Aktuárské vědy

Alfred Tauber

Beweis einiger Sätze über die analytische Ausgleichung. II

Aktuárské vědy, Vol. 7 (1938), No. 3, 97–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144694

Beweis einiger Sätze über die analytische Ausgleichung. (II.)

Von Prof. Dr. *Alfred Tauber*, Wien.

1. Die Auswahl unter den analytischen Ausgleichungsfunktionen für Sterbenswahrscheinlichkeiten ist nicht allzugroß, wenn den beiden Forderungen entsprochen werden soll, daß sich die Sterbenswahrscheinlichkeit q in einfacher Weise aus der gewählten Funktion $\mathfrak{F}(q)$ rückberechnen lasse, und daß bei sehr kleinen Werten von q der relative Fehler, welchen die Ausgleichung im Werte von q verursacht, klein bleibe. Dadurch wird für die Praxis im allgemeinen $\mathfrak{F}(0) = 0$ gefordert, es scheidet also beispielsweise der Logarithmus von q aus der Wahl, denn für $q = 2^0/_{00}$ bedeutet schon der geringe Relativfehler von $\pm$ 3 Perzent in der Ausgleichung von $\log q$ einen Relativfehler von 17 resp. $20^1/_2$ Perzent.

Hingegen braucht für die höheren Lebensalter die Funktion $\mathfrak{F}(q)$ nicht die Eigenschaft $\mathfrak{F}(0) = 0$ zu besitzen, und in der Tat liefert die Ausgleichung der Erlebenswahrscheinlichkeit p_x des x-jährigen

$$p_x \sim \mathfrak{p}_x = (a + bx)\, c^{-x}, \quad c > 1 \tag{1}$$

nicht nur eine gut angenäherte Darstellung der Sterblichkeit in den 80-er Lebensjahren, sondern auch darüber hinaus extrapoliert Werte von q, die keine so starke Überschätzung involvieren, wie bei der traditionellen Extrapolation nach Makeham. Anstatt p_x kämen eventuell noch Funktionen von p_x der Formen

$$\log(1 + p_x), \quad \frac{p_x}{1 + \frac{1}{2} p_x}, \quad 1 - (1 - p_x)^2, \ldots$$

für die Ausgleichung $(a + bx)\, c^{-x}$ in Betracht, um weitere Modifikationen der extrapolierten Sterbenswahrscheinlichkeiten herbeizuführen.

Die Konstantenbestimmung zu (1) kann am einfachsten durch Herausgreifen dreier schon irgendwie ausgeglichener Werte $\overline{p}_z, \overline{p}_{z+m}, \overline{p}_{z+2m}$ vor sich gehen, dann gibt die quadratische Gleichung für c^m

$$o = \overline{p}_z - 2c^m\, \overline{p}_{z+m} + c^{2m}\, \overline{p}_{z+2m} \tag{1a}$$

vorerst c, und mittels c ist $a = \overline{p}_z\, c^z - bz$, $b = \frac{1}{m}(\overline{p}_{z+m} c^{z+m} - \overline{p}_z c^z)$ zu berechnen. Damit die Werte $\mathfrak{p}_x = (a + bx)\, c^{-x}$ für $x > z$ durchwegs mit wachsendem x abnehmen, ist $\mathfrak{p}_z > \mathfrak{p}_{z+1}$ erforderlich und hinreichend.

Gemäß dieser Konstantenbestimmung resultiert bei der Sterbetafel 1929/32 der ČSR aus den Tabellenwerten[1])

$$\bar{p}_{78} = 0{,}87843, \quad \bar{p}_{82} = 0{,}83051, \quad \bar{p}_{86} = 0{,}77306$$

für das männliche Geschlecht, resp.

$$\bar{p}'_{78} = 0{,}88987, \quad \bar{p}'_{82} = 0{,}84531, \quad \bar{p}'_{86} = 0{,}79407$$

für das weibliche Geschlecht die Formel

$$\mathfrak{p}_{78+n} = (0{,}95387)^n \, (0{,}87843 + 0{,}03119n)$$

resp. (2)

$$\mathfrak{p}'_{78+n} = (0{,}96014)^n \, (0{,}88987 + 0{,}02620n)$$

mit außerordentlich nahem Anschluß an die Tabellenwerte $\bar{q}_x$

x	$\mathfrak{q}_x = 1 - \mathfrak{p}_x$	$\bar{q}_x$	$\mathfrak{q}'_x = 1 - \mathfrak{p}'_x$	$\bar{q}'_x$
77	0,11179	0,11166	0,10048	0,10069
78	0,12157	0,12157	0,11013	0,11013
79	0,13234	0,13229	0,12044	0,12036
80	0,14399	0,14387	0,13166	0,13128
81	0,15658	0,15630	0,14278	0,14276
82	0,16950	0,16949	0,15469	0,15468
83	0,18318	0,18321	0,16706	0,16698
84	0,19736	0,19753	0,17968	0,17962
85	0,21198	0,21211	0,19267	0,19259
86	0,22696	0,22694	0,20593	0,20593
87	0,24223	0,24205	0,21941	0,21965
88	0,27585	0,27545	0,23308	0,23377

Für die 90-er Lebensjahre bewirken die Formeln (2) eine Verminderung gegenüber den Sterbenswahrscheinlichkeiten der offiziellen Sterbetafel, speziell beim Alter 100 wird

$$\mathfrak{q}_{100} = 0{,}44648 \text{ gegen } 0{,}46913 \text{ und } \mathfrak{q}'_{100} = 0{,}40079 \text{ gegen } 0{,}43513.$$

Bei der neuen österreichischen Volkssterbetafel[2]) würden aus den

---

[1]) Außerordentliche Mitteilungen des Statistischen Staatsamtes, Jahrgang IV, Seite 162/3.

[2]) Nach der, zumeist nur Einmal wiederholten, elementaren Interpolationsausgleichung dritten Grades, deren Hauptzweck sich auf gut angenäherte Ebnung und auf Beseitigung irregulärer Zeichenwechsel der ersten Differenzen beschränkt. Die Definition einer solchen Ausgleichung $(2n - 1)$-ten Grades bei auszugleichenden Größen $f_0, f_1, \ldots$ lautet

$$f_\nu \sim \bar{f}_\nu = \frac{1}{2} f_\nu + \frac{1}{2} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda-1} \binom{2n}{n-\lambda} (f_{\nu+\lambda} + f_{\nu-\lambda}).$$

Erlebenswahrscheinlichkeiten

$$\overline{p}_{78} = 0{,}87683,\quad \overline{p}_{82} = 0{,}82933,\quad \overline{p}_{86} = 0{,}76452$$

resp.

$$\overline{p}'_{78} = 0{,}89056,\quad \overline{p}'_{82} = 0{,}84220,\quad \overline{p}'_{86} = 0{,}78249$$

die zu (2) analogen Darstellungen[3])

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{78+n} &= (0{,}94433)^n\,(0{,}87683 + 0{,}04151n) \\ \mathfrak{p}'_{78+n} &= (0{,}95170)^n\,(0{,}89056 + 0{,}03399n) \end{aligned} \tag{3}$$

folgen, aber nur die erstere ist, wie aus folgender Tabelle ersichtlich, als gut angenähert zu bezeichnen

x	$\mathfrak{q}_x$	$\overline{q}_x$	x	$\mathfrak{q}_x$	$\overline{q}_x$
78	0,12317	0,12317	84	0,20121	0,20160
79	0,13333	0,13279	85	0,21871	0,21825
80	0,14467	0,14404	86	0,23548	0,23552
81	0,15708	0,15674	87	0,25349	0,25326
82	0,17067	0,17069	88	0,27242	0,27142
83	0,18470	0,18568			

während der Relativfehler bei den Sterbenswahrscheinlichkeiten des weiblichen Geschlechtes bis zu etwa 2% ansteigt.

