ZPRÁVY.

Problém úrokové míry.

(Výtah z přednášky ve Spolku pro pěstování aktuárských věd dne 8. května 1936). Podám přehled o matematických metodách, jichž se užívá pro řešení problému úrokové míry.

Nejjednodušší je případ, kdy jest stanoviti nějakou pojistně-matematickou veličinu při určité úrokové míře, je-li tato veličina dána pro několik jiných zpravidla ekvidistantních úrokových měr. Pak řešení problému úrokové míry spočívá v interpolaci nebo extrapolaci. Je-li dána hodnota pro m různých úrokových měr, lze pomocí diferenčního schematu stanoviti diference až do $(m - 1)$ řádu. Předpokládáme, že diference m-ho řádu je konstantní, a stanovíme tuto diferenci z rozvoje hledané hodnoty pro úrokovou míru rovnou nule v interpolační řadu podle diferencí, na př. v řadu

$$f(0) = f(i - nh) = f(i) - \binom{n}{1} \Delta f(i) + \ldots + (-1)^m \cdot \binom{n+m-1}{m} \Delta^m f(i).$$

Výsledky výpočtů podle této metody závisejí ovšem jednak na počtu známých hodnot m, jednak jak jsou vzdáleny výše úrokové míry od nuly. Je přirozené, že přesnost výsledků roste s rostoucím počtem známých hodnot. Druhá podmínka přesnosti, t. j. vzdálenost úrokových měr od nuly, plyne z uvedeného rozvoje v řadu, neboť tento rozvoj vystihuje lépe hodnotu $f(0)$, je-li i blízké nule, a to tím spíše, není-li m dosti vysoké.

Další skupinu tvoří případy, kdy je úmrtnost dána analytickým výrazem. V těchto případech se stanoví hledaná hodnota sice pro touž úrokovou míru jako hodnota daná, ale změní se přiměřeně nějaká jiná proměnná, jako na př. stáří nebo doba trvání důchodu, při čemž na př. hledaná hodnota při daném stáří pro novou úrokovou míru je rovna hodnotě při staré úrokové míře avšak pro nové stáří. Tento postup vysvitne nejlépe z tohoto jednoduchého příkladu: Budiž dán řád úmrtnosti výrazem $l_x = k \cdot (\omega - x)^m$. Pak jest hodnota životního důchodu

$$\delta \bar{a}_x = \int_0^h \frac{t^m e^t \, dt}{h^m e^h}$$

kde $h = (\omega - x) \cdot \delta$. Pro novou úrokovou míru δ', změní se na pravé straně rovnice pouze h; téhož efektu však můžeme docíliti, necháme-li δ beze změny, avšak změníme-li x tak, aby platilo $h = h'$, t. j. $(\omega - x')\,\delta = (\omega - x)\,\delta'$. Potom tedy jest

$$\bar{a}_{x'}(\delta') = \frac{\delta}{\delta'} \bar{a}_x(\delta).$$

Z tohoto výsledku je patrno, že v těchto případech je nahrazena změna úrokové míry změnou ve stáří.

Zpravidla však nebývá dána ani příslušná pojistně matematická hodnota při několika úrokových měrách ani úmrtnost analytickým výrazem, nýbrž máme stanoviti nějakou veličinu při nové úrokové míře, jsou-li dány při staré úrokové míře kromě této veličiny také komutační sloupce.

