La methode des coefficients indéterminés donne

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 1 \end{bmatrix} \overline{P}_{2\nu-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 3 \end{bmatrix} \overline{P}_{2\nu-3} + \ldots + \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 2\nu - 1 \end{bmatrix} \overline{P}_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 2\nu + 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ces relations récurrentes sont très avantageuses pour le calcul des coefficients P.

La plus grande valeur.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

(Suite.)

Dans ce qui suit nous allons calculer l'espérance mathématique d'une autre manière, qui nous mènera à une seconde approximation. La condition à laquelle nous arriverons demandera moins. Donc notre calcul peut être employé pour des distributions qui ne sont pas soumises à la condition (12) et qui en conséquence ne se resserrent pas pour un nombre croissant d'observations. Aussi nous calculerons l'écart type et les moments de la distribution (4).

La forme de la distribution de la plus grande valeur employée jusqu'à présent ne se prête pas à ces calculs. Elle est trop compliquée. Il s'agit donc de savoir vers quelle forme tend la distribution (4) de la plus grande valeur pour de très grands nombres N. Dans ce but nous allons développer $W(x)$ autour de la dominante. On aura la série de Taylor

$$\begin{aligned} W(x) &= W(u + x - u) \\ &= W(u) + (x-u)\, w(u) + \frac{(x-u)^2}{2}\, w'(u) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{(x-u)^\nu}{\nu!}\, w^{(\nu-1)}(u) + \ldots \end{aligned}$$

En employant (7) pour le premier membre et en outre (6) pour le troisième, on obtient en multipliant ces deux membres par N

$$\begin{aligned} W(x) = 1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}(x-u)\, Nw(u) - \frac{1}{N}\frac{(x-u)^2}{2} N^2 w^2(u) + \ldots \\ \ldots + \frac{(x-u)^\nu}{\nu!}\, w^{(\nu-1)}(u) + \ldots \end{aligned}$$

Comparons les trois premiers membres avec le développement de la fonction

$$V(x) = 1 - \frac{1}{N}\, e^{-(x-u)Nw(u)},$$

dont le terme général est

$$(-1)^{\nu-1}\frac{(x-u)^\nu}{\nu!}N^{\nu-1}w^\nu(u).$$

Il est légitime d'écrire $V(x) = W(x)$ pourvu qu'on puisse identifier les termes généraux et poser pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$w^{(\nu)}(u) = (-1)^\nu N^\nu w^{\nu+1}(u)$$

équation qui peut être écrite d'après (7)

$$\frac{w^{(\nu)}(u)}{w(u)} = (-1)^\nu \left(\frac{w(u)}{1-W(u)}\right)^\nu. \tag{13}$$

Cette hypothèse sur la façon dont se comporte finalement la distribution initiale est une généralisation de l'équation (6) qui en forme le cas particulier pour $\nu = 1$. Cette équation

$$\frac{w^{(\nu)}(u)}{w(u)} = (-1)^\nu \alpha^\nu \tag{13'}$$

n'est pas une nouvelle condition. Elle dérive déjà de (6). Du moment qu'on néglige pour une distribution initiale et pour des valeurs suffisamment grandes de x les différences entre

$$-\frac{w'}{w} \text{ et } \frac{w}{1-W} = \alpha$$

il est aussi légitime de poser (13). Calculons en effet la deuxième dérivée à l'aide de $w' = -\frac{w^2}{1-W}$. On obtient

$$\frac{w''}{w} = -\frac{2w'w}{w(1-W)} - \frac{w^2}{(1-W)^2},$$

ou avec la même précision

$$\frac{w''}{w} = \alpha^2.$$

Supposons que (13) soit vérifié pour ν arbitraire. Alors il résulte de

$$w^{(\nu)} = (-1)^\nu \frac{w^{\nu+1}}{(1-W)^\nu}$$

par une différentiation nouvelle

$$\frac{w^{(\nu+1)}}{w} = \frac{(-1)^\nu(\nu+1)w^\nu w'}{(1-W)^\nu w} + \frac{(-1)^\nu \nu w^{\nu+1}}{(1-W)^{\nu+1}}$$