Etwas genauere Resultate sind durch die, bei Formel (1) bequem anwendbare Methode der kleinsten Quadrate zu erzielen, indem mit einem Versuchswert von c und Heranziehung von m Werten $\overline{p}_z, \overline{p}_{z+1}, \ldots, \overline{p}_{z+m-1}$ die Summe

$$\sum_{n=0}^{m-1} (c^n\, \overline{p}_{z+n} - \overline{a} - \overline{b}n)^2$$

zu einem Minimum gemacht wird, was die Bedingungen

$$\begin{aligned} m\left(\overline{a} + \frac{m-1}{2}\overline{b}\right) &= \sum_{n=0}^{m-1} c^n\, \overline{p}_{x+n} \\ m\,\frac{(m-1)}{2}\left(\overline{a} + \frac{2m-1}{3}\overline{b}\right) &= \sum_{n=0}^{m-1} n c^n\, \overline{p}_{z+n} \end{aligned} \tag{4}$$

nach sich zieht. Alsdann ist $\mathfrak{p}_{z+n} = (\overline{a} + \overline{b}n)\, c^{-n}$ zu setzen. Diese Rechnung führt bei der österreichischen Sterbetafel für das weibliche Geschlecht, unter der Annahme $z = 77$, $m = 10$, $c = 1{,}0525$ zur Formel

$$\mathfrak{p}'_{77+n} = (1{,}0525)^{-n}\,(0{,}90025 + 0{,}03757n)$$

[3]) Das vom öst. Versicherungs-Fachverbande angewendete Interpolationsverfahren für die Sterbenswahrscheinlichkeiten der höchsten Lebensalter mißt vom Alter 100 an dem weiblichen Geschlecht eine höhere Sterblichkeit bei, als dem männlichen.

x	$\mathfrak{q}'_x$	$\bar{q}'_x$	x	$\mathfrak{q}'_x$	q'_x
76	0,09193	0,09195	82	0,15753	0,15780
77	0,09975	0,10006	83	0,17192	0,17463
78	0,10944	0,10946	84	0,18696	0,18811
79	0,11991	0,11992	85	0,20246	0,20160
80	0,13119	0,13034	86	0,21864	0,21750
81	0,14391	0,14169	87	0,23508	0,23262
			88	0,25185	0,24904

2. Abgesehen von den höchsten Lebensaltern eignet sich für die übrigen wohl am besten eine mit q verschwindende Ausgleichungsfunktion, insbesondere wie schon bei Gompertz und Gauss, der Logarithmus der Erlebenswahrscheinlichkeit oder höchstens dessen Modifikationen $\log \frac{1+aq_x}{p_x}$, $\log(1+a\log p_x^{-1}), \ldots$ wenn es sich um Vermeidung imaginärer Formelkonstanten handelt.

Bei Ausschluß der beiden ersten Lebensjahrzehnte genügt, nach den Beispielen im ersten Aufsatz zu schließen, die Verwendung von vier Konstanten, darunter drei Linearkonstanten, um eine Ausgleichung von Volkssterbetafeln zu bewerkstelligen. Neben der dort angeführten Formel des Typus

$$\operatorname{colog} p_{\xi+n} \sim a + bc^n + b'c^{-n} \tag{5}$$

die bezüglich der deutschen Sterbetafel 1924/26 für das männliche Geschlecht nicht nur eine sehr gut angenäherte Ausgleichung vom Alter 22 ab, sondern auch eine ebensogute King'sche Fortsetzung nach unten bis zum Alter 3 mit sich bringt[4]) ist noch eine andere, ungefähr ebenso vom Beginn der 20-er Jahre anpassungsfähige

$$\operatorname{colog} p_{\xi+n} \sim bc^n + (b' + b''n)\, c^{-n} \tag{6}$$

zu erwähnen, welch letztere auch bei Invalidensterbetafeln sich zur Ausgleichung eignen könnte. So zeigt der Vergleich der fünfjährigen unausgeglichenen Erlebenswahrscheinlichkeiten ${}_5p_x^i = l_{x+5}^i / l_x^i$ nach Zimmermann[5]) mit den Werten ${}_5\mathfrak{p}_x^i$, welche aus

$$\operatorname{colog} {}_5\mathfrak{p}_{25+5n}^i = 0{,}0055\,(1{,}48)^n + (0{,}1545 + 0{,}0640n)\,(1{,}48)^{-n} \tag{6a}$$

zu berechnen sind, daß der Relativfehler der Sterbenswahrscheinlichkeiten ${}_5\mathfrak{q}_x^i = 1 - {}_5\mathfrak{p}_x^i$ gegenüber den ${}_5q_x^i = 1 - {}_5p_x^i$ höchstens 6% beträgt, und daß auch die Stelle, wo die ${}_5q_x^i$, ${}_5\mathfrak{q}_x^i$ ihr Minimum besitzen, ungefähr übereinstimmt.

---

4) Vgl. Versicherungsarchiv, Juliheft 1936, Seite 62.

5) Die unausgeglichenen Lebendenzahlen l_x^i sind seinem Werke „Über Dienstunfähigkeits- und Sterblichkeitsverhältnisse ...“ Band I, Seite 100 zu entnehmen.

x	l_x^i	$\log l_x^i$	10^5 colog ${}_5p_x^i$	10^5 colog ${}_5\mathfrak{p}_x^i$
25	6683	3,82497	16610	16000
30	4559	3,65887	14712	15577
35	3249	3,51175	14421	14102
40	2331	3,36754	13075	12472
45	1725	3,23679	11622	11195
50	1320	3,12057	11069	10588
55	1023	3,00988	11006	10904
60	794	2,89982	12357	12428
65	596	2,77525	15511	15552
70	417	2,62014	19526	20881
75	266	2,42488	28816	29306
80	137	2,13672	—	—

Da die Bestimmung der Basiskonstanten c in (5), (6) nur mit sehr großen Schwierigkeiten nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme geschehen könnte, mit weit größeren als bei der Ausgleichung von Sterbetafeln nach Makeham, müssen versuchsweise Annahmen über c nach der bekannten Gruppenmethode getroffen werden, indem man aus vier Logarithmen von unausgeglichenen t-jährigen Erlebenswahrscheinlichkeiten

$$U_\nu = \operatorname{colog} {}_tp_{x_0+\nu h}, \quad \nu = 0 \text{ bis } 3 \tag{7}$$

die Konstante $c^h = r$ entsprechend den vier Gleichungen

$$U_\nu = A + Br^\nu + B'r^{-\nu}, \qquad \nu = 0 \text{ bis } 3 \tag{7a}$$

resp.

$$U_\nu = Br^\nu + (B' + B''\nu)\, r^{-\nu}, \qquad \nu = 0 \text{ bis } 3 \tag{7b}$$

bestimmt. (Es wäre zwar auch möglich $t = 1$ zu wählen, d. h. die einzelne Gruppe auf je einen Wert von colog p_x zu reduzieren, aber dann sollten die colog p_x vorher einer Glättung unterzogen werden, um Zufallslösungen für c zu verhindern.)