Sem patří především formule Steffensenova a Meidellova z r. 1918, které, jak ukázal v r. 1921 Palmquist, lze obě odvoditi ze známých vět o střední hodnotě integrálního počtu, při čemž Steffensenova formule vyplývá z druhé a Meidellova z první z nich. Postup pro odvození spočívá v tom, že se do vět o střední hodnotě dosadí vhodné funkce f a φ a že se z nich vypočte ξ, rozvine se v potenční řadu podle rozdílu dané a nové úrokové míry $h = i' - i$, při čemž se spokojíme prvními dvěma členy rozvoje, a dosadíme takto stanovené ξ zpět do rovnice vyjadřující větu o střední hodnotě. Tak na př. Meidellovu formuli dostaneme, dosadíme-li do první věty o střední hodnotě

$$f(t) = (1 + hv)^{-t} \qquad \varphi(t) = (1 + i)^{-t}\frac{l_{x+t}}{l_x}, \qquad a = 0,\ b = \infty.$$

Pak zní věta o střední hodnotě $a'_x = a_x(1 + hv)^{-\xi}$. Řešíme-li tuto exponenciální rovnici podle ξ, rozvineme-li výraz, který pro ξ dostaneme, v potenční řadu podle h a spokojíme se prvním členem této řady, dostaneme pro ξ výraz

$$\xi = \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

a dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce pro a'_x, dospíváme k Meidellově formuli

$$a'_x = a_x(1 + hv)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}.$$

Poukka při odvození své formule r. 1923, která se pro svou jednoduchost a při tom přesnost hodí velmi dobře pro praktické řešení problému změn úrokové míry, vychází z rozvoje hodnoty životního důchodu v nekonečnou řadu postupující podle mocnin rozdílu dané a nové úrokové míry $h = i' - i$. Poukka dokázal, že platí obecně

$$a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} vh + \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x}(vh)^2 + \ldots$$

kde

$$S^{(k)}_{x+1} = \Sigma S^{(k-1)}_{x+1} \quad \text{a} \quad S^{(1)}_{x+1} = S_{x+1}.$$

Tato řada nehodí se pro numerické výpočty, protože pomalu konverguje. Rychlejší konvergence docílí se tím, že zavedeme místo h novou proměnnou z vztahem

$$z = \frac{h}{\alpha + h}$$

kde α je prozatím libovolný parametr. Z této definice nové proměnné plyne pro h potenční řada: $h = \alpha z + \alpha z^2 + \ldots$ Dosadíme-li takto upravené h do rozvoje a'_x a zanedbáme-li třetí a vyšší mocniny z, dostaneme

$$a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{D_x} v\alpha z + \left(-\frac{S_{x+1}}{D_x} v\alpha + \frac{S^{(2)}_{x+1}\, v^2\alpha^2}{D_x}\right) z^2.$$

Libovolný parametr α zvolíme nyní tak, aby koeficient u z^2 byl roven nule a jako výsledek dostáváme

$$a'_x = a_x - \frac{\dfrac{S_{x+1}}{D_x} \cdot v \cdot h}{1 + \dfrac{S_{x+1}^{(2)}}{S_{x+1}} vh}.$$

Poukka učinil dále empirický poznatek, že poměr

$$k = \frac{S_{x+1}^{(2)}}{S_{x+1}} : \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}.$$

je stálý a nezávisí ani na úrokové míře ani na stáří; proto lze ve výsledném vzorci pro a'_x odstraniti výraz $S_{x+1}^{(2)}$, který nebývá tabelován.

Formuli, kterou odvodil r. 1921 Palmquist, lze odvoditi metodou, použitou Poukkou, jestliže provedeme v rozvoji podle h substituci $z = 1 - (1 + \alpha h)^{-\beta}$.

Zmíním se ještě o metodě, kterou uveřejnil loni Güttinger a která spočívá v použití diferenciálních rovnic. Hodnotu životního důchodu lze psáti ve tvaru

$$a_x = \Sigma e^{-\delta t} \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Derivujeme-li tuto rovnici podle úrokové intensity δ dostaneme po jednoduché úpravě

$$\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\delta} = -\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} . a_x.$$

To je jednoduchá diferenciální rovnice pro funkci a_x a jejím integrováním dostáváme řešení

$$a_x(\delta) = a_x(\delta_0) \cdot e^{-\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} \mathrm{d}\delta}.$$

