem.

Zpoždovacích a spouštěcích obvodů, zpravidla velmi vtipně a účelově řešených, sestrojil Mach se svým asistentem Grussem celou řadu [17]. Zdrojem světla je jiskra, zdrojem napětí jsou kondenzátory. Těmi byly v té době ve všech případech leidské láhve, nabíjené ručně poháněným indukčním generátorem.

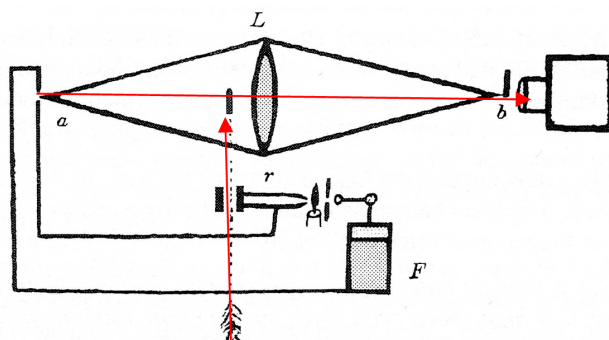


Obr. 9. Nejjednodušší uspořádání zpoždovacího a spouštěcího obvodu [17]

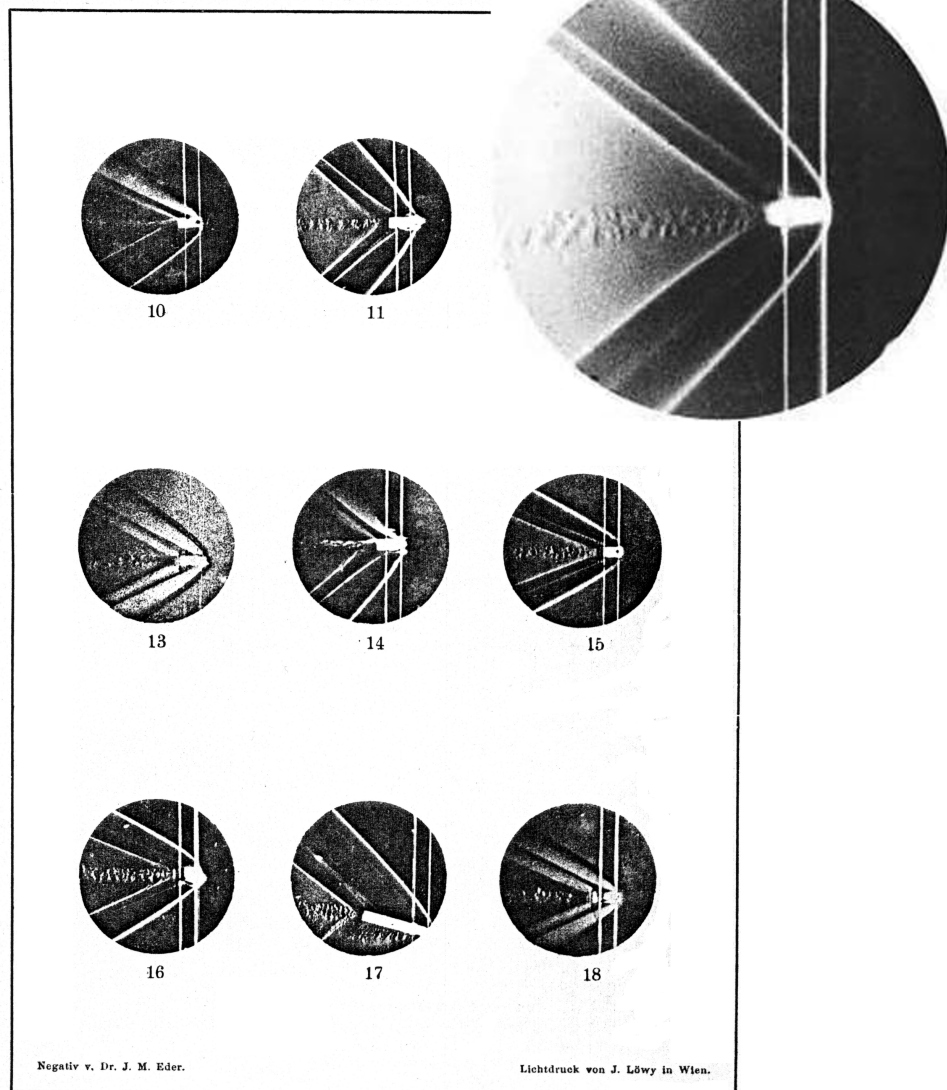


Obr. 10. Uspořádání zpořďovacího a spouštěcího obvodu při prvních balistických měřeních v Pule [19]