Die nach r aufzulösende Eliminationsgleichung aus (7a) resp. (7b) lautet

$$0 = (U_2 - U_1)\, r^2 - (U_3 - U_2 + U_1 - U_0)\, r + U_2 - U_1 \tag{7c}$$

resp.

$$0 = U_2 r^3 - (2U_1 + U_3)\, r^2 - (U_0 + 2U_2)\, r - U_1 \tag{7d}$$

im letzteren Falle hat sie immer wenigstens eine reell-positive Wurzel.

Bei den im ersten Aufsatz erwähnten Ausgleichungen der deutschen Sterbetafel 1924/26 und der Sterbetafel für die tschechoslovakische Republik 1929/32 wurden die Gruppenwerte

$$\begin{aligned} U_0 &= \operatorname{colog}{}_{15}p_{22} = 0{,}0277254 \text{ resp. } & U_0 &= \operatorname{colog}{}_{13}p_{22} = 0{,}0265055 \\ U_1 &= \operatorname{colog}{}_{15}p_{37} = 0{,}0469818 & U_1 &= \operatorname{colog}{}_{13}p_{35} = 0{,}0431053 \\ U_2 &= \operatorname{colog}{}_{15}p_{52} = 0{,}1542803 & U_2 &= \operatorname{colog}{}_{13}p_{48} = 0{,}0994040 \\ U_3 &= \operatorname{colog}{}_{15}p_{67} = 0{,}6204939 & U_3 &= \operatorname{colog}{}_{13}p_{61} = 0{,}2825583 \end{aligned}$$

zur Bestimmung von $r = c^{15}$ resp. c^{13} gemäß (7c) benützt.

3. Nach versuchsweiser Ermittlung der Basiskonstanten c kann bezüglich der drei Linearkonstanten, neben der kaum besonders gute Annäherung bietenden direkten Bestimmung aus drei herausgegriffenen Gruppenwerten, entweder die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme angewendet werden, oder wenn von vornherein auf Mitberücksichtigung der relativen Fehler[6]) abgezielt wird, ein anderes Verfahren, nämlich die Untersuchung der linearen Zusammenhänge zwischen den ausgeglichenen Werten, weil, wenn eine gegebene Größenfolge $u_0 u_1 \ldots$ durch $\overline{u}_0 = u_0(1+\eta_0)$, $\overline{u}_1 = u_1(1+\eta_1), \ldots$ nach Formeln des hier erörterten Typus ausgeglichen wird, lineare Beziehungen zwischen den Relativfehlern η entstehen. Im Falle der Ausgleichungsformel (5) war bei $u_n = \operatorname{colog} p_{\xi+n}$

$$\overline{u}_n = a + bc^n + b'c^{-n}$$

zu setzen, sonach ergibt die Betrachtung der drei Alter ξ, $\xi+\mu$, $\xi+\nu$ den Zusammenhang zwischen

$$\overline{u}_0 = a + b + b', \quad \overline{u}_\mu = a + bc^\mu + b'c^{-\mu}, \quad \overline{u}_\nu = a + bc^\nu + b'c^{-\nu} \tag{8}$$

und der Konstanten b

$$b = \frac{(c^{\nu-\mu}-1)\,\overline{u}_0 - (c^\nu - 1)\,u_\mu + (c^\nu - c^{\nu-\mu})\,\overline{u}_\nu}{(c^\mu - 1)(c^\nu - 1)(c^{\nu-\mu}-1)}. \tag{8a}$$

Nun kommt gerade dieser Konstanten b bei $c > 1$ dominierende Bedeutung für große n zu, weil sich der Wert $\overline{u}_n$ sowie u_n relativ wenig von dem Hauptsummanden bc^n unterscheiden soll, deshalb kann in (8a)

$$b = b_0(1+\eta), \quad b_0 = u_k/c^k \tag{9}$$

für ein genügend groß gewähltes k mit einem noch zu bestimmenden Fehler η eingesetzt werden, sodaß durch (8a) eine lineare Beziehung zwischen den vier Relativfehlern $\eta, \eta_0, \eta_\mu, \eta_\nu$ vorliegt. Der geringst mögliche Betrag dieser Fehler ist

[6]) Wenn das Maximum δ aller positiven Relativfehler einer ausgeglichenen Größenfolge nicht mit dem Maximum δ' der Beträge aller negativen Relativfehler übereinstimmt, so wird durch Multiplikation dieser ganzen Größenfolge mit dem gemeinsamen Faktor $\frac{2}{2+\delta-\delta'}$ eine neue Folge gebildet, die ein und dasselbe Betragsmaximum $\frac{\delta+\delta'}{2+\delta-\delta'}$ für die positiven und negativen Relativfehler aufweist. Bei Ausgleichsformeln des hier betrachteten Typus sind alle Linearkonstanten mit dem genannten Faktor zu multiplizieren.

$$\frac{b_0(c^\mu - 1)(c^\nu - 1)(c^{\nu-\mu} - 1) - (c^{\nu-\mu} - 1)\,u_0 + (c^\nu - 1)\,u_\mu - (c^\nu - c^{\nu-\mu})\,u_\nu}{b_0(c^\mu - 1)(c^\nu - 1)(c^{\nu-\mu} - 1) + (c^{\nu-\mu} - 1)\,u_0 + (c^\nu - 1)\,u_\mu + (c^\nu - c^{\nu-\mu})\,u_\nu}$$

Wird Formel (6) zugrundegelegt, so gestaltet sich die Ausgleichung[7]) der Sterbenswahrscheinlichkeiten vom Beginn der 20-er Lebensjahre in ähnlicher Weise: Nach Auflösung von (7d) sind wieder, bei $c > 1$, für die Linearkonstanten die zu (8) analogen Gleichungen aufzustellen

$$\bar{u}_0 = b + b', \; \bar{u}_\mu = bc^\mu + (b' + \mu b'')\,c^{-\mu}, \; \bar{u}_\nu = bc^\nu + (b' + \nu b'')\,c^{-\nu} \qquad (10,$$

und aus dem Zusammenhang

$$b = \frac{(\nu - \mu)\,\bar{u}_0 - \nu\, c^\mu \bar{u}_\mu + \mu c^\nu \bar{u}_\nu}{\mu(c^{2\nu} - 1) - \nu(c^{2\mu} - 1)} \qquad (11)$$

lineare Beziehungen zwischen den Relativfehlern abzuleiten.