Tímto vztahem je tedy přesně dána hodnota životního důchodu při úrokové míře δ, je-li tato hodnota známa pro úrokovou intensitu δ_0. Pro praktické účely působí ovšem potíže výpočet integrálu ve formuli obsaženého. Předpokládáme tedy, že podíl $\dfrac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$ nezávisí vůbec na δ; pak přechází řešení Güttingerovo v Meidellovu formuli, která jest tedy jen velmi hrubým přiblížením. Přesnější výsledky dostaneme, rozvineme-li výraz pod integračním znamením v potenční řadu podle rozdílu nové a staré úrokové intensity a spokojíme se pouze první mocninou tohoto rozdílu. Při tom můžeme užíti opět s výhodou Poukkova poměru k, o němž jsem se již zmínil. Použitím jeho, za předpokladu, že nezávisí na úrokové míře, podařilo se však Güttingerovi odvoditi zcela přesné explicitní vyjádření hodnoty životního důchodu jako funkce úrokové intensity.

Derivujeme-li totiž ještě jednou svrchu uvedenou rovnici pro a_x, použijeme Poukkova vztahu a dosadíme hodnoty a_x a $\dfrac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\delta}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_x}{\mathrm{d}\delta^2} = 2k \cdot \frac{1}{a_x} \left(\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\delta}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}\delta}.$$

Tato rovnice je snadno řešitelná a její řešení jest $a_x^{-2k+1} = k_1 e^{\delta} + k_2$, kde k_1 a k_2 jsou integrační konstanty. Zvolíme-li vhodně tyto konstanty, dostaneme jako výsledek

$$a_x(\delta) = a_x(\delta_0) \cdot \left\{1 + (2k-1)\frac{S^0_{x+1}}{N^0_{x+1}} \cdot \frac{i - i_0}{1 + i_0}\right\}^{-\frac{1}{2k-1}}.$$

Tato rovnice nám dává přesné řešení problému změny úrokové míry za předpokladu, že platí Poukkův vztah.

Abych tedy shrnul: Je-li dán systém komutačních sloupců pro určitou úrokovou míru a máme-li stanoviti hodnotu životního důchodu pro úrokovou míru novou, používáme v podstatě tří metod pro řešení problému úrokové míry. První metoda spočívá v použití vět o střední hodnotě integrálního počtu (formule Steffensenova a Meidellova), druhá v rozvoji v nekonečnou potenční řadu, jejíž konvergence se urychluje pomocí vhodné substituce (formule Palmquistova a Poukkova) a konečně třetí v použití diferenciálních rovnic pro hodnotu životního důchodu jako funkce úrokové ntensity (Güttinger).

Dr. *Jar Stránský.*

Nově utvořený Spolek pro pěstování aktuárských věd, o jehož ustavení byla zpráva ve 4. č. V. ročníku Aktuárských věd, uspořádal po svém utvoření pro své členy referát o jedné z aktuálních otázek pojištění po stránce pojistně-matematické, a to o vlivu změn úrokové míry na pojistně-matematické hodnoty. Referáty pronesl dne 24. dubna dr. Zelenka a dne 8. května dr. Stránský. O obsahu referátů se zde nezmiňujeme, protože přednáška dr. Zelenky je otištěna celá v tomto časopise jako samostatný článek a přednáška dr. Stránského ve stručnějším výtahu. Obě schůze byly četně navštíveny a po druhé z nich provedena debata o tématech obou referátů, ve které někteří z účastníků doporučovali, aby na podzim tohoto roku bylo pro důležitost této otázky v referátech pokračováno a vyložen zejména vliv změny úrokové míry na výši prémiových reserv.

Spolek chystá pro podzimní činnost řadu přednášek a referátů, o kterých neopomeneme své čtenáře v čas uvědomiti. *V. K.*

Mezinárodní populační kongres v Paříži. Koncem července příštího roku bude se konati v Paříži mezinárodní populační kongres pod protektorátem Mezinárodní unie pro vědecké studium populačních problémů s tímto programem:

První část.