Nejjednodušší obvod je na obr. 9. Kondenzátor A se nabíjí tak dlouho, až se obvod propojí přes jiskřiště I a zvýší náboj kondenzátoru B . Vloženým odporem mezi B a C se nastaví potřebné zpoždění okamžiku, kdy dojde k úplnému nabití kondenzátoru C a k výboji na jiskřišti II . Podobné uspořádání měly i obvody používané při fotografování letícího projektilu (obr. 10), který při svém průletu zkratoval obvod v místě I dvěma drátky. Ty jsou patrné i na prvním zveřejněném snímku rázových vln (viz obr. 12). Mach se jich zbavil úpravou obvodu, později použitého na střelnici v Mep-penu, způsobem, který opět svědčí o jeho vynalézavosti a nápaditosti (obr. 11) [16]. Projektil zde prolétá mezi dvěma destičkami, do jedné z nich je zaústěna trubice r , na jejímž otevřeném konci je plamen svíčky. Prolétající projektil způsobí tlakovou vlnu, která projde trubicí r a odkloní plamen do prostoru mezi kontakty, který zionizuje a propojí tak obvod s kondenzátorem a jiskřištěm a (světelným zdrojem). Délka trubice r nastavuje potřebné zpoždění pro zachycení projektilu v zorném poli šlírové aparatury.



Obr. 11. Uspořádání zpořďovacího a spouštěcího obvodu při balistických měřeních v Mep-penu [16]



Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss. math.-naturw. Classe. XCVIII. Bd. Abth. IIa, 1889.

Obr. 12. Kopie tabulky z práce [18] se zvětšeným obrázkem č. 12 tabulky, který se dnes obecně cituje jako první zveřejněná fotografie tělesa letícího nadzvukovou rychlostí, s jasně patrnou čelní i výstupní rázovou vlnou.

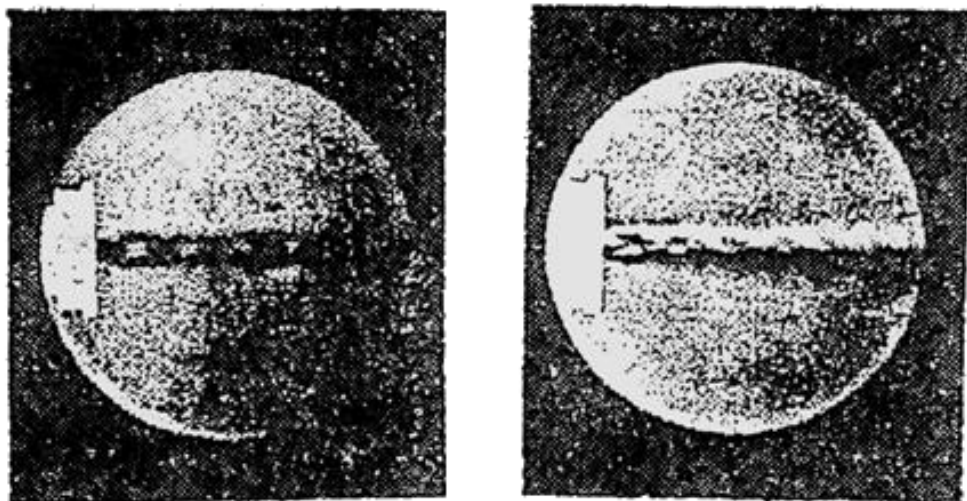
Jestliže Mach dokázal ve svých experimentech poprvé zviditelnit vlnu generovanou výbojem a ukázat, že má charakter rázové vlny známé zatím pouze z matematické teorie, neznamenal to ještě, že by bylo cokoli známo o rázových vlnách, vznikajících při nadzvukovém obtékání těles. V roce 1881 se Mach zúčastnil v Paříži přednášky