Als orientierende Vorarbeit zu einer Ausgleichung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten dient zumeist die Ausgleichung mehrjähriger durch dieselbe Formel. Bei der Sterbetafel ČSR 1929/32 für das männliche Geschlecht wurden die fünfjährigen Wahrscheinlichkeiten für die Alter 18, 23, . . ., 83 durch

$$\text{colog}\; {}_5p_{18+5n} \sim \text{colog}\; {}_5\mathfrak{p}_{18+5n} = 0{,}0062366 + 0{,}0013580\,(1{,}58)^n + \\ + 0{,}0018283\,(1{,}58)^{-n} \qquad (12)$$

mit einem Relativfehler der ${}_5\mathfrak{q}_{18+5n}$ von maximal 3% ausgeglichen (Versicherungsarchiv, März 1936, Seite 711, der Wert von colog ${}_5p_{53} =$ $= 0{,}0395122$ ist dort verschrieben). Dagegen läßt sich der Relativfehler der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten, wegen Beobachtungsirregularitäten, kaum unter 8% herabdrücken.[8])

4. Die Kettenlinie (5) hat vor der Makeham'schen Formel, außer der unter allen Umständen größeren Anpassungsfähigkeit, den Vorzug, daß die dargestellten Sterbenswahrscheinlichkeiten nicht durchaus mit dem Alter wachsen müssen, sondern eine Senkung dem Ansteigen vorangehen kann.

Anmerkung. Bei Formel (6) besteht sogar die Möglichkeit zweier Extreme, denn die nach n genommene Ableitung der rechten Seite $[bc^n - (b' + b''n)\,c^{-n}]\lg c - b''c^{-n}$ verschwindet zweimal für positive n, wofern die Gleichung für $y = c^{2n}$

$$y = g + h \lg y, \qquad g = \frac{b'}{b} - \frac{b''}{b \lg c}, \qquad h = \frac{b''}{2b \lg c} \qquad (13)$$

---

[7]) Vgl. Versicherungsarchiv, Märzheft 1936, Seite 714, für die deutsche Sterbetafel 1924/26 des männlichen Geschlechtes.

[8]) Vgl. Tabelle II des ersten Aufsatzes. Für die Alter 79 bis 85 sind dort die Sterbenswahrscheinlichkeiten eine Nuance zu hoch berechnet, was aber den Textteil nicht tangiert.

zwei Wurzeln größer als 1 besitzt. Hiezu ist erforderlich und hinreichend

$$g < 1, \ h > 1, \ h\,(1 - \lg h) < g. \tag{13a}$$

Zwei Extreme können auch bei einer anderen Formel mit vier Konstanten

$$u_n \sim bc^n + b'c^{-n} - b''c^{-\lambda n}, \ c > 1, \ \lambda > 1 \tag{14}$$

auftreten. Hier verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach n

$$[bc^n - b'c^{-n} + \lambda b''c^{-\lambda n}] \lg c$$

wenn $\zeta = c^{(\lambda-1)n}$ der trinomischen Gleichung

$$\chi(\zeta) = \zeta^\mu - \frac{b'}{b}\zeta + \lambda\frac{b''}{b} = 0, \qquad \mu = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \tag{14a}$$

genügt, und $\chi(\zeta) = 0$ besitzt zwei Wurzeln größer als 1, falls einerseits $\chi(1)$ positiv, anderseits $\chi(\zeta')$ für die Wurzel $\zeta' = \left(\frac{b'}{\mu b}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}$ der Ableitung von $\chi(\zeta)$, bei $\frac{b'}{b} > \mu$, negativ ist.

5. Den oben angeführten Beispielen ist auch bezüglich der österreichischen Volkssterbetafel 1930/33 für das männliche und weibliche Geschlecht die Darstellung

$$10^7 \operatorname{colog} \mathfrak{p}_{21+n} = 9000 + 4000\,(1{,}09)^n + 4750\,(1{,}09)^{-n}$$

resp. (15)

$$10^7 \operatorname{colog} \mathfrak{p}'_{23+n} = 13170 + 1573\,(1{,}11)^n + 1200\,(1{,}11)^{-n}$$

beizufügen, deren erste Formel aber die bekannte Senkung der Männersterblichkeit in den 20-er Lebensjahren bloß durch Nichtsteigerung markiert, während der Forderung nach stärkerer Akzentuierung dieser Senkung besser die Formel

$$10^7 \operatorname{colog} \mathfrak{p}_{21+n} = 10350 + 3960\,(1{,}09)^n + 3560\,(1{,}09)^{-2n} \tag{15a}$$

entspricht, bei der auch das Fehlermaximum etwas herabgedrückt wird.

Die nach King für die Alter unter 21 resp. 23, bis zum Alter 3 herab, vorzunehmende Fortsetzung der Ausgleichung (15) kann, worauf noch nicht aufmerksam gemacht wurde, einfach auf die Makeham'sche Formel basiert werden: Wird nämlich die Lebenswahrscheinlichkeit p_x von einem gewissen Alter ξ an annäherungsweise durch einen analytischen Ausdruck φ_x dargestellt, und werden aus einer beliebig gewählten Anzahl L_ξ Personen des Alters ξ die beiden Lebendenzahlen

$$L_x = L_\xi / \varphi_x\,\varphi_{x+1} \ldots \varphi_{\xi-1}, \quad l_x = L_\xi / p_x\,p_{x+1} \ldots p_{\xi-1} \tag{16}$$

für die Alter $x < \xi$ berechnet, so dient nach King die angenäherte Darstellung der „komplementären" Differenzen $\lambda_x = L_x - l_x$ durch einen analytischen Ausdruck $\overline{\lambda}_x$ dazu, um auch ausgeglichene Lebenswahrscheinlichkeiten

$$p_x = \frac{L_{x+1} - \overline{\lambda}_{x+1}}{L_x - \overline{\lambda}_x} \quad \text{für } x < \xi \tag{16a}$$

zu erlangen. Im Falle der Gleichungen (15) ist die Makeham'sche Darstellung der λ

$$\log \overline{\lambda}_{3+n}\ 3{,}72932 - 0{,}02588n - 0{,}02482\,(1{,}292)^n$$

resp.

$$3{,}74647 + 0{,}01429n - 0{,}20549\,(1{,}146)^n$$

dem Verlauf der λ nahe angepaßt und führt zu guter Übereinstimmung zwischen der beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeit und der aus (16a) sich ergebenden.

Ein Vorzug der King'schen Methode besteht auch darin, daß sie die, immer subjektive, Randausgleichung für einige Alter unter 6 oder 7 überflüssig macht. Immerhin sind nach dieser Methode acht Konstante für die Gesamtausgleichung einer Sterbetafel erforderlich (die Methode des öst. Fachverbandes operiert übrigens sogar mit neun Konstanten und Randausgleichung für die Alter 4 bis 6 resp. 3 bis 5).

Bei allen Versuchen, die Sterblichkeit der beiden ersten Lebensjahrzehnte nicht indirekt, wie bei King, sondern direkt in die analytische Gesamtausgleichung einzubeziehen, erkennt man, daß die Mindestzahl der Konstanten nicht unter sechs hinabzudrücken ist, selbst wenn man sich mit der Ausgleichung mehrjähriger z. B. vierjähriger Wahrscheinlichkeiten begnügen wollte, bei deren Zerlegung in einjährige Wahrscheinlichkeiten alsdann verschiedene Methoden zur Erwägung gelangen. Den Zusammenhang zwischen einer Funktion $f(x)$ und deren t-gliedrigen Summen $F(x) = f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+t-1)$ gibt die Formel

$$f(x+y) = \sum_{m=0} \left[\binom{\frac{y+1}{t}}{m+1} - \binom{\frac{y}{t}}{m+1} \right] \Delta_t^m\, F(x) \tag{17}$$

worin x nur äquidistante Werte mit der Distanz t annehmen, aber auf mehrfache Art zur Berechnung von $f(x+y)$ gewählt werden darf.