Kvantitativní problémy populační (demografie).

1. Metody demografie. Obecná teorie populace.
2. Historická demografie.
3. Současná demografie. Stav a měna populace.
4. Hospodářské a sociální problémy populace.

Druhá část.

Kvalitativní problémy populační.

1. Vlastní metody individuální biometrie, biotypologie, ethnologie.
2. Dědičné přenášení lidských vlastností; křížení ras.
3. Praktické otázky (eugenika).

Zvláštní pozornost věnuje kongres projednávání těchto dvou otázek:
1. O nejlepší metodě pro odvození a měření tendence přirozené měny obyvatelstva.

2. Diferenciální biometrie a biotypologie, jakožto metody pro klasifikaci jednotlivců a skupin.

Československý výbor pro vědecké studium populačních problémů podal již přihlášku k účasti na kongresu a bude zastupován p. doc. dr. Boháčem, vicepresidentem Státního úřadu statistického, který předloží kongresu práci o vlivu světové hospodářské krise na přirozenou měnu obyvatelstva. *J. S.*

Hospodářský a statistický seminář v Colorado Springs. (U. S. A.) V červenci a srpnu letošního roku pořádá americká Cowles Commission for Research in Economics po druhé seminář pro pokročilé národohospodáře a statistiky v Colorado Springs ve Spojených státech severoamerických. Seminář bude míti sekce pro hospodářskou a matematickou statistiku. V sekci matematické budou přednášeti R. A. Fisher, H. T. Davis, E. L. Dodd, C. F. Roos, T. H. Rawles, A. J. Lotka a C. Gini. *J. S.*

Snížená porodnost a zvýšená dětská úmrtnost v letech 1915—1920. Hospodářská krise, která se projevuje zejména nezaměstnaností, byla by značně citelnější, kdyby generace vstupující právě do výdělečné činnosti, nebyla početně oslabena světovou válkou. Příčina tohoto oslabení jest jednak snížená porodnost v letech 1915—1920, jednak zvýšená dětská úmrtnost ve válečných letech. Mám-li populační ztráty odtud plynoucí vyjádřiti číselně, učiním tak nejdříve u ztrát, pokud plynou ze snížené porodnosti.

Porodnost před světovou válkou na území nynější Č. S. R. měla jistou klesavou tendenci. Za předpokladu, že tato tendence by byla zachována i přes válečná léta, docházíme k tomu, že by se byl narodil na území Č. S. R. tento počet dětí:

v roce	1915 ...... 397.000		v roce	1918 ...... 387.100
	1916 ...... 393.700			1919 ...... 383.800
	1917 ...... 390.400			1920 ...... 380.500

Odečteme-li od těchto čísel počet dětí skutečně živě narozených (viz tab.), dostáváme počet „chybějících“ dětí, které by se byly narodily, kdyby nebylo došlo k snížené porodnosti v době války a krátce po válce. Z celkového počtu 805.000 těchto dětí, by se jich bylo asi narodilo:

v roce	1915 ...... 107.700		v roce	1918 ...... 211.800
	1916 ...... 185.600			1919 ...... 80.900
	1917 ...... 201.800			1920 ...... 17.200

Přirozeným důsledkem tak značně snížené porodnosti bylo, že se v letech 1921/23 narodilo opět poněkud více dětí, než jak se za shora uvedeného předpokladu pokračování tendence z let předválečných, mohlo očekávati. Z těchto asi 45.400 dětí pochází

z roku 1921	21.800
1922	14.400
1923	9.200

Porodnost po světové válce ovšem u nás stále více klesá; pokles dosahuje nyní v průměru posledních 5 let 12.800 dětí ročně, kdežto před světovou válkou byl na dnešním území Č. S. R. v letech 1905—1913 roční pokles porodnosti jen asi 3.300 dětí.