belgického balistika Melsense. Ten vyslovil domněnku, že letící projektil před sebou hrne a stlačuje vzduch a vyvolává tak jevy, k jakým může za jistých okolností docházet při explozi. Macha tato informace zaujala natolik, že se po svém přechodu na německou univerzitu v Praze začal intenzivně zabývat otázkou zviditelnění rázových vln na letícím projektilu. K dispozici měl v tu dobu téměř vše potřebné, dokonce i asistenta J. Wentzela, který s ním ještě na české univerzitě prováděl první experimenty se střelou z armádní pistole. V těchto pokusech bylo zviditelnění prováděno šlířovou metodou. Letící střelu se podařilo zachytit na fotografiích velice dobře, rázové vlny se ale neobjevily. Mach správně usoudil, že rychlost střely byla příliš malá (cca 240 m/s), než aby mohly vzniknout jakékoli efekty spojené se supersonickým obtékáním. Spojil se proto s profesorem c. k. námořní akademie v Rijece PETEREM SALCHEREM (1848–1928), který měl možnost provést potřebné experimenty s výkonnějšími zbraněmi na střelnici v Pule [19]. Byly to pěchotní zbraně ráže 11 mm, u nichž byla počáteční rychlost střely 438 m/s, a tehdy nová pěchotní zbraň ráže 8 mm, u níž měla údajně počáteční rychlost střely dosahovat až 530 m/s. Mach se těchto měření osobně neúčastnil, dal ale pro tyto pokusy k dispozici všechno své pražské vybavení. První spouštěcí obvod byl ještě poměrně primitivní. Do činnosti byl uveden dvěma tenkými drátky, které musela letící střela porušit. I když byly snímky pořízeny optikou z běžně prodávaných fotoaparátů, podařilo se z nich vytěžit tolik informací, že *Machovu první (předběžnou) zprávu pro vídeňskou akademii věd z 10. června 1886, která obsahuje i první fotografie střely letící nadzvukovou rychlostí s patrnými rázovými vlnami, můžeme označit za zrození oboru aerodynamiky vysokých rychlostí* (obr. 12).

Salcher o výsledcích měření Macha pravidelně informoval a ze zachovalých dopisů je zřejmé, jakých detailů si oba vědci byli schopni všimnout i jakou vědeckou hodnotu tato první měření měla! Do té doby nikdo netušil, že na tělese letícím supersonickou rychlostí vznikají rázové vlny, natož aby si uměl představit, jak tyto vlny vypadají. Zejména tzv. čelní rázová vlna před tělesem se zde objevila vůbec poprvé! Práce Ernsta Macha a Ludwiga Macha [18] a Ernsta Macha a Petera Salchera [19] obsahují nejen tyto fotografie, ale zavádějí pro charakterizování rychlosti její bezrozměrovou hodnotu w/c , tj. poměr rychlosti letu k rychlosti zvuku, pro niž zavedl Jakob Ackeret ve své habilitační práci v roce 1929 dodnes používaný název **Machovo číslo** $M = w/c$. Tyto práce obsahují i popis čelní a výstupní rázové vlny a úvahy o odlehlosti čelní vlny s rychlostí letu. Mach rovněž připomíná, že jím zavedená bezrozměrová veličina w/c může sloužit jako podobnostní parametr při modelových měřeních na zmenšených modelech.

Mach se osobně účastnil řady měření i jejich vyhodnocování na střelnici firmy Krupp v Meppenu. Měření byla provedena s projektily ráže 90 a 40 mm, jejichž počáteční rychlost byla 448 m/s a 670 m/s. Mach s potěšením konstatoval, že použité přístroje ani jednou neselhaly [21] a že naměřené jevy se při zachování geometrické podobnosti a poměru w/c nelišily od toho, co bylo naměřeno na malých projektilích.