6. Als eine auch praktisch brauchbare sechskonstantige Formel zur Ausgleichung von Größen $u_0, u_1, \ldots$ sei die folgende erörtert

$$u_\nu \sim \overline{u}_\nu = \mathfrak{a}c^\nu + \mathfrak{b}_1 c_1^{-\nu} + \mathfrak{b}_2 c_2^{-\nu} + \mathfrak{b}_3 c_3^{-\nu} + \mathfrak{b}_4 c_4^{-\nu} \tag{18}$$

wo c_1, c_2, c_3, c_4 vier verschiedene, von vornherein bekannte Funktionen der Hauptkonstanten c bedeuten. Dann genügen die ausgeglichenen Werte $\overline{u}$ einer linearen Rekursion

$$\mathfrak{a}'c^\nu = \overline{u}_\nu - C_1\overline{u}_{\nu+1} + C_2\overline{u}_{\nu+2} - C_3\overline{u}_{\nu+3} + C_4\overline{u}_{\nu+4} \tag{18a}$$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}(cc_1 - 1)(cc_2 - 1)(cc_3 - 1)(cc_4 - 1) \tag{18b}$$

mit den elementar-symmetrischen Funktionen von c_1, c_2, c_3, c_4 als Koeffizienten

$$\begin{aligned}
C_1 &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4,\\
C_2 &= c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_2c_3 + c_2c_4 + c_3c_4,\\
C_3 &= c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + c_1c_3c_4 + c_2c_3c_4,\\
C_4 &= c_1c_2c_3c_4.
\end{aligned}$$

Hiebei ist die Konstante $\mathfrak{a}$, ähnlich wie früher, vgl. (9), in der Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0(1 + \eta), \quad \mathfrak{a}_0 = u_\mu / c^\mu$$

als näherungsweise bekannt anzunehmen, vorausgesetzt daß in der Ausgleichung (18) der Anfangssummand $\mathfrak{a}c^\nu$ bei großem ν dominiert und μ genügend groß gewählt ist, damit der Fehler η als klein gelten kann.

Nun soll aber die Beschränkung getroffen werden, daß c_1, c_2, c_3, c_4 eine geometrische Reihe bilden

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \frac{c_4}{c_3} = c_0 \tag{19}$$

wodurch sich die rechte Seite der Rekursion (18a) in

$$\begin{aligned}
\overline{u}_\nu - (1 + c_0 + c_0^2 + c_0^3)\, c_1\overline{u}_{\nu+1} + (c_0 + c_0^2 + 2c_0^3 + c_0^4 + c_0^5)\, c_1^2 u_{\nu+2} -\\
- (c_0^3 + c_0^4 + c_0^5 + c_0^6)\, c_1^3\overline{u}_{\nu+3} + c_0^6 c_1^4 \overline{u}_{\nu+4}
\end{aligned} \tag{20}$$

verwandelt. Eine analoge Ausgleichung besteht dann für die t-gliedrigen Summen $U_\nu = u_{\nu t} + u_{\nu t+1} + \ldots + u_{\nu t+t-1}$

$$U_\nu \sim \overline{U}_\nu = \mathfrak{A} r^\nu + \mathfrak{B}_1 r_1^{-\nu} + \mathfrak{B}_2 r_2^{-\nu} + \ldots, \; r = c^t,\; r_1 = c_1^t, \ldots \tag{21}$$

und unter der Beschränkung (19)

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = r_0 \tag{21a}$$

lautet die Rekursion der ausgeglichenen Summen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' r^\nu &= \overline{U}_\nu - R_1\overline{U}_{\nu+1} + R_2\overline{U}_{\nu+2} - R_3\overline{U}_{\nu+3} + R_4\overline{U}_{\nu+4},\\
\mathfrak{A}' &= \mathfrak{A}(rr_1 - 1)(rr_2 - 1)(rr_3 - 1)(rr_4 - 1),\\
R_1 &= (1 + r_0 + r_0^2 + r_0^3)\, r_1,\\
R_2 &= (r_0 + r_0^2 + 2r_0^3 + r_0^4 + r_0^5)\, r_1^2, \quad R_3 = (r_0^3 + r_0^4 + r_0^5 + r_0^6)\, r^3,\\
&\quad R_4 = r_0^6 r_1^4.
\end{aligned}$$

Es ist hervorzuheben, daß die Koeffizienten R andere Eigenschaften als die Koeffizienten C aufweisen können.

Das entscheidende Problem, bestimmte Abhängigkeiten der beiden Konstanten c_0, c_1 von c zu fixieren, besitzt gewiß verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Zunächst kann versucht werden, dem höchsten Koeffizienten C_4 der Rekursion (18a) dieselbe Dimension zu erteilen, wie im allereinfachsten Falle $c_0 = c_1 = c$, dies gibt

$$C_4 = c^{10}, \; c_0{}^3 c_1{}^2 = c^5, \; r_0{}^3 r_1{}^2 = r^5. \tag{23}$$

(Ein Vorschlag von Oltramare $c_0 = c^{\frac{1}{2}}$, $c_1 = c^{-\frac{1}{2}}$ mit weitaus geringerer Dimension von C_4 wird hier nicht untersucht.)

Um auch die zweite Abhängigkeit herzustellen, werde gefordert, daß der Quotient R_3/R_4 der beiden höchsten Koeffizienten in (22), weil mit wachsendem ν der Quotient $\overline{U}_{\nu+4}/\overline{U}_{\nu+3}$ sich dem Grenzwert r nähert, für einen möglichst niedrigen Zahlenwert s von t ebenfalls gleich r sei. Diese Forderung $R_3 = rR_4$ oder

$$(r_0{}^3 + r_0{}^4 + r_0{}^5 + r_0{}^6)\, r_1{}^3 = r(r_0{}^6 r_1{}^4)$$

ist wegen $r_0{}^3 r_1{}^2 = r^5$ gleichbedeutend mit

$$r_0{}^{-\frac{3}{2}} + r_0{}^{-\frac{1}{2}} + r_0{}^{\frac{1}{2}} + r_0{}^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{7}{2}}$$

und entspricht einer Gleichung dritten Grades für $(r_0{}^{\frac{1}{2}} + r_0{}^{-\frac{1}{2}})$

$$(r_0{}^{\frac{1}{2}} + r_0{}^{-\frac{1}{2}})^3 - 2\,(r_0{}^{\frac{1}{2}} + r_0{}^{-\frac{1}{2}}) = r^{\frac{7}{2}} \tag{23a}$$

welche aber eine Lösung

$$r_0{}^{\frac{1}{2}} + r_0{}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\, r^{\frac{7}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\, r^7 - \tfrac{8}{27}}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\, r^{\frac{7}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{4}\, r^7 - \tfrac{8}{27}}}$$

größer als 2 nur besitzt, wenn die rechte Seite $r^{\frac{7}{2}} = c^{\frac{7}{2}s}$ von (23a) größer als 4 ist. Mit Rücksicht auf das faktisch für c in Betracht kommende Intervall, wenn die u_ν, bis auf einen Zahlenfaktor, die Logarithmen von $p_{x_0+\nu}$ vorstellen sollen, darf im allgemeinen $s = 5$ angenommen werden.