ou d'après (13')

$$\frac{w^{(\nu+1)}}{w} = (-1)^{\nu+1}(\nu+1)\frac{w^{\nu+1}}{(1-W)^{\nu+1}} - (-1)^{\nu+1}\nu\frac{w^{\nu+1}}{(1-W)^{\nu+1}},$$

ce qui donne

$$\frac{w^{(\nu+1)}}{w} = (-1)^{\nu+1}\,\alpha^{\nu+1}.$$

Donc (13′) est prouvé comme resultant de (6) par recurrence. Pourtant nous allons contrôler cette condition pour les distributions initiales que nous allons traiter parcequ'elle mène à des relations intéressantes. D'après (13′) le développement en série de la probabilité totale mène à

$$W(x) = 1 - \frac{1}{N}\,e^{-(x-u)Nw(u)}.$$

L'égalité (13) identique à la condition (6) nécessaire pour le calcul de u sera appelée la condition I des propriétés finales. Si elle est remplie, on obtient la probabilité pour que x soit la plus grande valeur pour N observations

$$W^N(x) = e^{-e^{-y}} \tag{14}$$

en introduisant la transformation linéaire appelée finale

$$y = Nw(u)\,(x-u) \tag{15}$$

pour laquelle

$$-\infty < y < +\infty.$$

D'après (3) la distribution finale de la plus grande valeur devient

$$\mathfrak{w}(x) = Nw(u)\,e^{-y-e^{-y}}. \tag{16}$$

On aura donc la probabilité pour que la plus grande valeur soit située entre x et $x + dx$

$$\mathfrak{w}(x)\,dx = e^{-y-e^{-y}}\,dy.$$

En remplaçant la distribution (4) par (16) la dominante et sa probabilité seront conservées. Car on les obtient en posant $y = 0$. Ce fait n'est pas du tout remarquable puisque nous avons développé autour de cette valeur.

Quant à la médiane, elle sera calculée d'après la définition par (14)

$$e^{-e^{-y}} = \tfrac{1}{2},$$

dont on tire

$$\begin{aligned} y &= -\lg\lg 2 \\ &= 0{,}36651. \end{aligned}$$

En appliquant la transformation finale (15) on obtient comme médiane de la plus grande valeur

$$v = u + \frac{0{,}36651}{Nw(u)}$$

nombre qui sera un peu supérieur à la dominante et s'approchera de celle-ci pourvu que la grandeur

$$\frac{1}{Nw(u)} = -\frac{w(u)}{w'(u)}$$

augmente plus lentement avec N que u. Cette condition sera appelée la condition II des propriétés finales. Donc la qualité remarquable selon laquelle la médiane de la distribution (3) s'approche de la dominante est conservée par notre transformation.

Mais la relation simple (9) entre les distributions consécutives pour un nombre croissant d'observations n'existera pas, au moins en général, pour les distribution finales. Car ici nous avons supposé que N soit suffisamment grand pour que le fait d'ajouter une observation n'ait pas d'influence.

La condition II sera toujours vérifiée lorsqu'on se limite au traitement des distributions, telles que tous les moments existent. Car dans ce cas la valeur α augmente toujours ou diminue vers une constante. A fortiori le produit αu augmentera toujours.

La distribution (16) de la dernière valeur a déjà été traitée par M. R. A. Fisher.[6]) Mais cet auteur part d'un point de vue contraire au nôtre. Nous construisons la distribution finale de la plus grande valeur pour une distribution donnée et nous employons le procédé classique. Nous partons d'une distribution où entre le nombre d'observations et recherchons la forme à laquelle on arrive si N augmente indéfiniment. M. Fisher au contraire cherche la distribution initiale telle que la probabilité de la plus grande valeur pour N observations, d'être inférieure à x, soit égale à la probabilité initiale d'une valeur inférieure à une fonction linéaire de x. Donc il cherche les distributions initiales qui satisfont à l'équation

$$W^N(x) = W(a_N x + b_N). \tag{17}$$

Les solutions de cette équation sont considérées comme distributions finales. Pour $a_N = 1$, c'est à dire pour une distribution illimitée dans les deux directions, on trouve la distribution (16).