Všechna tato měření byla provedena v době, kdy nebyla žádná počítačová technika, žádné elektronické měřicí přístroje nebo rychlostní kinematografie. Je obdivuhodné, kolik informací poskytly snímky, které měly ve skutečnosti průměr 5 mm, a je rovněž obdivuhodné, kolik nových, původních poznatků z nich dokázal Mach díky svým znalostem vytěžit. Řada poznatků předběhla svou dobu natolik, že se k nim vědci začali vracet až téměř po 50 letech. Když byla poprvé v roce 1947 překonána zvuková bariéra (tj. když se uskutečnil první supersonický let na pokusném letadle Bell X-1),



Obr. 13. První fotografie paprsku, vytékajícího nadzvukovou rychlostí [20]. I když kvalita těchto fotografií není dobrá, bylo možné z nich vyčíst opakující se strukturu rázových vln, odrážejících se od hranice vytékajícího paprsku, tak jak ji známe např. z pozdějších experimentů L. Prandtl.

byl pozorován tzv. *aerodynamický třesk* (sonic boom) a vědci se jím začali intenzivně zabývat. Mach jej přitom popsal a vysvětlil již ve své přednášce 10. listopadu 1897 ve vídeňském spolku pro šíření přírodovědných znalostí [16].

V roce 1889 zveřejnili Mach a Salcher i dvě další stěžejní práce [21], [20]. První z nich doplňuje výsledky balistických experimentů, druhá poprvé popisuje zviditelnění rázových vln v paprsku plynu vytékajícím supersonickou rychlostí. Podařilo se jim popsat nejen známý systém těchto rázových vln (obr. 13), ale i jeho závislost na protitlaku [20]. Tyto údaje byly zpřesněny a využity až o mnoho let později AURELEM STODOLOU (1859–1949) a LUDWIGEM PRANDTLEM (1875–1953). V této práci se objevuje i myšlenka vyšetřovat obtékání stojícího tělesa nadzvukovým proudem plynu, což je v podstatě první idea *supersonického aerodynamického tunelu*, dnes neodmyslitelného nástroje aerodynamického výzkumu!

Závěr

Ernst Mach byl jednou z nejvýznamnějších osobností vědeckého světa konce devatenáctého století. Osobností, která ovlivnila vývoj fyziky i filozofie a která významně zasáhla i do řady jiných oborů. Mach prožil v Praze 28 let svého života. Všechny jeho práce z oblasti fyziky vznikly v Praze a zde se také formovala jeho pozitivistická empiriokritická filozofie, kterou můžeme vysledovat i v jeho fyzice. Z fyziky to byla hlavně mechanika, především jeho rozbor a kritika Newtonovy mechaniky, která tak významně ovlivnila i Alberta Einsteina. Neméně významný byl i Machův přínos dynamice plynů, vždyť poprvé ukázal světu, jak vypadá rázová vlna a nadzvukové obtékání těles.

Popis a rozbor naměřených výsledků v oblasti dynamiky plynů v Machových pracích se může dnes zdát trochu staromódní — není divu, vždyť nás od nich dělí více než sto let — nelze jim ale nic vytknout z hlediska přesnosti. Není k nim nic přidáno, co by neodpovídalo skutečnosti. I v tom se kladně projevil Machův empirizmus a odpor k jakékoli „metafyzice“. Jsou to všechno zcela původní práce, které výrazně předstihly svou dobu a které mají svoji platnost dodnes.

Ernst Mach byl tak výraznou osobností v řadě oborů — ve fyziologii, fyzice, filozofii, pedagogice — že se z historického hodnocení jeho díla trochu vytratila jeho samotná osobnost. Přitom právě jeho osobní hluboce lidské vlastnosti, jeho odpovědný přístup k jakémukoli jeho počínání, promyšlenost a důslednost spolu s hlubokými a neobyčejně širokými znalostmi byly předpokladem a základem jím dosažených výsledků a úspěchů. Bez nich by Mach nikdy nebyl schopen takovým vynikajícím způsobem formulovat své myšlenky a získat pro ně takovou řadu žáků a následovníků.

Albert Einstein, který si Macha velice vážil, o něm napsal [3]:

Při čtení Machova díla cítíme příjemnou pohodu, kterou musel pociťovat i autor, když s takovou lehkostí a výstižností formuloval své věty. Není to však jen intelektuální uspokojení a radost z pěkného stylu, které vždy činí čtení jeho knih tak přitažlivým. Je to především jeho laskavé, člověčínou prodchnuté a optimistické myšlení, které často mezi řádky proskakuje, hlavně mluví-li se o obecných věcech každého člověka. Tento způsob myšlení jej také ochránil před chorobou dneška, které jen nemnozí zůstali ušetřeni, před nacionálním fanatismem. Ve své populárně-vědecké přednášce „O jevech spojených s letícím projektilem“ si nemohl v posledním odstavci odpustit vyjádřit svoji víru ve vzájemné porozumění mezi národy.