Indes erscheint es gegenüber diesen Berechnungen vorteilhafter, von dem engen Zusammenhang der Rekursion (20) mit derjenigen für den Grenzfall von (18), wenn je zwei der Konstanten $c_1 c_2 c_3 c_4$ einander gleich werden, Gebrauch zu machen. Denn bei der Ausgleichung

$$u_\nu \sim \overline{u}_\nu = \alpha\gamma^\nu + (\beta_1 + \beta'_1\nu)\,\gamma_1{}^{-\nu} + (\beta_2 + \beta'_2\nu)\,\gamma_2{}^{-\nu} \tag{24}$$

haben die ausgeglichenen Werte eine einfachere Rekursion als (20) und zwar

$$\begin{aligned}
\alpha'\gamma^\nu &= \overline{u}_\nu - \mathfrak{C}_1\overline{u}_{\nu+1} + \mathfrak{C}_2\overline{u}_{\nu+2} - \mathfrak{C}_3\overline{u}_{\nu+3} + \mathfrak{C}_4\overline{u}_{\nu+4},\\
\alpha' &= \alpha(\gamma\gamma_1 - 1)^2\,(\gamma\gamma_2 - 1)^2,\\
\mathfrak{C}_1 &= 2(\gamma_1 + \gamma_2),\\
\mathfrak{C}_2 &= \gamma_1{}^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2{}^2,\\
\mathfrak{C}_3 &= 2\gamma_1\gamma_2\,(\gamma_1 + \gamma_2),\\
\mathfrak{C}_4 &= \gamma_1{}^2\gamma_2{}^2.
\end{aligned}$$

Analoge Formeln bestehen für die t-gliedrigen Summen

$$\overline{U}_\nu = A\varrho^\nu + (B_1 + B'_1\nu)\,\varrho_1{}^{-\nu} + (B_2 + B'_2\nu)\,\varrho_2{}^{-\nu}, \; \varrho = \gamma^t, \tag{25}$$
$$\varrho_1 = \gamma_1{}^t, \; \varrho_2 = \gamma_2{}^t$$

mit den Rekursionen

$$
\begin{aligned}
A'\varrho^{\nu} &= \bar{U}_{\nu} - \mathfrak{R}_1 \bar{U}_{\nu+1} + \mathfrak{R}_2 \bar{U}_{\nu+2} - \ldots \qquad (25a)\\
A' &= A(\varrho\varrho_1 - 1)^2 (\varrho\varrho_2 - 1)^2,\\
\mathfrak{R}_1 &= 2(\varrho_1 + \varrho_2),\\
\mathfrak{R}_2 &= \varrho_1{}^2 + 4\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2{}^2, \ldots
\end{aligned}
$$

Nahezu identisch werden die beiden Ausgleichungen (24) und (18) in Verbindung mit (23), (23a) wenn bei $\gamma = c$ der höchste Koeffizient $\mathfrak{C}_4$ mit C_4 übereinstimmt, also $\gamma_1\gamma_2 = c^5$ gemäß (23) angenommen wird, und wenn zweitens der Quotient $\mathfrak{R}_3/\mathfrak{R}_4$ gleich $r = c^s$ für den eben erwähnten Zahlenwert s von t wird, aus welchen zwei Bedingungen

$$\varrho_1\varrho_2 = r^5, \; 2(\varrho_1 + \varrho_2) = r\varrho_1\varrho_2$$

sich die gesuchten Werte ϱ_1, ϱ_2 sofort ergeben

$$\varrho_1, \varrho_2 = \frac{r^6 \mp \sqrt{r^{12} - 16 r^5}}{4} \qquad (26)$$

sie fallen reell-positiv aus, wofern wie oben $r^7 = c^{7s} > 16$ erfüllt ist. Wird wieder $s = 5$ genommen, so resultiert

$$\gamma_1{}^5, \gamma_2{}^5 = \frac{c^{30} \mp \sqrt{c^{60} - 16 c^{25}}}{4}. \qquad (26a)$$

Am einfachsten, bloß durch Auflösung quadratischer Gleichungen, ist die Verwandtschaft der Ausgleichungen beider Typen (18) und (24), unter der Voraussetzung

$$R_4 = \mathfrak{R}_4, \qquad \frac{R_1{}^2}{R_2} = \frac{\mathfrak{R}_1{}^2}{\mathfrak{R}_2} \qquad (27)$$

zu erreichen, denn die Umformungen

$$R_1 = (1 + r_0)(1 + r_0{}^2), \; R_2 = r_0 (1 + r_0{}^2)(1 + r_0 + r_0{}^2)$$

zeigen, daß $r_0 + r_0{}^{-1}$, wenn

$$\frac{R_1{}^2}{R_2} = r_0 + r_0{}^{-1} + 1 - \frac{1}{r_0 + r_0{}^{-1} + 1}$$

den vorgegebenen Wert $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_1{}^2/\mathfrak{R}_2$ haben soll, durch

$$r_0 + r_0{}^{-1} + 1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}' + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{R}'^2}, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_1{}^2/\mathfrak{R}_2 \qquad (27a)$$

bestimmt ist. Beispielsweise wird für $\gamma = 1{,}1$ nach (26a)

$$\gamma_1{}^5 = 1{,}4996 \sim 1{,}5 \text{ und } \gamma_2{}^5 = c^{25}/\gamma_1{}^5 = 7{,}22315$$

um daher die Ausgleichung viergliedriger Summen U vorzunehmen, ist

$$\varrho_1 = \gamma_1{}^4 = 1{,}38316 \text{ und } \varrho_2 = \gamma_2{}^4 = 4{,}86386$$

in die Werte von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ einzusetzen, was die Rekursion (25a) ziffermäßig zu

$$A'\varrho^\nu = \overline{U}_\nu - 12{,}4940\overline{U}_{\nu+1} + 52{,}4804\overline{U}_{\nu+2} - \\ - 84{,}0537\overline{U}_{\nu+3} + 45{,}2592\overline{U}_{\nu+4} \tag{28}$$

mit $\varrho = (1{,}1)^4 = 1{,}4641$, $A' = 39{,}373A$ spezialisiert.

Im Falle der österreichischen Sterbetafel für das weibliche Geschlecht seien die 22 Gruppenwerte $U_\nu = 10^4 \operatorname{colog} {}_4p_{3+4\nu}$ auszugleichen:

ν	U_ν	ν	U_ν	ν	U_ν
0	60,430	8	80,525	16	794,499
1	36,042	9	91,565	17	1198,422
2	25,555	10	115,649	18	1766,856
3	41,655	11	147,946	19	2556,094
4	56,855	12	190,918	20	3797,391
5	62,534	13	260,628	21	5069,916
6	66,661	14	368,383		
7	70,537	15	533,117		

Hier ist $A_0 = U_{20}/(1{,}4641)^{20} = 1{,}854$, $A = 1{,}854\,(1 + \varepsilon')$, $A' = 72{,}997\,(1 + \varepsilon')$.