Traitons en effet la distribution initiale illimitée dans les deux sens

$$w(x) = e^{-x-e^{-x}}. \tag{18}$$

La probabilité d'une valeur inférieure à x sera

$$W(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-z-e^{-z}}\, dz$$

relation qui devient par la transformation $e^{-z} = v$

$$W(x) = \int_{e^{-x}}^{\infty} e^{-v}\, dv$$

$$= [e^{-v}]_{\infty}^{e^{-x}}.$$

Donc la probabilité que parmi N observations toutes soient inférieures à x sera

$$\mathfrak{W}(x) = e^{-Ne^{-x}} \tag{19}$$

et la distribution de la dernière valeur sera d'après (3)

$$\mathfrak{w}(x) = Ne^{-x-Ne^{-x}}$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathfrak{w}(x) = e^{-(x-\lg N)-e^{-(x-\lg N)}}$$

ou

$$\mathfrak{w}(x) = w(x - \lg N). \tag{20}$$

Donc la distribution initiale (18) a la propriété remarquable de rendre la distribution de la dernière valeur égale à la distribution initiale d'une fonction linéaire de la variable. Donc elle est stable quel que soit le nombre d'observations.

Mais pour $a_N \neq 1$, c'est à dire pour des distributions limitées soit à gauche, soit à droite, la distribution finale appelée „penultimate form" diffère de notre solution, ce qui n'est pas étonnant puisque notre construction de la distribution finale est tout à fait différente du postulatum de M. R. A. Fisher. D'ailleurs cette distribution finale est identique à l'expression trouvée par M. Fréchet.[8])

2. Calcul des moments.

La distribution finale (16) permet un calcul facile de l'espérance mathématique, de l'écart type et des autres moments de la distribution de la plus grande valeur, ce qui n'est pas le cas pour la distribution (4) elle-même.

Le moment d'ordre zéro, c'est à dire son aire, doit être égal à 1 par définition. En effet

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Nw(u)\, e^{-y-e^{-y}}\, dx$$

devient, d'après la transformation finale (15)

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y-e^{-y}}\, dy.$$

En introduisant de nouveau la variable d'intégration

$$e^{-y} = z, \tag{21}$$

où

$$e^{-y}\, dy = -dz,$$

on obtient

$$\mu_0 = \int_0^{\infty} e^{-z}\, dz,$$
$$= 1$$

comme c'est nécessaire.

L'espérance mathématique de la plus grande valeur sera

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} Nw(u)\, xe^{-y-e^{-y}}\, \mathrm{d}x.$$

En remplaçant x par la variable finale on obtient par le même procédé à l'aide de (15)

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{Nw(u)} + u\right) e^{-y-e^{-y}}\, \mathrm{d}y,$$

où le facteur de u est $\mu_0 = 1$.

En introduisant l'espérance mathématique de la variable finale

$$(\bar{u} - u)\, Nw(u) = \bar{y} \tag{22}$$

on obtient le premier moment calculé autour de la dominante

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y-e^{-y}}\, \mathrm{d}y.$$

Nous allons réduire cette intégrale à la fonction Gamma. Car on peut l'écrire à l'aide de (21) en introduisant la variable d'intégration z

$$\bar{y} = -\int_{0}^{\infty} \lg ze^{-z}\, \mathrm{d}z.$$

Cette intégrale, qui semble être assez compliquée, peut être évaluée en l'écrivant

$$\bar{y} = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{0}^{\infty} z^{p-1}\, e^{-z}\, \mathrm{d}z\right)_{p=1},$$

où l'intégrale est la fonction Gamma.