Lze říci, že mimořádně vysoká porodnost v letech 1921—1923 vynahradila z malé části sníženou porodnost z let 1915—1920; z uvedených dat však plyne, že se narodilo u nás asi o 759.600 dětí méně, než by se jich bylo asi narodilo, kdyby nebylo došlo k světové válce.

Úmrtnost těchto dětí, byla by se pohybovala asi mezi úmrtností předválečnou a úmrtností z doby poválečné. Použijeme-li úmrtnostní tabulky pro zemi českou a moravskoslezskou, počítané z období 1909 až 1912 a předpokládáme-li, že mezi chybějícími dětmi jest stejně dívek jako chlapců, pak zjistíme, že roku 1930 by se jich dožilo 551.800. Za předpokladu však, že by se úmrtnost podle zmíněné tabulky lineárně lepšila až na úmrtnost danou tabulkami úmrtnostními pro československou republiku, počítanou z období 1929 až 1932, pak by se roku 1930 dožilo 577.500 těchto osob. Ze všeho obyvatelstva Č. S. R., podle sčítání lidu z roku 1930, jest posléze uvedený počet 3,9%. Ze všech osob, narozených v letech 1915 až 1920 a doživších se roku 1930 to značí 50,1%.

Zjistiti ztráty, způsobené zvýšenou dětskou úmrtností v době válečné jest úkolem poněkud těžším již proto, že úmrtnostní tabulky samotné, kterých jest k výpočtům třeba, jsou pro nejnižší stáří konstruovány poněkud odlišně, než pro stáří vyšší a také proto, že tu jde jistě o ztráty poměrně malé, které mohou býti zakryty úmrtnostní tabulkou plně nepřiléhající. K svým výpočtům použil jsem úmrtnosti, dané tabulkou úmrtnostní pro zemi českou a moravskoslezskou, počítanou z období 1909 až 1912, která se lineárně lepší až na úmrtnost, danou úmrtnostní tabulkou pro Č. S. R., počítanou z období 1929 až 1932. Toto zlepšení úmrtnosti se ovšem dostavilo i ve skutečnosti, avšak nebylo asi lineární. V tabulce jest především uveden počet osob živě narozených v letech 1912 až 1922 (1), počet osob, které by se za použití zmíněné úmrtnosti dožily roku 1930 (2), a dále počet osob, které se podle sčítání lidu z roku 1930 narodily v letech 1912/22 a byly ke dni sčítání lidu v Č. S. R. přítomné (3). Konečně jest tu uvedena možná ztráta, plynoucí ze zhoršené dětské úmrtnosti v době válečné a poválečné (4) a to jako rozdíl mezi osobami přítomnými a mezi osobami, které by se roku 1930 dožily při úmrtnosti, kterou jsme předpokládali.

Rok nar.	1	2	3	4
1912	411.420	300.420	294.560	5.860
1913	403.110	297.130	288.030	9.100
1914	400.260	297.680	285.800	11.880
1915	289.260	216.940	203.790	13.150
1916	208.100	157.310	151.720	5.590
1917	188.580	143.640	136.170	7.470
1918	175.250	134.480	138.430	
1919	302.850	234.140	236.750	
1920	363.280	283.030	287.280	
1921	399.020	313.330	312.000	
1922	388.340	307.440	313.370	

Ztráta tak zjištěná jest největší u osob, narozených v letech 1913 až 1917 a lze říci, že zvýšená dětská úmrtnost z let válečných a poválečných způsobila, že roku 1930 se dožilo u nás asi o 40.000 až 50.000 osob méně, než by se jich bylo asi dožilo, kdyby nebylo zvýšené dětské úmrtnosti v letech válečných.

Jest viděti, že snížená porodnost v mimořádných válečných letech má vliv daleko větší než zvýšená dětská úmrtnost v téže době, která je zaviněna především podvýživou a nedostatkem péče o děti nejmladší. Jest však samozřejmé, že tyto ztráty, byť jsou menší, nelze podceňovati.

Dr. *Pollak.*