L i t e r a t u r a

- [1] ANTOLIK, K.: *Das Gleiten elektrischer Funken*. Poggendorfs Ann. Phys. Chem. (1875), 14–37.
- [2] DVOŘÁK, R.: *Ernst Mach, fyzik a filozof*. Velké postavy vědeckého nebe, sv. 14. Prometheus, Praha, 2005.
- [3] EINSTEIN, A.: *Ernst Mach*. Phys. Z. 17 (1916), 101.
- [4] MACH, E.: *Über die Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegung*. Wien, 1860, též *Über die Controverse zwischen Doppler und Petzval bezüglich der Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegung*. Z. Math. Phys. 6 (1861), 120–126.
- [5] MACH, E.: *Compendium der Physik für Mediziner*. Braunmüller, Wien, 1863.
- [6] MACH, E.: *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*. Praha, 1872.
- [7] MACH, E.: *Optisch-akustische Versuche*. Barth (Leipzig), Calve (Praha), 1873.
- [8] MACH, E.: *Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen*. Leipzig, 1875.
- [9] MACH, E.: *Neue Versuche zur Prüfung der Doppler'schen Theorie der Ton- und Farbänderung durch Bewegung*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 77 (1878), 299–310.

- [10] MACH, E.: *Über den Verlauf der Funkenwellen in der Ebene und im Raume*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 77 (1878), 819–838.
- [11] MACH, E.: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt*. Leipzig, 1883.
- [12] MACH, E.: *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*. Jena, 1886.
- [13] MACH, E.: *Grundriss der Naturlehre für die untere Classen der Mittelschulen*. Ausgabe für Gymnasien. F. Tempsky, Praha, 1886.
- [14] MACH, E.: *Grundriss der Physik für die höheren Schulen des Deutschen Reiches*. Leipzig, 1890.
- [15] MACH, E.: *Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt*. Barth, Leipzig, 1896.
- [16] MACH, E.: *Über Erscheinungen an fliegenden Projektilen*. Populärwiss. Vorlesungen, 5. vydání, Leipzig, 1923, 356–383, 1. vydání tamtéž, 1896.
- [17] MACH, E., GRUSS, G.: *Optische Untersuchung der Funkenwellen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 78 (1878), 467–480.
- [18] MACH, E., MACH, L.: *Weitere ballistisch-photographische Versuche*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 98 (1889), 1310–1326.
- [19] MACH, E., SALCHER, P.: *Photographische Fixirung der durch Projektile in der Luft eingeleiteten Vorgänge*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 95 (1887), 764–780.
- [20] MACH, E., SALCHER, P.: *Optische Untersuchung der Luftstrahlen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 98 (1889), 1303–1309.
- [21] MACH, E., SALCHER, P.: *Über die in Pola und Meppen angestellten ballistisch-photographische Versuche*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 98 (1889), 41–50.
- [22] MACH, E., SOMMER, J.: *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosions-schallwellen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 75 (1877), 101–130.
- [23] MACH, E., TUMLIRZ, O., KÖGLER, C.: *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 77 (1878), 7–32.
- [24] MACH, E., v. WELTRUBSKÝ, J.: *Über die Formen der Funkenwellen*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 77 (1878), 551–560.
- [25] MACH, L.: *Über einen Interferenzrefraktor*. Z. Instrumentenkunde 12 (1892), 89–93.
- [26] NOVÁK, V.: *Vzpomínky a paměti*. Vlastním nákladem, Brno, 1939.
- [27] SEIDLEROVÁ, I.: *Machův mechanik*. Dějiny vědy a techniky 3 (1970), 108–112.
- [28] TĚŠÍNSKÁ, E.: *Profesor Ernst Mach, jeho příchod na pražskou univerzitu a vazby s formující se Jednotou českých matematiků a fyziků*. PMFA 61 (2) (2016), 137–159.
- [29] TUMLIRZ, O.: *Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 80 (1879), 439–442.
- [30] TUMLIRZ, O.: *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 95 (1887), 367–387.
- [31] ZEHNDER, L.: *Ein neuer Interferenzrefraktor*. Z. Instrumentenkunde 11 (1891), 275–285.