Il faut donc d'abord calculer la dérivée de cette fonction, puis introduire $p = 1$ dans sa valeur. Posons enfin $p = 1 + t$ et on aura

$$\bar{y} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \Gamma(1+t)_{t=0}.$$

Le premier moment calculé à partir de la dominante devient donc

$$\bar{y} = \gamma, \tag{23}$$

où γ est la constante bien connue d'Euler, dont la valeur numérique est

$$\gamma = 0{,}577216. \tag{24}$$

Mais le premier moment calculé autour de la dominante est la différence entre l'espérance mathématique et la dominante multipliée par

$Nw(u)$. Donc, l'espérance mathématique de la plus grande valeur d'une distribution initiale $w(x)$ est pour N observations

$$\bar{u} = u + \frac{\gamma}{Nw(u)}. \tag{25}$$

Ce resultat concorde avec la valeur (7) calculée par M. von Mises. Car l'espérance mathématique s'approche de la dominante de la plus grande valeur pourvu que les deux conditions des propriétés finales soient remplies. Cela permettra le calcul de l'espérance mathématique de la dernière valeur pour des distributions initiales chez lesquelles la condition (12) n'est pas réalisée.

Le premier moment de la distribution finale calculé autour de l'espérance mathématique sera naturellement zéro. Le $n^{\text{ième}}$ moment sera par définition

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{u})^n \, e^{-y-e^{-y}} Nw(u) \, \mathrm{d}x. \tag{26}$$

Nous allons traiter cette intégrale d'une manière analogue à celle employée pour le calcul de l'espérance mathématique. En introduisant la variable finale y et en multipliant par $N^n w^n(u)$ on obtient

$$N^n w^n(u)\, \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} N^n w^n(u) \, [x - u - (\bar{u} - u)]^n \, e^{-y-e^{-y}} \, \mathrm{d}y. \tag{27}$$

On aura donc par la transformation finale (15) et d'après (22) et (5')

$$\alpha^n \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})^n \, e^{-y-e^{-y}} \, \mathrm{d}y. \tag{28}$$

Introduisons la variable z par (21). On obtient

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n \int_0^{\infty} (\lg z + \bar{y})^n \, e^{-z} \, \mathrm{d}z.$$

Nous allons encore une fois réduire cette intégrale à la fonction Gamma en l'écrivant

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n \left(\int_0^{\infty} (\lg z + \bar{y})^n \, e^{(\lg z + \bar{y})(p-1)} \, e^{-z} \, \mathrm{d}z \right)_{p=1}.$$

Cette formule, qui semble plus compliquée que la précédente dont elle dérive, a l'avantage de rendre le $n^{\text{ième}}$ moment égal à une $n^{\text{ième}}$ dérivée. Car on aura

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \left(e^{\bar{y}(p-1)} \int_0^{\infty} z^{p-1} \, e^{-z} \, \mathrm{d}z \right)_{p=1}$$

$$= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \left[e^{\bar{y}(p-1)} \, \Gamma(p) \right]_{p=1}$$

puisque l'intégrale est la fonction Gamma. On aura donc, en introduisant encore une fois la variable t de la fonction Gamma

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [e^{\bar{\nu} t} \Gamma(1+t)]_{t=0}. \tag{30}$$

Pour calculer le $n^{\text{ième}}$ moment il faut d'abord former la $n^{\text{ième}}$ dérivée du produit de la fonction Gamma par $e^{\bar{\nu} t}$, puis introduire $t = 0$. Mais cette réduction du $n^{\text{ième}}$ moment à une $n^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction Gamma ne suffit pas encore pour le calcul pratique. Car les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées de la fonction Gamma, même pour la valeur zéro de la variable, sont assez compliquées tandis que les dérivées logarithmiques sont bien connues. Si l'on pose

$$e^{\bar{\nu} t} \Gamma(1+t) = f(t) \tag{31}$$

on aura

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n f^{(n)}(0). \tag{32}$$

Donc la fonction $f(t)$ est une sorte de fonction caractéristique de la distribution finale de la dernière valeur. Il s'agit de réduire les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées de la fonction $f(t)_{t=0}$ aux dérivées logarithmiques de la fonction Gamma. Outre la valeur déjà employée

$$\left(\frac{d \lg \Gamma(1+t)}{dt}\right)_{t=0} = -\gamma \tag{33}$$

ces valeurs bien connues sont pour $\nu \geqq 1$

$$\left(\frac{d^{\nu+1} \lg \Gamma(1+t)}{dt^{\nu+1}}\right)_{t=0} = (-1)^{\nu+1} \nu!\, S_{\nu+1}, \tag{34}$$

où les

$$S_{\nu+1} = \lim_{N=\infty} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{\lambda^{\nu+1}}$$

sont des valeurs numériques calculées.