Wird jetzt als Annahme über ε' und über vier der Fehler $\varepsilon_\nu = (\overline{U}_\nu - U_\nu)/U_\nu$

$$A' = 70{,}5,\quad \varepsilon_0 = -\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 2\tfrac{1}{4}\% \tag{28a}$$

gewählt, dann berechnet man sukzessive aus (28) die ausgeglichenen Werte folgender Tabelle

ν	$\overline{U}_\nu$	ν	$\overline{U}_\nu$	ν	$\overline{U}_\nu$
0	61,80	8	79,28	16	805,73
1	35,25	9	90,64	17	1174,52
2	26,15	10	110,39	18	1715,60
3	40,75	11	142,65	19	2508,69
4	55,28	12	193,08	20	3670,56
5	64,13	13	269,79	21	5371,10
6	69,01	14	384,59		
7	73,05	15	554,80		

(29)

Zur äquivalenten Ausgleichung derselben U nach dem Typus (21) ist vorerst nach (27a) für

$$\mathfrak{R}_1^2/\mathfrak{R}_2 = (12{,}4940)^2/52{,}4804 = 2{,}9745$$

die Konstante $r_0 = 1{,}6864$ zu ermitteln und hieraus $r_1 = \sqrt{r^5/r_0^3} =$

$= 1{,}18436$, daher resultiert nach (20) als Rekursion der ausgeglichenen Werte $\overline{U}$

$$\mathfrak{A}' r_\nu = \overline{U}_\nu - 12{,}230\overline{U}_{\nu+1} + 50{,}286\overline{U}_{\nu+2} - 82{,}278\overline{U}_{\nu+3} + 45{,}259\overline{U}_{\nu+4} \quad (30)$$

worin $r = (1{,}1)^4$ und $\mathfrak{A}' = 40{,}622\ \mathfrak{A} = 40{,}622\ [1{,}854\ (1 + \varepsilon')] = 76{,}313\ (1 + \varepsilon')$ zu setzen ist. Durch die Wahl

$$\mathfrak{A}' = 71{,}5,\quad \varepsilon_0 = -\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1\tfrac{1}{4}\% \quad (30a)$$

entsteht die gegenüber (29) noch um eine Nuance bessere Ausgleichung

ν	$\overline{U}_\nu$	ν	$\overline{U}_\nu$	ν	$\overline{U}_\nu$
0	61,18	8	79,36	16	796,26
1	35,59	9	91,11	17	1158,56
2	25,88	10	111,19	18	1691,23
3	41,14	11	143,52	19	2471,34
4	55,88	12	193,59	20	3613,38
5	64,40	13	269,34	21	5286,70
6	68,92	14	382,38		
7	72,89	15	549,71		

(31)

die zum Ausgangspunkt der Zerlegung in Einzelwahrscheinlichkeiten genommen werden soll.

7. Um zu einer Ausgleichung der Gruppenwerte U nach (21) die korrespondierende der Einzelgrößen u zu finden, ist die Bestimmung der Linearkonstanten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ aus irgend vier Werten $\overline{U}$, etwa $\overline{U}_0, \overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3$ erforderlich. Allgemein haben die vier Gleichungen $T_\nu = U_\nu - \mathfrak{A} r^\nu = \mathfrak{B}_1 r_1^{-\nu} + \mathfrak{B}_2 r_2^{-\nu} + \mathfrak{B}_3 r_3^{-\nu} + \mathfrak{B}_4 r_4^{-\nu}$, $\nu = 0$ bis 3 (32)
die Lösung

$$\mathfrak{B}_1 = r_1^3 \frac{T_0 - (r_2 + r_3 + r_4)\, T_1 + (r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4)\, T_2 - r_2 r_3 r_4 T_3}{(r_1 - r_2)\,(r_1 - r_3)\,(r_1 - r_4)}$$

mit analogen Werten $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ durch Vertauschung von (r_1, r_2) resp. (r_1, r_3), (r_1, r_4), woraus unter der Beschränkung (21a)

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{T_0 - (r_0 + r_0^2 + r_0^3)\, r_1 T_1 + (r_0^3 + r_0^4 + r_0^5)\, r_1^2 T_2 - r_0^6 r_1^3 T_3}{(r_0 - 1)\,(r_0^2 - 1)\,(r_0^3 - 1)}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{r_0\,(T_0 - r_1 T_1) - (r_0^3 + r_0^4)\,(r_1 T_1 - r_1^2 T_2) + r_0^6\,(r_1^2 T_2 - r_1^3 T_3)}{(r_0 - 1)^2\,(r_0^2 - 1)} \quad (33)$$

$$\mathfrak{B}_3 = -\frac{r_0^3\,(T_0 - r_1 T_1) - (r_0^4 + r_0^6)\,(r_1 T_1 - r_1^2 T_2) + r_0^7\,(r_1^2 T_2 - r_1^3 T_3)}{(r_0 - 1)^2\,(r_0^2 - 1)}$$

folgt. Schließlich ist $\mathfrak{B}_4 = T_0 - \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3$ zu berechnen. Dann ergeben sich für die korrespondierende Ausgleichung (18) der Einzelwerte u die Koeffizienten

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\frac{c-1}{r-1}, \quad \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{B}_1 \frac{1-c_1^{-1}}{1-r_1^{-1}}, \quad \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{B}_2 \frac{1-c_2^{-1}}{1-r_2^{-1}}, \ldots \tag{34}$$

durch deren Kenntnis die Anwendung der Rekursion (20) entbehrlich wird.

Keineswegs ist aber eine gute Ausgleichung der U zugleich schon brauchbar für die korrespondierende der Einzelwerte u, vielmehr konstatiert man bei Ausgleichung der $\log p_{3+\nu}$ zumeist die Notwendigkeit sowohl einer Modifikation der zur rekursiven Berechnung der $\overline{U}$ benützten Anfangswerte $\overline{U}_0\overline{U}_1\overline{U}_2\overline{U}_3$, als auch des Verzichtes auf die Zerlegung der ersten Gruppe $\overline{U}_0$, so daß die korrespondierende Einzelausgleichung erst mit dem Alter 6 oder 7 beginnen kann.

Im Falle der Ausgleichung (30), (30a), (31) war

$$\begin{gathered} \overline{U}_0 = 61{,}18, \quad \overline{U}_1 = 35{,}59, \quad \overline{U}_2 = 25{,}88, \quad \overline{U}_3 = 41{,}14, \\ r = 1{,}4641, \quad r_0 = 1{,}6864, \quad r_1 = 1{,}18436, \quad \mathfrak{A} = 71{,}5/40{,}622 \end{gathered} \tag{35}$$

mittels dieser Daten erhält man aus (33)

$$\mathfrak{B}_1 = 175{,}63, \quad \mathfrak{B}_2 = -826{,}14, \quad \mathfrak{B}_3 = 1434{,}84, \quad \mathfrak{B}_4 = -724{,}91 \tag{35a}$$

und aus (21a)

$$r^{-1} = 0{,}84433, \quad r_2^{-1} = 0{,}50067, \quad r_3^{-1} = 0{,}29689, \quad r_4^{-1} = 0{,}17605. \tag{35b}$$

Der Übergang zur korrespondierenden Ausgleichung der Einzelwerte $u_\nu = 10^4 \operatorname{colog} p_{3+\nu}$, welch letztere in der Anhangstabelle angeführt sind, erfordert jedenfalls die Berechnung der $c_\mu = \sqrt[4]{r_\mu}$

$$c_1^{-1} = 0{,}95858, \quad c_2^{-2} = 0{,}84118, \quad c_3^{-3} = 0{,}73816, \quad c_4^{-1} = 0{,}64775 \tag{35c}$$

aber von den Linearkonstanten in (34) kann nur der Wert von $\mathfrak{a} = 0{,}3792$ beibehalten werden, hingegen muß eine Korrektur der durch (34) gelieferten Werte $\mathfrak{b}$ platzgreifen, wenn eine leidliche Einzelausgleichung vom Alter 6 oder 7 an zustande kommen soll. Durch ein Korrekturverfahren gelangt man zur Formel

$$\begin{aligned} \overline{u}_\nu = 0{,}379c^\nu + 48{,}9868c_1^{-\nu} - 300{,}2727c_2^{-\nu} + \\ + 681{,}9083c_3^{-\nu} - 467{,}3832c_4^{-\nu} \quad (\nu \geqq 4). \end{aligned} \tag{36}$$

Für $\nu = 3$ ist der Wert nach (36) allenfalls brauchbar, 12,171 statt 12,961.