Pour déterminer les moments d'ordre n autour de l'espérance mathématique, nous avons donc besoin d'un théorème, qui relie la $n^{\text{ième}}$ dérivée aux dérivées logarithmiques.

Soit $f(t)$ une fonction pour laquelle toutes les dérivées existent. On aura, en écrivant

$$f(t) = f^{(0)}(t),$$

pour les deux premières dérivées, en laissant de côté la variable

$$f' = f^{(0)} . \lg' f,$$
$$f'' = f' \lg' f + f^{(0)} . \lg'' f.$$

Nous allons démontrer qu'en général

$$f^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} f^{(\lambda)} \lg^{(n-\lambda)} f \tag{35}$$

formule qui est juste pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons que cette formule soit juste pour n arbitraire et calculons la dérivée suivante. On aura

$$f^{(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} f^{(\lambda+1)} \lg^{(n-\lambda)} f + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} f^{(\lambda)} \lg^{(n-\lambda+1)} f.$$

La première somme devient, en posant $\lambda + 1 = k$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f^{(k)} \lg^{(n-k+1)} f.$$

En séparant le premier membre de la seconde somme et le dernier membre de la première on obtient, en posant dans la seconde somme $\lambda = k$

$$f^{(n+1)} = f^{(0)} \lg^{(n+1)} f + \sum_{1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] f^{(k)} \lg^{(n-k+1)} f + f^{(n)} \lg' f$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lg^{(n+1-k)} f$$

puisque

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}\,(k+n-k).$$
$$= \binom{n}{k}.$$

Donc la formule (35) est prouvée par recurrence. Elle permet le calcul du $n^{\text{ième}}$ moment autour de l'espérance mathématique.

On aura d'après (35) en séparant le dernier membre

$$f^{(n)} = f^{(n-1)} \lg' f + \sum_{\lambda=0}^{n-2} \binom{n-1}{\lambda} f^{(\lambda)} \lg^{(n-\lambda)} f. \tag{36}$$

Mais d'après (31)

$$\lg f(t) = \bar{y}t + \lg \Gamma(1+t).$$

Introduisons (33). Alors $\lg' f(0) = \bar{y} - \gamma$

disparaît d'après (23), ce qui veut dire que le premier membre de (36) n'existe pas. Quant aux autres dérivées logarithmiques, on aura

$$\lg^{(n-\lambda)} f(0) = \lg^{(n-\lambda)} \Gamma(1+t)_{t=0}$$
$$= (-1)^{n-\lambda} (n-\lambda-1)!\, S_{n-\lambda}$$

d'après (34). En introduisant ces valeurs dans la somme (35) on aura par (31) et (32) le $n^{\text{ième}}$ moment autour de l'espérance mathématique pour la distribution finale de la dernière valeur

$$\alpha^n \mu_n = (-1)^n (n-1)! \sum_{\lambda=0}^{n-2} (-1)^\lambda \frac{\alpha^\lambda \mu_\lambda}{\lambda!} (-1)^{n-\lambda} S_{n-\lambda}.$$

Séparons les deux premières valeurs S_n et S_{n-1} dont les multiplicateurs seront les deux premiers moments $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$ et nous obtenons le *résultat*, qui permet le calcul de tous les moments,

$$\alpha^n \mu_n = (n-1)!\, S_n + (n-1)! \sum_{\nu=2}^{n-2} \frac{\alpha^\nu \mu_\nu S_{n-\nu}}{\nu!}. \tag{37}$$

Outre les deux moments initiaux on aura

$$\begin{aligned} \alpha^2\mu_2 &= S_2, \\ \alpha^3\mu_3 &= 2S_3, \\ \alpha^4\mu_4 &= 6S_4 + 3S_2^2, \\ \alpha^5\mu_5 &= 24S_5 + 20S_2S_3, \\ \alpha^6\mu_6 &= 120S_6 + 90S_4S_2 + 40S_3^2 + 15S_2^3. \end{aligned} \tag{37'}$$

La grandeur S_1 qui diverge n'existe pas parmi les moments. Le facteur α fera encore dépendre les moments de la derivée logarithmique de la distribution initiale pour la dominante de la plus grande valeur. Les valeurs numériques des premiers S_ν sont

$$\begin{aligned} S_2 &= 1{,}6449341 = \tfrac{1}{6}\pi^2, \\ S_3 &= 1{,}2020569, \\ S_4 &= 1{,}0823232 = \tfrac{1}{90}\pi^4, \\ S_5 &= 1{,}0369278, \\ S_6 &= 1{,}0173431 = \tfrac{1}{945}\pi^6, \end{aligned}$$

dont on tire l'écart type

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\mu_2} \\ &= \frac{1}{Nw(u)} \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \tag{38}$$

Donc

$$\alpha\sigma = 1{,}28255. \tag{38'}$$

Dans un travail antérieur nous avons calculé une valeur approximative de l'écart type en utilisant le fait assez curieux que les trois moyennes de la distribution de la plus grande valeur se rapprochent pour un nombre croissant d'observations. Pour avoir l'ordre de grandeur de l'écart type nous avons supposé que cette distribution se comporterait en première approximation comme une distribution de Gauss.[9]) Car cette identité est une de ses propriétés les plus remarquables. L'écart type σ d'une distribution de Gauss est lié à la densité de probabilité de l'espérance mathématique par le fait que celle-ci est $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. En identifiant cette expression à la densité de probabilité de la dominante (8) on obtient

$$Nw(u)\,\sigma = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$$

ou d'après (5')

$$\alpha\sigma = 1{,}08444.$$

[9]) E. J. Gumbel: L'età limite. Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari. Anno V. No. 1. Rome 1934.

Du point de vue de l'ordre de grandeur ce calcul assez grossier ne mène pas à une mauvaise approximation. En effet la différence entre cette valeur et la valeur exacte (38') n'est que 15,4%. Mais du point de vue du calcul il faut observer qu'il ne s'agit pas ici d'une identité, mais seulement d'une approximation entre les trois moyennes. Aussi ce n'est pas seulement la distribution de Gauss qui a cette qualité.

Pour le quatrième moment on obtient

$$\alpha^4 \mu_4 = \frac{3\pi^4}{20}.$$

La mesure d'asymétrie, c'est à dire la différence entre la dominante et l'espérance mathématique, réduite par l'écart type, devient d'après (25) et (38)

$$\delta = \frac{\gamma \sqrt{6}\, \alpha}{\alpha \pi} = 0{,}45005.$$

La différence entre la dominante et l'espérance mathématique est donc à peu près égale à la moitié de l'écart type, grandeur qu'on ne pourrait pas négliger dans le cas général. Les quotients des moments de Pearson

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^2}{{\mu_2}^3}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$$

deviennent

$$\beta_1 = \frac{4{S_3}^2}{{S_2}^3} = 1{,}13906,$$

$$\beta_2 = \frac{3\,.\,36\pi^4}{20\pi^4} = 5{,}4.$$

Les trois valeurs δ, β_1, β_2 sont toutes indépendantes de α. Elles seront donc les mêmes pour toutes les distributions finales et ne dépendront plus du nombre des observations ni de la forme de la distribution initiale. Les valeurs numériques montrent que la distribution finale de la plus grande valeur se distingue sensiblement de la courbe de Gauss pour laquelle $\delta = 0$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 3$.

Les valeurs des deux quotients des moments signifient que la partie droite de la distribution finale (16) sera plus forte et qu'elle sera plus tassée au milieu qu'une distribution de Gauss ayant le même écart type. Il faut noter qu'une partie de ces résultats est déjà connue, car M. R. A. Fisher[6]) a calculé les quatre premiers moments de (18) l'un après l'autre par un procédé assez laborieux, tandis que nous donnons ici une forme générale qui permet le calcul de tous les moments.

(La suite).