8. Es bleibt zu erwägen, ob nicht der formelmäßig korrespondierenden Einzelausgleichung der u ein Zerlegungsverfahren bezüglich der ausgeglichenen Gruppenwerte $\overline{U}$ mittels Interpolation vorzuziehen ist, wenn dieses sich auf objektiven Kriterien aufbaut und der Doppelforderung nach möglichst geringen Fehlern $(\overline{u}_\nu - u_\nu)/u_\nu$ und nach möglichst regulärem Differenzengang $(\overline{u}_{\nu+1} - \overline{u}_\nu)$ nachzukommen sucht. Bei dieser Aufgabe leistet der Zusammenhang (17) zwischen den Werten

$f(\nu)$ einer Funktion f und deren t-gliedrigen Summen

$$F(tz) = f(tz) + f(tz+1) + \ldots + f(tz+t-1), \quad z = 0, 1, 2, \ldots \qquad (37)$$

gute Dienste, wofern nämlich der ausgeglichene Wert von $f(\nu)$ dem Wertevorrat

$$f_\lambda{}^k(\nu) = \sum_{m=0}^{k} \left[\binom{\lambda - z + \frac{\nu+1}{t}}{m+1} - \binom{\lambda - z + \frac{\nu}{t}}{m+1} \right] \Delta_t{}^m F(tz - t\lambda) \qquad (38)$$

(mit der Definition von z als der größten in ν/t enthaltenen ganzen Zahl) entnommen wird. Im vorliegenden Falle tritt $\overline{U}_z$ an die Stelle von $F(tz)$ und es wird

$$\overline{u}_\nu = f_\lambda{}^k(\nu) = \sum_{m=0}^{k} \left[\binom{\lambda - z + \frac{\nu+1}{t}}{m+1} - \binom{\lambda - z + \frac{\nu}{t}}{m+1} \right] \Delta^m \overline{U}_{z-\lambda}. \qquad (39)$$

Beispielsweise ergibt sich bei $t = 4$, $\nu = 30$, $\lambda = 1$, $k = 3$

$$\overline{u}_{30} = \sum_{m=0}^{3} \left[\binom{7/4}{m+1} - \binom{6/4}{m+1} \right] \Delta^m \overline{U}_6.$$

ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$
0	18,220	22	16,375	44	32,245	66	207,351
1	16,206	23	16,621	45	34,488	67	227,527
2	14,278	24	16,879	46	36,994	68	250,336
3	12,476	25	17,121	47	39,793	69	275,643
4	10,831	26	17,347	48	42,833	70	300,975
5	9,383	27	17,573	49	46,281	71	331,606
6	8,164	28	17,800	50	50,112	72	365,160
7	7,212	29	18,047	51	54,364	73	401,090
8	6,561	30	18,352	52	58,975	74	440,659
9	6,245	31	18,691	53	64,168	75	484,321
10	6,303	32	19,079	54	69,920	76	533,455
11	6,771	33	19,532	55	76,317	77	586,048
12	8,590	34	20,064	56	83,166	78	643,966
13	9,738	35	20,685	57	90,897	79	707,871
14	10,873	36	21,418	58	99,443	80	782,140
15	11,939	37	22,240	59	108,874	81	857,172
16	12,864	38	23,185	60	119,071	82	941,860
17	13,669	39	24,267	61	130,500	83	1032,208
18	14,368	40	25,503	62	143,117	84	1144,049
19	14,979	41	26,908	63	157,022	85	1256,932
20	15,516	42	28,496	64	172,363	86	1378,115
21	15,950	43	30,283	65	189,019	87	1507,604

Unter Zugrundelegung der ausgeglichenen Gruppenwerte $\overline{U}$ in (31) entsteht so eine annehmbare Ausgleichung für die Alter 3 bis 90, bei der fast überall bis zur dritten Differenz gegangen wurde, nur für $\nu =$ 12 bis 15 wurden vierte, und für $\nu = 80$ bis 87 bloß zweite Differenzen berücksichtigt. Für die Wahl von λ genügte eine der Zahlen 0, 1, 2 und zwar

$\lambda = 0$ bei $\nu = 0$ bis 3,

$\lambda = 1$ bei $\nu = 4$ bis 7, 16 bis 39, 64 bis 79.

Um den analytischen Charakter der Ausgleichung nicht zu stören, figurierte für je vier Werte $\nu = 4z$, $4z + 1$, $4z + 2$, $4z + 3$ immer ein und dasselbe λ und k, so dass die ausgeglichenen 4-jährigen Wahrscheinlichkeiten in (31) konserviert blieben, sonst wäre an manchen Stellen noch eine verbesserte Ausgleichung möglich gewesen. Die nach (39) ausgeglichenen Werte u_ν von $\overline{u_\nu} = 10^4$ colog $p_{3+\nu}$ sind in folgender Tabelle enthalten.

Daß hier nur eine von den Möglichkeiten herausgegriffen wurde, welche bei der Wahl von $c_1c_2c_3c_4$ als Funktionen von c in Formel (18) offenstehen, sei nochmals betont.

Anhang: Unausgeglichene Werte von $u_\nu = 10^4$ colog $p_{3+\nu}$ der öst. Sterbetafel (1930/33) für das weibliche Geschlecht.

ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$	ν	$\overline{u}_\nu$
0	17,494	22	15,501	44	34,577	66	202,195
1	16,491	23	15,794	45	36,197	67	232,146
2	13,484	24	15,488	46	34,664	68	251,752
3	12,961	25	16,883	47	42,508	69	276,675
4	11,437	26	17,232	48	45,008	70	328,359
5	9,478	27	17,058	49	44,652	71	341,636
6	8,303	28	17,014	50	49,047	72	385,504
7	6,824	29	17,881	51	52,211	73	420,194
8	6,389	30	17,712	52	56,784	74	455,351
9	6,476	31	17,930	53	61,803	75	505,807
10	6,258	32	18,141	54	69,166	76	548,122
11	6,432	33	21,289	55	72,875	77	621,563
12	9,173	34	21,202	56	78,885	78	651,583
13	9,652	35	19,893	57	86,942	79	734,826
14	10,174	36	21,761	58	97,455	80	854,453
15	12,656	37	22,642	59	105,101	81	910,648
16	13,048	38	23,952	60	109,286	82	943,984
17	14,704	39	23,210	61	126,511	83	1088,306
18	14,573	40	25,044	62	142,458	84	1159,640
19	14,530	41	29,327	63	154,862	85	1167,134
20	15,445	42	29,852	64	171,727	86	1315,260
21	15,794	43	31,426	65	188,431	87	1427,882